

**Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ)»**

**В.Д. Червенчук, А.Л. Иванов**

**ТЕРМОДИНАМИКА  
И ТЕПЛОПЕРЕДАЧА**

**Учебное пособие**

**Омск • 2016**

УДК 53 (075.4)  
ББК 31.я73  
Чер45

---

Согласно 436-ФЗ от 29.12.2010 «О защите детей от информации, причиняющей вред их здоровью и развитию» данная продукция маркировке не подлежит.

---

*Рецензенты:*

д-р техн. наук, проф. Н.С. Галдин (СибАДИ);  
канд. техн. наук, доц. А.Г. Михайлов (ОмГТУ)

Работа утверждена редакционно-издательским советом СибАДИ в качестве учебного пособия.

**Червенчук, Владимир Дмитриевич.**

**Чер45 Термодинамика и теплопередача** [Электронный ресурс] : учебное пособие / В. Д. Червенчук, А.Л. Иванов. – Электрон. дан. – Омск : СибАДИ, 2016. – Режим доступа: <http://bek.sibadi.org/fulltext/esd242.pdf>, свободный после авторизации. – Загл. с экрана.  
ISBN 978-5-93204-940-2.

Кратко излагаются основы термодинамики и теплообмена. Для лучшего восприятия изучаемого материала в пособии используются примеры с решениями и иллюстрации, ссылки на электронный ресурс (видеолекции и учебные фильмы по излагаемому материалу).

В конце каждого раздела, для оценки понимания прочитанного, читателю даются вопросы для самоконтроля и задания.

Имеет интерактивное оглавление в виде закладок.

Рекомендовано обучающимся всех форм обучения направлений «Энергетическое машиностроение», «Технология транспортных процессов», «Наземные транспортно-технологические средства», «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», «Наземные транспортно-технологические комплексы», «Профессиональное обучение».

Подготовлено на кафедре «Тепловые двигатели и автотракторное электрооборудование».

Мультимедийное издание (28,0 МБ)  
Системные требования : Intel, 3,4 GHz ; 150 МБ ; Windows XP/Vista/7 ;  
DVD-ROM ; 1 Гб свободного места на жестком диске ;  
программа для чтения pdf-файлов Adobe Acrobat Reader ;  
Google Chrome ; Windows Media Player, колонки

Редактор Н.И. Косенкова

Техническая подготовка – Т.И. Кукина

Издание первое. Дата подписания к использованию 30.12.2016

Издательско-полиграфический центр СибАДИ. 644080, г. Омск, пр. Мира, 5  
РИО ИПЦ СибАДИ. 644080, г. Омск, ул. 2-я Поселковая, 1

© ФГБОУ ВО «СибАДИ», 2016

## Введение

Теплота – это великий дар природы, а наука, которая занимается проблемами разумного использования такого дара, называется *теплотехникой*. В самом общем представлении теплотехника занимается изучением закономерностей процессов и явлений, связанных с получением, переносом и рациональным использованием теплоты для транспортных, производственных и бытовых нужд.

Теплотехника состоит из двух основных разделов: *термодинамики* и *тепломассообмена*. Термодинамика представляет собой науку о взаимных превращениях различных видов энергии. Ее относят к *феноменологическим* наукам, поскольку в ней не рассматриваются вопросы, связанные с микрофизическими механизмами рассматриваемых явлений (данные механизмы являются предметом исследования другой научной теории – молекулярной физики [4, 9]). Основу термодинамики составляют фундаментальные законы природы, сформулированные в термодинамических понятиях. Эти законы (их всего три) называют *началами термодинамики*.

На основе этих начал с помощью математики и логики выстроена научная теория, которая позволяет успешно решать разнообразные задачи технического характера. С помощью неё разрабатывают новые и совершенствуют существующие тепловые машины и установки и создают высокоэффективные энергосберегающие технологии, используемые в производстве материальных благ, систем жизнеобеспечения городов и сел, в создании всей государственной инфраструктуры.

На рубеже XVIII – XIX веков теплотехника совершила грандиозный прорыв в научно-технической сфере и предопределила промышленную революцию, в результате которой тепловые машины освободили человечество от тяжелого физического труда. С тех пор эту науку считают флагманом производства, информационным базисом индустриальной мощи держав.

Россия – самое «холодное» государство, по территории которого проходят самые низкие изотермы января. У нас отопительный сезон – самый продолжительный (в среднем до девяти месяцев в году – для сравнения, в США и других странах НАТО отопительный сезон не превышает и трех месяцев). Но с другой стороны, наша страна – самая богатая по запасам сырьевых и топливно-энергетических ресурсов. Правда, многие ученые, высказывая такое мнение, часто забывают об одном тепловом энергетическом ресурсе, которого нет в России, но им обладают страны НАТО. Это теплое течение Гольфстрим – своеобразная

отопительная система, спасающая страны НАТО от суровых зим. Средние температуры января в странах НАТО выше 0 °С, а в России они опускаются ниже -20 °С. Поэтому топливно-энергетический комплекс в условиях России является наиважнейшим как в локальном аспекте (в рамках отдельного села, города), так и в общегосударственном. Эффективно управлять этим сложным комплексом могут лишь высокообразованные специалисты, обладающие теоретическими знаниями теплотехники.

При решении государственных задач ускоренного развития топливно-энергетического комплекса, создания и внедрения энергосберегающих технологий на транспорте, в промышленности и сельском хозяйстве не обойтись без точных знаний законов термодинамики, теплообмена и методов решения технических задач, связанных с производством, переносом и эффективным использованием теплоты. Эти задачи напрямую связаны с проблемами обеспечения национальной безопасности и государственного суверенитета.

Количество производимых и потребляемых человечеством энергоресурсов огромно и имеет тенденцию дальнейшего роста. Примерно третья их часть расходуется на транспорте. И остановить этот рост невозможно. Во всех индустриальных странах, кроме России, за последние годы наблюдается устойчивое увеличение потребления всех видов энергоресурсов. Помимо неизбежного рассеяния теплоты во внешней среде в биосферу выбрасываются еще и большие объемы продуктов сгорания от работы тепловых двигателей, ТЭЦ и промышленных предприятий.

Источники и потребители теплоты находятся в среде обитания человека и других биологических существ и не могут не привести к изменению свойств и характеристик биосферы, что представляет серьезную опасность, и уже ставится под вопрос само существование человека как биологического вида. Поэтому теплотехника нашего времени имеет непосредственную связь с экологическими проблемами и ее развитие направлено в сторону создания тепловых машин и силовых установок с такими показателями качества, как топливная экономичность, а состав и количество продуктов сгорания по уровню токсичности не должны превышать установленных норм.

Таким образом, несмотря на тот грандиозный научно-технический прорыв, который уже осуществила теплотехника за три предыдущих столетия, она как наука еще далеко себя не исчерпала. Перед новым поколением термодинамиков и теплофизиков встают новые проблемы. Поэтому подготовка специалистов данного профиля достаточно актуальна.



## Глава 1. ЭЛЕМЕНТЫ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Теоретическими основами теплотехники являются возникшие в XIX веке *молекулярно-кинетическая теория* (МКТ), термодинамика и теория тепломассообмена.

### 1.1. Основное уравнение МКТ

Любая научная теория содержит в своей основе ряд принимаемых на веру положений – постулатов. В МКТ они следующие [11]:

- 1) любое вещество состоит из атомов и молекул;
- 2) молекулы находятся в непрерывном тепловом движении;
- 3) между молекулами существуют силы взаимодействия (притяжения и отталкивания).

Опытными подтверждениями этих положений являются:

- 1) броуновское движение;
- 2) диффузия (процесс самопроизвольного смешивания молекул разных веществ).

Французский физик Перрен<sup>1</sup> установил, что масса молекулы кислорода  $m_{O_2}$  почти в 200 млн раз меньше массы броуновской частицы и составляет порядка  $5 \cdot 10^{-26}$  кг (по уточненным данным  $m_{O_2} = 5,31 \cdot 10^{-26}$  кг).

За атомную единицу массы принимается 1/12 массы атома углерода  $m_C$ :

$$\frac{1}{12} m_C = 1 \text{ а.е.м.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Масса любой молекулы  $m_o$  может быть выражена через молекулярную массу этого физического вещества  $M_o$ , приводимую в периодической таблице Д.И. Менделеева<sup>2</sup> в а.е.м., согласно формуле:  $m_o = M_o \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$  кг. Например, масса атома углерода  $m_C = 12 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$  кг =  $1,992 \cdot 10^{-26}$  кг.

---

<sup>1</sup> Жан Батист Перрен (1870 – 1942) – французский физик, ин. член АН СССР с 1929 года.

<sup>2</sup> Дмитрий Иванович Менделеев (1834 – 1907) – русский химик, физик, метролог, прогрессивный общественный деятель. Труды по метеорологии и воздухоплаванию. Открыл в 1869 году периодический закон химических элементов. С 1876 года член-корр. Петербургской АН. В 1880 году выдвигался в академики, но был забаллотирован.

За единицу количества вещества **моль** принимают такое его количество, в котором содержится число частиц, равное числу атомов в 12 г углерода. Число этих частиц равно

$$N_A = \frac{0,012 \text{ кг}}{12 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}} = \frac{10^{-3}}{1,66 \cdot 10^{-27}} = 6,0241 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{моль}}.$$

Данное число частиц называется *числом Авогадро*<sup>1</sup>. Такое число частиц содержится в 1 моле любого вещества.

Масса одного моля (*молярная масса M*) любого вещества определяется по периодической таблице Менделеева и в СИ имеет размерность  $\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$   $\left(1 \frac{\text{кг}}{\text{моль}} = \frac{1000 \text{ г}}{\text{моль}} = 10^3 \text{ а.е.м.}\right)$ . Например, молярная масса водяного пара (вещества, состоящего из молекул H<sub>2</sub>O) будет  $M_{\text{H}_2\text{O}} = 2 \text{ а.е.м.} + 16 \text{ а.е.м.} = 18 \text{ а.е.м.} = 0,018 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ .

Сделаем следующие допущения:

- 1) молекулы взаимодействуют друг с другом лишь путём абсолютно упругих столкновений, а силы взаимного притяжения и отталкивания другой природы малы;
- 2) размеры молекул можно не учитывать (считать их точками, не имеющими объёма).

Гипотетический газ с такими свойствами называется *идеальным газом*. В нём молекулы ведут себя как твердые шарики малого размера, которые в процессе хаотического движения соударяются между собой и со стенками, ограничивающими объём газа. При ударе о стенку молекулы изменяют свой импульс, оказывая силовое действие на единицу площади стенки. Такая усредненная по времени сила на единицу площади называется *абсолютным давлением*.

Пусть  $p$  – абсолютное давление идеального газа. Оно зависит от кинетической энергии движущихся частиц. Эта зависимость описывается *основным уравнением МКТ*:

$$p = \frac{2}{3} n_o \bar{E}_k, \quad (1.1)$$

где  $\bar{E}_k$  – среднее значение кинетической энергии частицы газа;  $n_o$  – концентрация (число молекул в единице объёма).

Очевидно  $\bar{E}_k = \frac{m_o \langle w^2 \rangle}{2}$ , где  $\langle w^2 \rangle$  – среднее значение квадрата скорости молекул. Тогда из (1.1) имеем

---

<sup>1</sup> Амедео Авогадро (1776 – 1856) – итальянский физик и химик.

$$p = \frac{1}{3} n_0 m_0 \langle w^2 \rangle, \quad (1.2)$$

т.е. давление идеального газа пропорционально среднему значению квадрата скорости молекул.

Еще один макропараметр газа – *абсолютная температура*  $T$  – это мера интенсивности теплового движения молекул, которая связана со средним значением кинетической энергии  $\bar{E}_k$  поступательного движения частицы газа соотношением

$$\bar{E}_k = \frac{3}{2} kT, \quad (1.3)$$

где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$  – постоянная Больцмана<sup>1</sup>.

Из (1.1) и (1.3) определяется связь между макропараметрами газа – абсолютной температурой и абсолютным давлением:

$$p = n_0 kT. \quad (1.4)$$

Температура, при которой прекращается всякое движение молекул, называется *абсолютным нулем*. Шкала отсчета абсолютной температуры начинается с абсолютного нуля, а масштаб деления этой шкалы совпадает со шкалой Цельсия. Абсолютная температура измеряется в *кельвинах* (К):  $T = (t + 273,15) \text{К}$ , где  $t$  – температура в градусах Цельсия ( $0^\circ \text{C} = -273,15 \text{К}$ ,  $0 \text{К} = 273,15^\circ \text{C}$ ).

Из (1.2) и (1.4) средний квадрат скорости молекул  $\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m_0}$ ,

откуда

$$w_{\text{кв}} = \sqrt{\langle w^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}, \quad (1.5)$$

где величина  $w_{\text{кв}}$  называется *средней квадратичной скоростью теплового движения молекул*.

При  $T = 273,15 \text{К}$  для азота  $w_{\text{кв}}(\text{N}_2) = 500 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ , для водорода

$$w_{\text{кв}}(\text{H}_2) = 1800 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

---

<sup>1</sup> Людвиг Больцман (Boltzmann, 1844 – 1906) – австрийский физик, основоположник статистической физики, дал теоретическое обоснование и истолкование второго начала термодинамики. С 1899 года иностранный член-корр. Петербургской АН.

### Вопросы для самоконтроля и задания

1. Назовите основные положения МКТ.
2. Какие опытные данные эти положения подтверждают?
3. Что принимается за атомную единицу массы?
4. Найдите молярную массу углекислого газа.
5. Какой газ называется идеальным?
6. Напишите основное уравнение МКТ.
7. Что такое абсолютное давление газа?
8. Что такое абсолютная температура?
9. Чем объяснить, что в более легком газе при прочих равных условиях средняя квадратичная скорость теплового движения молекул выше?

### 1.2. Уравнение состояния идеального газа

Умножим левую и правую части уравнения (1.4) на объём  $V$ , занимаемый рассматриваемым идеальным газом, тогда будем иметь

$$pV = n_0 V k T = N k T, \quad (1.6)$$

где  $N = n_0 V$  – число молекул в объёме  $V$ . Уравнение (1.6) связывает три основных макропараметра газа  $p, V, T$  (параметры его состояния) и называется *уравнением состояния*.

Число молекул  $N = \mu N_A$ , где  $\mu$  – число молей в объёме  $V$  газа. Его можно определить, если массу газа  $m$  поделить на массу одного моля  $M$ . Тогда

$$pV = \mu N_A k T = \frac{m}{M} \bar{R} T, \quad (1.7)$$

где  $\bar{R} = N_A k = 6,0241 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{моль}} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}} = 8314 \frac{\text{Дж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}$  –

новая константа, называемая *универсальной газовой постоянной*.

Уравнение состояния в форме (1.7) называется *уравнением Менделеева – Клапейрона*<sup>1</sup>. Величина  $R = \frac{\bar{R}}{M}$  называется *удельной газовой постоянной*. Для разных газов она разная. Например, для кислорода молярная масса  $M_{\text{O}_2} = 2 \cdot 16 \text{ а.е.м.} = 0,032 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ , и удельная газовая постоянная будет иметь значение

---

<sup>1</sup> Бенуа Поль Эмиль Клапейрон (1799 – 1864) – французский физик и инженер. В 1820 -30 гг. работал в России. С 1830 года член-корр. Петербургской АН.

$$R_{O_2} = \frac{8,314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}}{0,032 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}} \approx 260 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Аналогично для углекислого газа (молекула  $\text{CO}_2$ ) молярная масса  $M_{\text{CO}_2} = 12 + 2 \cdot 16 = 44 \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}}$ , и  $R_{\text{CO}_2} \approx 189 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ .

Величина  $v = \frac{V}{m}, \frac{\text{м}^3}{\text{кг}}$ , называется *удельным объёмом*. Поделив

уравнение (1.7) на массу газа  $m$ , с учетом, что  $R = \frac{\bar{R}}{M}$ , получим

$$pv = RT \quad \text{или} \quad p = \rho RT, \quad (1.8)$$

где величина, обратная удельному объёму,  $\rho = \frac{1}{v}, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ , называется *плотностью*.

Уравнения (1.8) есть уравнения состояния для одного килограмма идеального газа. Их называют *уравнениями Клапейрона*.

### Вопросы для самоконтроля и задания

1. Какими основными параметрами характеризуется состояние газа?
2. Что такое уравнение состояния?
3. Запишите уравнения состояния одного килограмма идеального газа.
4. В каких единицах измеряются универсальная газовая постоянная и удельная газовая постоянная?
5. Определите удельную газовую постоянную для водорода.

### 1.3. Термодинамические процессы в идеальном газе

Состояние идеального газа полностью определяется его макропараметрами  $v, p$  и  $T$ . Под действием окружающей среды эти параметры могут измениться. В этом случае газ из некоторого своего состояния 1 с параметрами  $(v_1, p_1, T_1)$  перейдёт в состояние 2 с параметрами  $(v_2, p_2, T_2)$ . Этот переход называют *термодинамическим процессом*. Математически он может быть описан пространственной кривой в трехмерной системе координат  $(v, p, T)$ .

Но эти процессы могут протекать и так, что один из параметров будет оставаться неизменным. Можно выделить следующие частные случаи термодинамических процессов.

1. **Изотермный процесс** ( $T = \text{const}$ ). При этом из (1.8) имеем  $p\nu = RT = \text{const}$  или  $p = \frac{\text{const}}{\nu}$ . Эта обратно пропорциональная зависимость давления от удельного объёма на  $\nu p$ -диаграмме отобразится гиперболой  $1 \rightarrow 2$  (рис. 1.1). Из этой зависимости вытекает соотношение  $p_1\nu_1 = p_2\nu_2$ , называемое *законом Бойля – Мариотта*.

Кривую, описывающую изотермный процесс, называют *изотермой*. Если на  $\nu p$ -диаграмме построить несколько изотерм для различных значений абсолютной температуры, то они будут представлять собой непересекающееся семейство гипербол, и такую диаграмму можно будет использовать для определения по двум известным параметрам состояния значение третьего параметра.

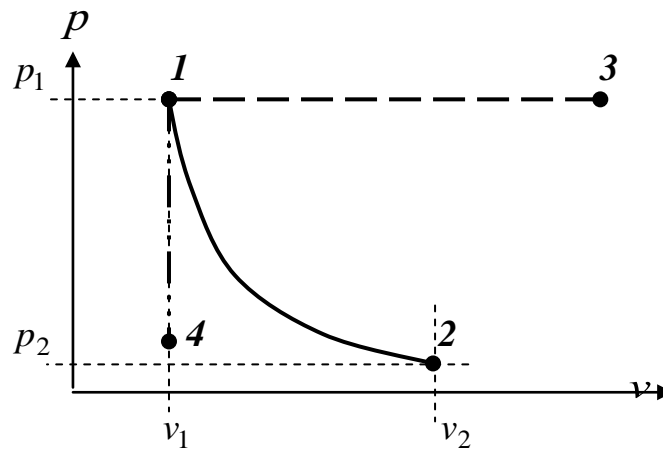


Рис. 1.1.  $\nu p$ -диаграмма

2. **Изобарный процесс** ( $p = \text{const}$ ). При этом из (1.8) имеем  $\nu = \text{const} \cdot T$ . Эта прямо пропорциональная зависимость удельного объёма от абсолютной температуры (при нагревании газ расширяется), которая на  $\nu p$ -диаграмме отображена пунктирной прямой  $1 \rightarrow 3$ , параллельной оси  $\nu$  (см. рис. 1.1). Из этой зависимости вытекает соотношение  $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{T_1}{T_2}$ , называемое *законом Гей – Люссака*.

На  $\nu T$ -диаграмме этот процесс будет представлен наклонной прямой с положительным угловым коэффициентом, т.к. удельный объём и абсолютная температура не могут принимать отрицательные значения. Линии, отображающие изобарный процесс на диаграммах в различных координатах, называются *изобарами*.

3. **Изохорный процесс** ( $\nu = \text{const}$ ). При этом из (1.8) имеем  $p = \text{const} \cdot T$ . Эта прямо пропорциональная зависимость абсолютного давления от абсолютной температуры (при нагревании газа давление

растёт). На  $v\rho$ -диаграмме этот процесс будет представлен штрих-пунктирной вертикальной прямой  $1\rightarrow 3$  (см. рис. 1.1). Из этой зависимости вытекает соотношение  $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$ , называемое *законом Шарля*.

*Шарля.*

На  $pT$ -диаграмме этот процесс будет представлен наклонной прямой с положительным угловым коэффициентом, т.к. абсолютное давление и абсолютная температура не могут принимать отрицательные значения. Линии, отображающие изохорный процесс на диаграммах в различных координатах, называются *изохорами*.

#### **Вопросы для самоконтроля и задания**

1. Что такое термодинамический процесс?
2. Что такое уравнение состояния?
3. На  $v\rho$ -диаграмме две изотермы. Объясните, почему эти две кривые не могут пересекаться.
4. Какая из двух изотерм на  $v\rho$ -диаграмме находится выше – та, которая соответствует более высокой температуре или более низкой?
5. Изобразите изохору идеального газа на  $pT$ -диаграмме.
6. Изобразите изобару идеального газа на  $vT$ -диаграмме.
7. Какой вид будет иметь изотерма на  $pT$ -диаграмме?

#### **1.4. Явления переноса (диффузия, вязкость, теплопроводность)**

Вследствие хаотического движения молекул происходит выравнивание значений макропараметров по всему пространству, занимаемому газом. Состояние газа, когда макропараметры имеют одинаковые значения в любой точке пространства, занимаемого газом, называется *равновесным*. Переход газа из неравновесного состояния в равновесное называется *релаксацией*. Это процесс выравнивания значений параметров по всему объёму, занимаемому газом. Такое выравнивание осуществляется на основе следующих законов природы.

1. **Диффузия** (перенос вещества) объясняется *законом Фика*<sup>1</sup>:

$$\frac{\Delta m}{S\Delta t} = -D \cdot \text{grad } \rho, \quad (1.9)$$

т.е. порция вещества массой  $\Delta m$ , переносимая за время  $\Delta t$  через площадку  $S$ , пропорциональна *градиенту* плотности  $\rho$ .

---

<sup>1</sup> Адольф Евгений Фик – немецкий физик и физиолог.

В математике градиент любой скалярной величины  $U = U(x, y, z)$  – это вектор  $\vec{u} = \text{grad}U$  трёхмерного пространства с координатами  $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ .

Коэффициент пропорциональности  $D$  (его размерность в СИ  $\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ ) называется здесь *коэффициентом диффузии*. Знак минус говорит о том, что перенос вещества направлен в сторону уменьшения плотности. Из МКТ следует, что коэффициент диффузии связан со среднеарифметической скоростью молекул  $w_{\text{CA}}$  и средней длиной свободного пробега  $\langle l \rangle$  соотношением

$$D = \frac{1}{3} w_{\text{CA}} \cdot \langle l \rangle. \quad (1.10)$$

2. **Вязкость** между движущимися слоями с разными скоростями приводит к появлению касательного напряжения на границе слоёв. По закону Ньютона<sup>1</sup> это напряжение пропорционально градиенту скорости:

$$\frac{F}{S} = \pm \mu \cdot \text{grad} w. \quad (1.11)$$

Коэффициент пропорциональности  $\mu$  называется здесь *динамическим коэффициентом вязкости*. Из МКТ следует, что

$$\mu = \frac{1}{3} \rho \cdot w_{\text{CA}} \cdot \langle l \rangle. \quad (1.12)$$

Кроме динамического коэффициента вязкости вводится ещё и *кинематический коэффициент вязкости*  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ . Из (1.12) получим, что

$$\nu = \frac{1}{3} w_{\text{CA}} \cdot \langle l \rangle. \quad (1.13)$$

Как видим, кинематический коэффициент вязкости в системе СИ имеет ту же размерность, что и коэффициент диффузии. Этому закону подчиняются газы и большинство жидкостей. Те жидкости, которые не подчиняются этому закону, называют *неньютоновскими жидкостями*. К ним можно отнести раствор бетона, разного рода масла и взвеси.

---

<sup>1</sup>Сэр Исаак Ньютон (1642 – 1727) – английский физик, математик, механик и астроном, один из создателей классической физики.



1. **Теплопроводность** (перенос теплоты) описывается *законом Био<sup>1</sup> – Фурье<sup>2</sup>*:

$$\frac{\Delta Q}{S \Delta t} = -\lambda \cdot \text{grad} T, \quad (1.14)$$

т.е. количество теплоты  $\Delta Q$ , переносимое за время  $\Delta t$  через площадку  $S$ , пропорционально градиенту температур  $T$ .

Коэффициент пропорциональности  $\lambda$  называется здесь *коэффициентом теплопроводности*. Знак « $-$ » говорит о том, что перенос теплоты направлен в сторону уменьшения температуры. Из МКТ следует, что

$$\lambda = \frac{1}{3} \rho \cdot c_v \cdot w_{CA} \cdot \langle l \rangle, \quad (1.15)$$

где  $c_v$  – удельная массовая теплоемкость при изохорном ( $v = \text{const}$ ) процессе.

Кроме коэффициента теплопроводности в теплотехнике часто используется *коэффициент температуропроводности*  $a_v = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_v}$

при постоянном объёме ( $v = \text{const}$ ). Из (1.15) получим, что

$$a_v = \frac{1}{3} w_{CA} \cdot \langle l \rangle. \quad (1.16)$$

Из (1.10), (1.13) и (1.16) следует, что

$$a_v = D = \nu. \quad (1.17)$$

Эти равенства показывают аналогию процессов переноса теплоты, массы и количества движения (импульса) в газах (тройная аналогия). Такая аналогия находит своё отражение в подобии безразмерных полей температуры, концентрации и скорости.

### **Вопросы для самоконтроля и задания**

1. Какое состояние газа называется равновесным?
2. Какие законы природы объясняют явление релаксации (выравнивание параметров газа по всему объёму)?
3. Сформулируйте закон Фика.
4. Сформулируйте закон Ньютона.
5. Сформулируйте закон Био – Фурье.
6. В каких единицах измеряются коэффициенты диффузии, температуропроводности и кинематической вязкости?

<sup>1</sup> Жан-Батист Био (1774 – 1862) – знаменитый французский учёный, физик, геодезист и астроном, член Парижской Академии наук (1803).

<sup>2</sup> Жан Батист Жозеф Фурье (1768 – 1830) – французский математик и физик.

## Глава 2. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Ряд явлений, протекающих в газах, можно изучать без применения механизма молекулярного движения. Именно так дело обстоит в термодинамике – науке о взаимных превращениях различных видов энергии. В отличие от молекулярной физики областью её исследований являются не микроскопические механизмы рассматриваемых явлений, а их проявления на макрофизическом уровне. Поэтому данная наука относится к разряду *феноменологических*. Её основу составляют фундаментальные законы природы, которые в термодинамике называют *началами*. Таких «начал» всего три. Их формулировка строится на основе термодинамических понятий. Ниже рассмотрим их суть.

### 2.1. Термодинамические системы. Рабочее тело

*Система* в термодинамике формируется в соответствии с решаемой задачей. Всё, что не включено в систему, но может с ней взаимодействовать, называют *внешней средой*.

Макроскопическое тело системы, состоящее из большого числа частиц (молекул газа, жидкости), называют *рабочим телом*. Рабочее тело является посредником (*агентом*), с помощью которого в тепловых машинах получают работу, теплоту и холод. Оно может состоять из одного вещества (*гомогенный агент*) или из нескольких индивидуальных веществ (*гетерогенный агент*), которые называются *компонентами*.

В общем случае взаимодействие системы с окружающей средой может состоять в обмене веществом (*массообмен*), в передаче энергии теплотой (*теплообмен*) и работой. Поэтому внешняя среда, при её абстрактном рассмотрении, может быть представлена некоторой совокупностью *аккумуляторов* (резервуаров) работы, теплоты и вещества.

Система отделяется от внешней среды реальной или мысленной границей, которую называют *контрольной поверхностью*. Контрольной поверхности можно приписать различные свойства, на основании которых термодинамические системы разбиваются на отдельные виды.

Например, если система заключена в недеформируемую и непроницаемую для потоков теплоты и частиц вещества оболочку, то её называют *изолированной*. Иначе говоря, изолированная система не взаимодействует с внешней средой.

Если система не обменивается с окружающей средой веществом, то её называют *закрытой* или *замкнутой*. В противном

случае (когда контрольная поверхность проницаема для частиц вещества) систему называют *открытой*.

Закрытая система называется *адиабатной*, если её контрольная поверхность непроницаема ещё и для тепловых потоков (обмен теплотой между системой и окружающей средой отсутствует).

Система называется *термомеханической*, если она способна к энергообмену с окружающей средой только в формах теплоты и механической работы. Контрольная поверхность такой системы непроницаема для частиц вещества, но деформируема и проницаема для теплоты.

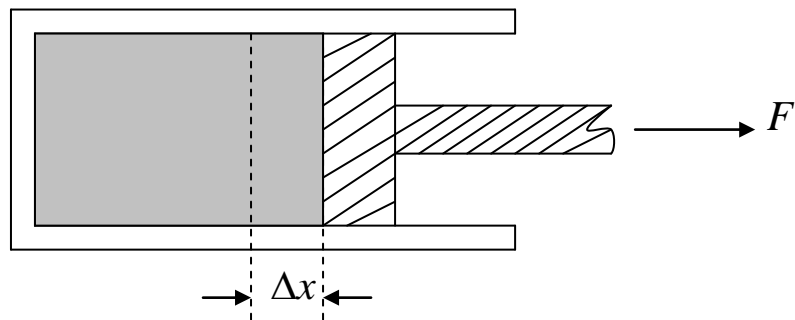


Рис. 2.1. Пример термомеханической системы

Примером термомеханической системы с двумя степенями свободы может служить газообразное рабочее тело, находящееся в надпоршневом пространстве теплового двигателя. Взаимодействие этой системы с окружающей средой в форме механической работы осуществляется благодаря перемещению поршня, и в форме теплоты – путем теплообмена через теплопроводную стенку цилиндра и поршень, которые в данном случае образуют контрольную поверхность термомеханической системы (рис. 2.1). При нагревании рабочее тело будет совершать работу при своём расширении:  $A = F \cdot \Delta x$ .

### Вопросы для самоконтроля и задания

1. Назовите основные виды термодинамических систем.
2. Какие виды взаимодействия термодинамической системы с внешней средой вам известны?
3. Какие виды энергетического взаимодействия адиабатной системы с внешней средой имеют место?

## 2.2. Функции процесса и состояния

При расширении газа в цилиндре происходит перемещение поршня и совершается работа. Если рассмотреть перемещение

поршня на малое расстояние  $\Delta x$  (рис. 2.1), то силу  $F$ , совершающую работу, можно принять постоянной. Тогда элементарная работа

$$\Delta l = F \cdot \Delta x = \frac{F}{S} \cdot S \cdot \Delta x = p \cdot \Delta V .$$

Эта элементарная работа, совершаемая термомеханической системой, равна произведению давления  $p$  на элементарное приращение объёма  $\Delta V$ . Следовательно, в качестве некоторой обобщенной силы, совершающей работу, здесь выступает давление  $p$ , а обобщенной координатой, вдоль которой направлен вектор силы и по которой происходит перемещение, является объём  $V$ .

Чтобы найти работу, полученную в процессе перехода системы из состояния **1** в состояние **2**, надо вычислить определенный интеграл

$$l = \int_{V_1}^{V_2} p dV ,$$

который численно равен площади криволинейной трапеции  $V_1 1 2 V_2$  (рис. 2.2).

Если этот процесс изотермный, то  $pV = p_1 V_1$ , откуда

$$p = \frac{p_1 V_1}{V} .$$

Тогда с использованием (1.8) получим

$$l = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1 V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = mRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} . \quad (2.1)$$

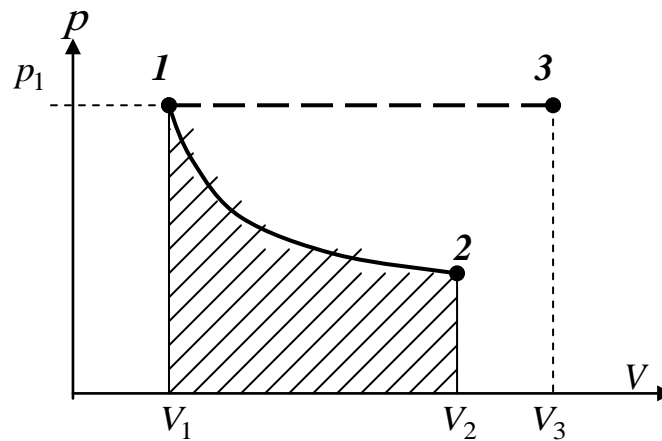


Рис. 2.2. Работа  $l = \int_{V_1}^{V_2} p dV$ ,  
совершаемая процессом  $1 \rightarrow 2$

При изобарном процессе  $1 \rightarrow 3$  (см. рис. 2.2) давление  $p = \text{const}$  и тогда

$$l = \int_{V_1}^{V_3} p dV = p_1 \int_{V_1}^{V_3} dV = p_1(V_3 - V_1), \quad (2.2)$$

т.е. в данном случае работа будет равна площади прямоугольника  $V_1 l 3 V_3$ .

При изохорном процессе  $V = \text{const}$ . Поэтому  $dV = 0$  и, следовательно,  $l = 0$ . Иначе говоря, в изохорном процессе система не производит никакой работы над внешней средой.

Работа – это энергетическая характеристика взаимодействия системы с внешней средой. Её величина зависит от процесса (формы его кривой), по которому осуществляется данное взаимодействие. Если изменить форму дуги, соединяющей точки **1** и **2** (см. рис.2.2), то изменится и площадь трапеции  $V_1 l 2 V_2$ .

Другой энергетической характеристикой взаимодействия системы с внешней средой является теплота. Элементарную порцию теплоты  $dQ$ , получаемую из внешней среды, можно представить в виде произведения некоторой обобщающей силы на приращение некоторой обобщающей координаты:

$$dQ = T ds. \quad (2.3)$$

Здесь в качестве обобщающей силы использована абсолютная температура  $T$ , а в качестве обобщающей координаты, вдоль которой направлен вектор силы, вводится величина  $S$ , называемая *энтропией*. Из (2.3) следует, что энтропия равна

$$S = \int \frac{dQ}{T}.$$

Энтропия в СИ измеряется в  $\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ . Следовательно, это тоже некоторая энергетическая характеристика – приведённая теплота.

Данная энергетическая характеристика зависит от количества газа. Поэтому удобнее пользоваться удельной энтропией, отнесённой на единицу массы газа (энтропия одного килограмма газа):

$$s = \frac{S}{m} = \frac{1}{m} \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dq}{T}, \quad (2.4)$$

которая измеряется в  $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ . Здесь  $m$  – масса газа,  $q = \frac{Q}{m}$  – теплота, приходящаяся на 1 кг газа.

Поделим (2.3) на массу  $m$ . Получим

$$dq = T ds \text{ или } ds = \frac{dq}{T}. \quad (2.5)$$

Из интегрирования последнего уравнения найдётся теплота, получаемая системой при некотором процессе  $1 \rightarrow 2$ :

$$q = \int_{s_1}^{s_2} T ds. \quad (2.6)$$

На  $sT$ -диаграмме эта величина будет представлять собой площадь криволинейной трапеции  $s_1 1 2 s_2$  (рис. 2.3).

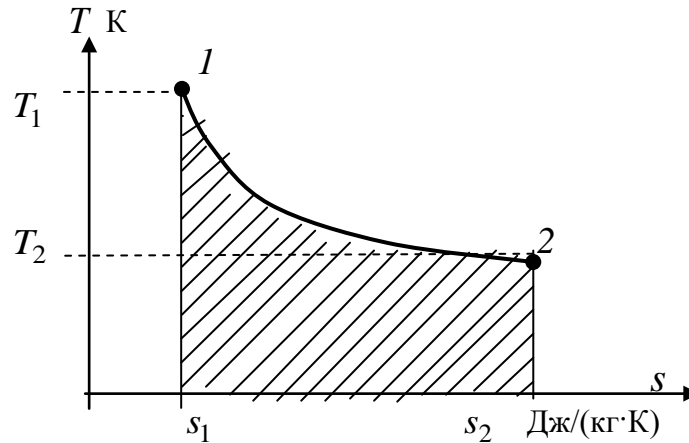


Рис. 2.3. Теплота  $q = \int_{s_1}^{s_2} T ds$ , получаемая в процессе  $1 \rightarrow 2$

Энергетические характеристики – работа и теплота – являются *функциями процесса*, их величина зависит не только от начального и конечного состояния, но и от формы пути, по которому протекал процесс.

Величина энтропии не зависит от кривой процесса, а её изменение при протекании какого-либо процесса зависит лишь от начального и конечного состояния. Это *функция состояния*. Она характеризует энергетическое состояние системы, а не энергию её взаимодействия с внешней средой.

Другой функцией состояния является внутренняя энергия системы. Она равна сумме кинетических энергий её молекул:

$$U = \sum_{i=1}^N E_{ki} = N \cdot \bar{E}_k, \quad (2.7)$$

где  $N$  – число молекул системы;  $\bar{E}_k = \frac{i}{2} kT$  – средняя кинетическая энергия молекулы в системе;  $i$  – число степеней свободы частицы, которое зависит от атомности газа. Для одноатомного газа  $i = 3$ , для двухатомного –  $i = 5$ , для трехатомного и более –  $i = 6$ . При очень

высоких температурах, когда происходит размораживание колебательного движения внутри молекулы, число степеней свободы увеличится на две единицы [11, с. 72 – 73].

Следовательно, внутренняя энергия  $U$  системы полностью определяется её абсолютной температурой  $T$  – параметром состояния и её изменение будет зависеть лишь от начального  $T_1$  и конечного  $T_2$  значений температуры процесса  $1 \rightarrow 2$ , но не от формы кривой этого процесса.

### Вопросы для самоконтроля

1. Что такое энтропия? В каких единицах в СИ эта величина измеряется?
2. Какие энергетические характеристики определяют энергию взаимодействия термодинамической системы с внешней средой?
3. Какие энергетические характеристики определяют собственную энергию термодинамической системы?
4. Какие энергетические характеристики являются функцией процесса?
5. Какие энергетические характеристики являются функцией состояния?

### 2.3. Первый закон термодинамики

Этот закон есть основной закон природы о сохранении и превращении энергии, применённый для термомеханической системы и записанный с помощью основных понятий термодинамики. Он записывается следующим уравнением:

$$Q = \Delta U + L, \quad (2.8)$$

т.е. теплота  $Q$ , получаемая системой из внешней среды, идёт на изменение её внутренней энергии  $\Delta U$  и совершение ей работы  $L$  над внешней средой.

В дифференциальной форме для рабочего тела в 1 кг этот закон имеет вид [2]:

$$dq = du + pdv, \quad (2.9)$$

где  $q = \frac{Q}{m}$ ,  $u = \frac{U}{m}$ ,  $v = \frac{V}{m}$ ,  $l = \frac{L}{m}$ ,  $dl = pdv$  – соответственно теплота, внутренняя энергия, объём, работа и элементарная работа расширения одного килограмма рабочего тела (газа).

Термодинамические процессы могут протекать таким образом, что рабочее тело, пройдя ряд последовательных состояний,

возвращается в исходное состояние. Такой замкнутый круговой процесс называют *циклом*.

Все тепловые машины работают в режиме цикла, при котором рабочее тело непрерывно меняет свои состояния, описывая некоторый круговой процесс, с периодическим возвращением в своё исходное состояние.

Круговой процесс называют *прямым циклом*, если он протекает в направлении часовой стрелки. Прямые циклы совершают положительную работу и свойственны тепловым двигателям.

Работа прямого цикла равна площади трапеции  $1^{\circ}1a22^{\circ}$  за вычетом площади трапеции  $1^{\circ}1b22^{\circ}$  (рис. 2.4,а).

Эта работа больше нуля. Следовательно, её осуществляет система над внешней средой.

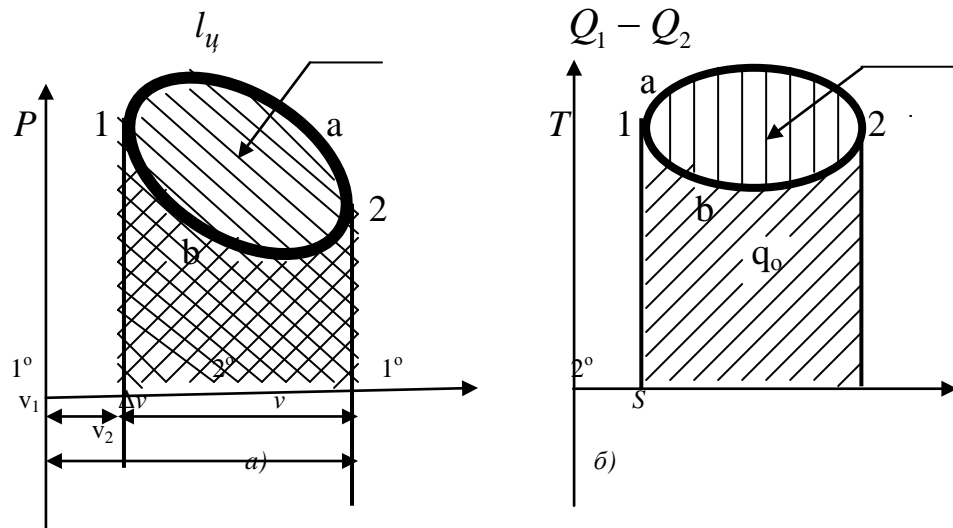


Рис. 2.4. Произвольный цикл: а) –  $p$ - $v$ -диаграмма; б) –  $s$ - $T$ -диаграмма

Цикл, протекающий в направлении против часовой стрелки, называют *обратным*. Обратные циклы характерны для холодильных машин и тепловых насосов. Их работа отрицательная – её осуществляют внешние силы над системой.

Поскольку внутренняя энергия  $U$  – функция состояния, то за один цикл её изменение  $\Delta U = 0$ , и из (2.9) имеем, что  $Q = L$ , т.е. для получения работы необходимо затратить энергию  $Q$ .

Воображаемый двигатель, который вопреки данному результату позволяет получать работу из «ничего» (без использования энергии извне), называют *вечным двигателем* (лат. *perpetuum mobile*) *первого рода*.

В связи с этим первое начало термодинамики состоит в принципе невозможности *perpetuum mobile* первого рода.



### Вопросы для самоконтроля и задания

1. Что такое термодинамический цикл?
2. Какой цикл называют прямым, а какой – обратным?
3. В каких тепловых машинах используется прямой цикл и в каких – обратный?
4. Сформулируйте первый закон термодинамики и его следствие с использованием понятия «вечный двигатель первого рода».

### 2.4. Теплоемкость

Теплоемкостью  $C$  называют количество теплоты, которое нужно сообщить системе, чтобы нагреть её рабочее тело на один кельвин (градус)

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}, \frac{\text{Дж}}{\text{К}}. \quad (2.10)$$

Для лучшего усвоения этого понятия рекомендуется посмотреть фильм.

Эта величина зависит от количества рабочего тела системы. Чем его больше, тем больше потребуется теплоты, чтобы нагреть его на один градус.



Поэтому удобнее пользоваться удельными теплоемкостями:

1) *массовая удельная теплоемкость*

$$c = \frac{1}{m} \frac{\Delta Q}{\Delta T}, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \text{ где } m - \text{масса вещества};$$

2) *молярная удельная теплоемкость*

$$\bar{c} = \frac{1}{\nu} \frac{\Delta Q}{\Delta T}, \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}, \text{ где } \nu - \text{число молей};$$

3) *объемная удельная теплоемкость*

$$c' = \frac{1}{V} \frac{\Delta Q}{\Delta T}, \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}, \text{ где } V - \text{объем рабочего тела}.$$

Из данных определений удельных теплоемкостей вытекают следующие соотношения между ними:  $cm = \bar{c}\nu = c'V$  или

$$c = \bar{c} \frac{m}{\nu} = \bar{c}M, \quad c' = \bar{c} \frac{V}{\nu} = \bar{c}v_{\mu}, \quad c' = c \frac{m}{V} = c\rho, \quad (2.11)$$

где  $M$  – молярная масса;  $v_{\mu}$  – объем одного моля;  $\rho$  – плотность. При нормальных условиях (т.е. при температуре  $T_0 = 273,15\text{K}$  и давлении

$$p_0 = 1\text{ат}) \text{ объем моля } v_{\mu} = 22,4 \frac{\text{м}^3}{\text{кмоль}}, \text{ а плотность } \rho_0 = \frac{M}{22,4} 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Теплоёмкость, хоть и незначительно, зависит от температуры. Поэтому представленные выше теплоёмкости являются их средними значениями на интервале температур  $[T, T + \Delta T]$ . А точное значение удельной массовой теплоёмкости  $c$  (далее её будем называть просто теплоёмкостью) определится как

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} = \frac{dq}{dT}. \quad (2.12)$$

Следовательно, элементарная порция тепловой энергии, полученной извне на 1 кг рабочего тела, в этом случае будет равна

$$dq = cdT. \quad (2.13)$$

Из соотношений (2.5) и (2.13) имеем

$$ds = \frac{dq}{T} = c \frac{dT}{T}. \quad (2.14)$$

Интегрируя это уравнение для термодинамического процесса  $1 \rightarrow 2$ , в котором в состоянии 1 система имела параметры  $s_1, T_1$ , а при переходе в состояние 2 изменила их на  $s_2, T_2$ , получим изменение энтропии в данном процессе

$$\int_{s_1}^{s_2} ds = s_2 - s_1 = \Delta s_{12} = \int_{T_1}^{T_2} c \frac{dT}{T}.$$

Если пренебречь зависимостью теплоёмкости от температуры, то её можно вынести за знак интеграла

$$\Delta s_{12} = c \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = c \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (2.15)$$

Данная формула позволяет определить изменение энтропии в процессе, если известны начальная и конечная температуры этого процесса, а теплоёмкость в заданном интервале температур не зависит от температуры.

Для нагрева газа в замкнутом недеформируемом объёме требуется меньше теплоты, чтобы увеличить его температуру на один градус, чем на нагревание той же массы газа в цилиндре с поршнем, потому что часть энергии в последнем случае будет уходить на расширение газа, обеспечивающее работу по передвижению поршня. Поэтому различают теплоёмкости при постоянном объёме:

$$c_v = \left( \frac{dq}{dT} \right)_{v=\text{const}} \quad (2.16)$$

и теплоёмкости при постоянном давлении:

$$c_p = \left( \frac{dq}{dT} \right)_{p=\text{const}}. \quad (2.17)$$

При этом  $c_p > c_v$ , а их разность  $c_p - c_v$  будет численно равна той работе расширения, которую 1 кг данного газа способен совершить при его нагревании на один кельвин.

### Вопросы для самоконтроля

1. Что такое теплоёмкость?
2. Какие удельные теплоёмкости вы знаете?
3. Зависит ли теплоёмкость от вида процесса, при котором происходит обмен теплотой между системой и внешней средой?
4. Что означает разность теплоёмкостей  $c_p - c_v$ ?

## 2.5. Соотношения между параметрами системы в зависимости от вида термодинамического процесса

Рассмотрим зависимость теплоёмкости от вида процесса.

1) **Изохорный процесс:**  $v = \text{const}$ . Тогда

$$dl = pdv = 0,$$

и из (2.9) следует, что  $dq_v = du$ , а с учетом (2.13)

$$du = c_v dT. \quad (2.18)$$

Если количество рабочего тела измерять не в килограммах, а молях, то для одного его моля будем иметь уравнение, аналогичное (2.13):

$$d\bar{u} = \bar{c}_v dT, \quad (2.19)$$

где внутренняя энергия одного моля рабочего тела с учётом (2.7) и (1.7) равна

$$\bar{u} = \frac{U}{\nu} = \frac{\bar{E}_k N}{\nu} = \frac{i}{2} k T N_A = \frac{i}{2} \bar{R} T,$$

откуда с учётом (2.19) получим

$$\frac{i}{2} R dT = \bar{c}_v dT$$

или

$$\bar{c}_v = \frac{i}{2} \bar{R}. \quad (2.20)$$

Таким образом, молярная удельная теплоёмкость  $\bar{c}_v$  при постоянном объёме определяется лишь числом степеней свободы  $i$  молекул рабочего тела.

Элементарная энтропия для данного процесса, согласно (2.14), равна

$$ds = \frac{dq_v}{T} = c_v \frac{dT}{T}.$$

Пусть переход системы из состояния 1 в состояние 2 происходит при постоянном объёме. Тогда из интегрирования последнего выражения можно найти изменение энтропии при изохорном процессе:

$$\Delta s = \int_1^2 c_v \frac{dT}{T} = c_v \int_1^2 \frac{dT}{T} = c_v (\ln T_2 - \ln T_1) = c_v \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (2.21)$$

Вывод этого результата сделан в предположении, что зависимость теплоёмкости  $c_v$  от температуры пренебрежимо мала. Из (2.21) следует, что при изохорном нагревании ( $T_2 > T_1$ ) энтропия возрастает, а при изохорном охлаждении ( $T_2 < T_1$ ) – убывает.

**2) Изобарный процесс:**  $p = \text{const}$ . Тогда из (2.9), (2.13) и (1.8) следует:

$$dq_p = du + pdv = c_v dT + pd \frac{RT}{p} = c_v dT + R dT.$$

С другой стороны, из (2.13) имеем

$$dq_p = c_p dT. \quad (2.22)$$

Поэтому

$$dq_p = c_p dT = c_v dT + R dT.$$

А из последнего равенства следует уравнение Майера:

$$c_p - c_v = R. \quad (2.23)$$

Это уравнение объясняет смысл удельной газовой постоянной. Ранее было отмечено, что разность  $c_p - c_v$  численно равна той работе расширения, которую 1 кг данного газа способен совершить при его нагревании на один кельвин. Поэтому величина  $R$  определяет величину этой работы. Чем больше данная величина, тем большую способность имеет газ для совершения механической работы при своём расширении. Ранее была вычислена (подразд. 1.2) удельная газовая постоянная для кислорода  $\left( R_{O_2} = 260 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right)$ .

Поскольку  $c = \bar{c}M$  и  $\bar{R} = RM$ , то после умножения левой и правой части уравнения Майера (2.23) на молярную массу  $M$  получим

$$\bar{c}_p - \bar{c}_v = \bar{R} = 8,314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}. \quad (2.24)$$

Следовательно, один моль любого газа при нагревании на один кельвин способен совершить работу, равную 8,314 Дж.

Из (2.23) и (2.20) следует, что и молярная удельная теплоёмкость  $\bar{c}_p$  при постоянном давлении также определяется лишь числом степеней свободы  $i$  молекул рабочего тела:

$$\bar{c}_p = \left( \frac{i}{2} + 1 \right) \bar{R}. \quad (2.25)$$

Элементарная энтропия для данного процесса, согласно (2.14), равна  $ds = \frac{dq_p}{T} = c_p \frac{dT}{T}$ . Рассмотрим случай, когда переход системы из состояния 1 в состояние 2 происходит при постоянном давлении. Тогда из интегрирования последнего выражения можно найти изменение энтропии при изобарном процессе:

$$\Delta s = \int_1^2 c_p \frac{dT}{T} = c_p \int_1^2 \frac{dT}{T} = c_p (\ln T_2 - \ln T_1) = c_p \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (2.26)$$

Вывод этого результата сделан в предположении, что зависимость теплоёмкости  $c_p$  от температуры пренебрежимо мала. Из (2.26) следует, что при изобарном нагревании ( $T_2 > T_1$ ) энтропия возрастает, а при изобарном охлаждении ( $T_2 < T_1$ ) – убывает.

3) **Изотермный процесс:**  $T = \text{const}$ . В этом случае  $du = c_v dT = 0$ , и с учётом (2.10) и (1.8)  $dq_T = pdv = RT \frac{dv}{v}$ . Пусть переход системы из состояния 1 в состояние 2 происходит при постоянной температуре. Тогда из интегрирования последнего выражения можно найти количество теплоты, получаемой при изотермном процессе:

$$\Delta q_T = RT \int_1^2 \frac{dv}{v} = RT \ln \frac{v_2}{v_1} = RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (2.27)$$

А изменение энтропии в этом процессе будет, соответственно, равно

$$\Delta s = \frac{\Delta q}{T} = R \ln \frac{v_2}{v_1} = R \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (2.28)$$

Отсюда следует, что энтропия при изотермном расширении возрастает, а при изотермном сжатии – уменьшается.

Как следует из вышеизложенного, величина  $dq_T \neq 0$ . Тогда теплоёмкость при постоянной температуре, согласно (2.12), будет равна

$$c_T = \left( \frac{dq}{dT} \right)_{T=\text{const}} = \frac{dq_T}{0} = \infty. \quad (2.29)$$

Следовательно, теплоёмкость изотермного процесса – бесконечно большая величина.

### Вопросы для самоконтроля и задания

1. Как изменяется энтропия при изохорном сжатии и изохорном расширении?
2. Как подсчитать теплоту изохорного процесса?
3. Как в изобарном процессе изменяется энтропия?
4. Каков смысл удельной газовой постоянной  $R$ ?
5. Напишите уравнение Майера.
6. Чем определяется величина молярных удельных теплоёмкостей  $\bar{c}_p$  и  $\bar{c}_v$  различных газов?
7. Чему равна теплоёмкость при изотермном процессе?

### 2.6. Изэнтропный (адиабатный) процесс в идеальном газе

Рассмотрим случай термодинамического процесса, когда между системой и внешней средой отсутствует тепловое взаимодействие, т.е.  $dq = 0$ .

Тогда из (2.10) следует

$$0 = du + pdv = c_v dT + \frac{RT}{v} dv$$

или

$$c_v \frac{dT}{T} = -R \frac{dv}{v}.$$

С учётом (2.23)

$$\frac{dT}{T} = -\frac{c_p - c_v}{c_v} \frac{dv}{v} = -(\gamma - 1) \frac{dv}{v}, \quad (2.30)$$

где  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  – показатель адиабаты.

Показатель адиабаты зависит от числа степеней свободы молекул рабочего тела. Эта зависимость вытекает из полученных ранее выражений (2.11), (2.19), (2.20):

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_p M}{c_v M} = \frac{\bar{c}_p}{\bar{c}_v} = \frac{\left( \frac{i}{2} + 1 \right) \bar{R}}{\frac{i}{2} \bar{R}} = 1 + \frac{2}{i}. \quad (2.31)$$

В частности, для одноатомного газа  $i = 3$  и  $\gamma = 1 + \frac{2}{3} \approx 1,67$ ; для двухатомного газа при обычных температурах  $i = 5$  и  $\gamma = 1 + \frac{2}{5} = 1,4$ ; для многоатомных газов при обычных температурах  $i = 6$  и  $\gamma = 1 + \frac{2}{6} \approx 1,33$ .

Зависимость показателя адиабаты и удельных теплоёмкостей от температуры носит опосредованный характер. Она объясняется размораживанием при высоких температурах степеней свободы колебательного движения, что ведёт к увеличению  $i$  – числа степеней свободы молекул.

Пусть переход системы из состояния 1 в состояние 2 происходит при отсутствии теплообмена с внешней средой. Тогда из интегрирования (2.30) получим

$$\int_1^2 \frac{dT}{T} = \ln \frac{T_2}{T_1} = -(\gamma - 1) \int_1^2 \frac{dv}{v} = \ln \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^{-(\gamma-1)},$$

т.е.

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{\gamma-1}. \quad (2.32)$$

С учётом (1.8)

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{RT_2}{RT_1} = \frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{\gamma-1},$$

откуда

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{\gamma}. \quad (2.33)$$

А из (2.32) и (2.33) имеем

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (2.34)$$

Термодинамический процесс, протекающий без теплообмена с внешней средой, называется *адиабатным*. Связь между параметрами начального и конечного состояния системы при адиабатном процессе определяется полученными выше уравнениями (2.32), (2.33), (2.34).

Из (2.32) также следует, что  $p_1 v_1^{\gamma} = p_2 v_2^{\gamma} = p v^{\gamma}$ , т.е.

$$p v^{\gamma} = \text{const}. \quad (2.35)$$

На  $p\nu$ -диаграмме эта кривая адиабатного процесса (её называют *адиабатой*) идёт круче изотермы ( $p\nu = \text{const}$ ), поскольку показатель адиабаты  $\gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1$ . Для воздуха  $\gamma = 1,4$ .

Вычислим работу адиабатного процесса  $1 \rightarrow 2$ :

$$l = \int_1^2 p d\nu = \int_1^2 \frac{p_1 \nu_1^\gamma}{\nu^\gamma} d\nu = p_1 \nu_1^\gamma \int_1^2 \nu^{-\gamma} d\nu = p_1 \nu_1^\gamma \frac{\nu_2^{-\gamma+1} - \nu_1^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}.$$

Откуда, согласно (1.8) и (2.31), имеем

$$l = \frac{RT_1}{\gamma-1} \left( 1 - \left( \frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^{\gamma-1} \right) = \frac{RT_1}{\gamma-1} \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right). \quad (2.36)$$

Поскольку в адиабатном процессе  $dq = 0$ , то изменение энтропии здесь  $ds = \frac{dq}{T} = 0$ , поэтому данный процесс называют также *изоэнтропным*.

Теплоёмкость этого процесса, согласно (2.12), будет равна

$$c = \frac{dq}{dT} = 0.$$

### Вопросы для самоконтроля и задания

1. Может ли показатель адиабаты быть меньше единицы?
2. Напишите уравнение адиабаты.
3. Какой вид на  $p\nu$ -диаграмме имеет кривая адиабаты?
4. Напишите уравнения связи параметров системы для адиабатного процесса.
5. Как меняется энтропия в адиабатном процессе?
6. Чему равна работа адиабатного процесса?
7. Почему адиабатный процесс называют ещё изоэнтропным?
8. Чему равна теплоёмкость при изотермном процессе?

### 2.7. Политропный процесс

Согласно экспериментальным данным многие процессы, протекающие в тепловых машинах, сохраняют (полностью или частично) постоянным выражение  $p\nu^n$ , где  $p$  – давление,  $\nu$  – удельный объём,  $n$  – некоторое действительное число, которое называют *показателем политропы*. Показатель политропы [2]

$$n = \frac{c - c_p}{c - c_v}, \quad (2.37)$$



где  $c, c_p, c_v$  – теплоёмкости соответственно политропного, изобарного и изохорного процессов.

Кривая на  $v p$ –диаграмме вида

$$p v^n = \text{const} \quad (2.38)$$

называется *политропой*, а термодинамический процесс, описываемый данным уравнением, называют *политропным процессом*.

Из (2.37) можно выразить  $c$  – теплоемкость политропного процесса

$$c = c_v \frac{n - \gamma}{n - 1}. \quad (2.39)$$

Из (2.38) и уравнения состояния идеального газа  $p v = R T$  определяются связи между параметрами состояния:

$$p_2 = p_1 \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^n, \quad T_2 = T_1 \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{n-1} = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}}. \quad (2.40)$$

Политропный процесс является обобщением всех ранее рассмотренных термодинамических процессов. При  $n = \gamma$  будем иметь  $p v^\gamma = \text{const}$ –адиабатный процесс, при  $n = 1$  получим  $p v = \text{const}$ – изотермный процесс, при  $n = 0$  имеем  $p = \text{const}$ – изобарный процесс, и, наконец, при  $n = \infty$  получается  $v = \text{const}$ – изохорный процесс.

Из (2.39) для адиабатного процесса ( $n = \gamma$ ) имеем теплоёмкость  $c = c_v \frac{\gamma - \gamma}{\gamma - 1} = 0$ , для изотермного ( $n = 1$ ) –  $c = c_v \frac{1 - \gamma}{1 - 1} = \infty$ , для изобарного ( $n = 0$ ) имеем теплоёмкость  $c = c_v \frac{0 - \gamma}{0 - 1} = c_v \gamma = c_p$  и для изохорного ( $n = \infty$ ) –  $c = c_v \frac{\infty - \gamma}{\infty - 1} = c_v$ .

Если рассматривать процессы, протекающие в режиме обычных температур, то показатель адиабаты и удельные теплоёмкости можно считать независимыми от температуры  $T$ . Тогда, интегрируя уравнение  $dq = c dT$ , получим теплоту политропного процесса

$$q = c(T_2 - T_1) = c_v \frac{n - \gamma}{n - 1} (T_2 - T_1). \quad (2.41)$$

Интегрируя (2.18), аналогично получим изменение внутренней энергии в данном процессе:

$$\Delta u = c_v (T_2 - T_1).$$

Поделим это уравнение на (2.41), получим

$$\Psi_u = \frac{\Delta u}{q} = \frac{n-1}{n-\gamma}, \quad (2.42)$$

где  $\Psi_u = \frac{\Delta u}{q}$  – так называемый *коэффициент разветвления теплоты*.

Он показывает долю теплоты, затраченную на изменение внутренней энергии рабочего тела. Заметим, что условие  $c_v = \text{const}$  имеет своим следствием также и постоянство коэффициента  $\Psi_u$ .

Тогда доля теплоты, затраченная на совершение системой работы, будет равна

$$\Psi_A = 1 - \Psi_u = 1 - \frac{n-1}{n-\gamma} = \frac{1-\gamma}{n-\gamma}. \quad (2.43)$$

По формулам (2.42) и (2.43) вычисляются доли теплоты, получаемой системой из внешней среды, которые идут на увеличение внутренней энергии и совершение системой механической работы для любых процессов, кроме адиабатного, поскольку в адиабатном процессе система теплоту из внешней среды не получает.

В частности, для изохорного процесса ( $n = \infty$ ) получим

$$\Psi_u = \frac{\Delta u}{q} = \frac{\infty-1}{\infty-\gamma} = 1, \quad \Psi_A = \frac{1-\gamma}{\infty-\gamma} = 0;$$

для изобарного процесса ( $n = 0$ ) коэффициент разветвления теплоты

$$\Psi_u = \frac{0-1}{0-k} = \frac{1}{k},$$

а доля теплоты на работу

$$\Psi_A = \frac{1-\gamma}{0-\gamma} = \frac{\gamma-1}{\gamma};$$

для изотермного процесса ( $n = 1$ ) эти коэффициенты

$$\Psi_u = \frac{1-1}{1-\gamma} = 0, \quad \Psi_A = \frac{1-\gamma}{1-\gamma} = 1.$$

### Вопросы для самоконтроля и задания

1. Напишите уравнение политропы.
2. При каком значении показателя политропы политропный процесс будет изотермным?
3. Как для политропного процесса  $1 \rightarrow 2$  с известными параметрами в начале процесса (в точке 1) вычислить параметры в любой другой точке этого процесса, если известен один из параметров в этой точке?
4. При каком значении показателя политропы политропный процесс будет изобарным?

5. При каком значении показателя политропы политропный процесс будет адиабатным?
6. Чему равна теплоёмкость политропного процесса?
7. Что определяет коэффициент разветвления теплоты?
8. Как определить долю теплоты термодинамического процесса, расходуемой системой на совершение механической работы?

### 2.8. Термический КПД и обратные циклы

Поскольку за один полный цикл  $\Delta U = 0$ , то работа цикла, согласно (2.24), осуществляется только за счёт тепловой энергии  $Q$ , получаемой извне. Она равна разности

$$Q = Q_1 - Q_2,$$

где  $Q_1$  – количество подведённой теплоты; а  $Q_2$  – количество отведённой теплоты.

Тогда работа цикла (рис. 2.5,б) равна

$$L_{\text{ц}} = Q_1 - Q_2, \quad (2.44)$$

где теплота  $Q_1$  пропорциональна площади криволинейной трапеции  $1^{\circ}1a22^{\circ}$  на  $sT$ -диаграмме (см. рис. 2.5,б), а отведённая теплота  $Q_2$  – площади  $1^{\circ}1b22^{\circ}$  и отрицательна по знаку.

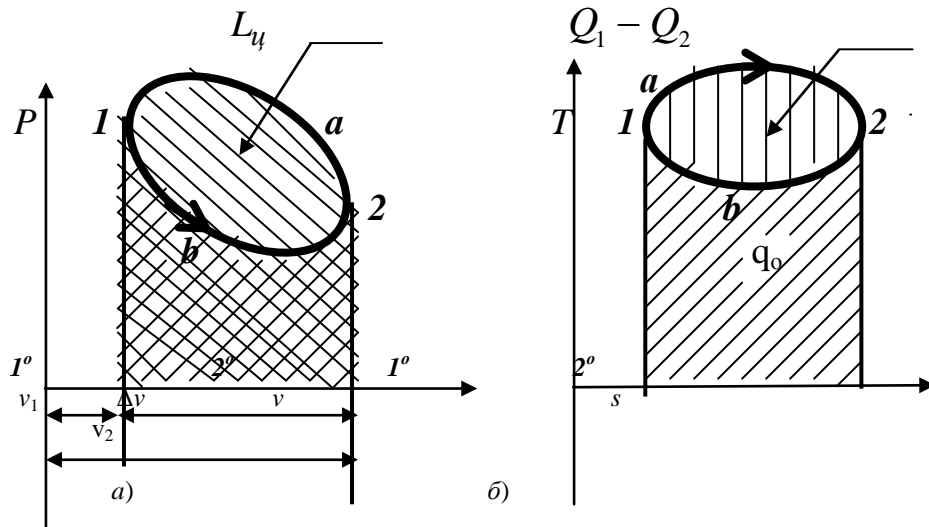


Рис. 2.5. Циклы: а) –  $vp$ -диаграмма обратного цикла; б) –  $sT$ -диаграмма прямого цикла

Термическим КПД называют отношение работы цикла к подведённой теплоте

$$\eta_t = \frac{L_{\text{ц}}}{Q_1}. \quad (2.44a)$$

Он показывает, какая доля подведённой теплоты превращается в работу цикла. Из последнего равенства следует

$$\eta_t = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (2.45)$$

Теперь рассмотрим обратный цикл  $1 \rightarrow b \rightarrow 2 \rightarrow a \rightarrow 1$  (рис. 2.5,а). В нём работа сжатия (площадь криволинейной трапеции  $2^\circ 2a11^\circ$ ) больше работы расширения (площади криволинейной трапеции  $1^\circ 1b22^\circ$ ).

Это значит, что для осуществления такого цикла (когда  $L_{\text{ц}} < 0$ ) необходимо затратить внешнюю работу. В холодильной установке эта работа тратится на отвод теплоты на низкотемпературном уровне. Здесь полезным эффектом является теплота  $Q_2$ , отводимая от объектов охлаждения в холодильной камере. Индекс 2 у этой теплоты ставится, чтобы подчеркнуть низкотемпературный уровень процесса теплоотвода. Отношение данной величины к затраченной работе называется *холодильным коэффициентом*

$$\xi = \frac{Q_2}{|L_{\text{ц}}|}.$$

Установки, в которых теплота  $Q_1$ , отдаваемая высокотемпературной среде, является полезным эффектом, называются *тепловыми насосами*. Для такой передачи теплоты (от более холодного тела к более горячему) также необходимо затратить внешнюю работу, равную абсолютному значению работы  $L_{\text{ц}}$  обратного цикла. Эффективность цикла теплового насоса характеризуется величиной отопительного коэффициента

$$\xi_T = \frac{Q_1}{|L_{\text{ц}}|}.$$

### Вопросы для самоконтроля и задания

1. Определите понятие термического КПД.
2. Какой знак имеет работа внешних сил, совершаемая над системой?
3. Какой знак имеет теплота, подводимая к системе?
4. Какой знак имеет теплота, отдаваемая системой во внешнюю среду?
5. Что в холодильной установке является затратной энергией, а что – положительным эффектом?
6. В каких тепловых машинах используется прямой цикл?
7. Какие тепловые машины называют тепловыми насосами?
8. В каких тепловых машинах используются обратные циклы?

## 2.9. Цикл Карно

В 1824 году С. Карно<sup>1</sup> предложил цикл, обеспечивающий самый высокий *термический КПД* в заданном температурном интервале. Этот цикл показан на рис. 2.6. Он состоит из двух изотерм и двух адиабат. Об этом цикле имеется фильм.

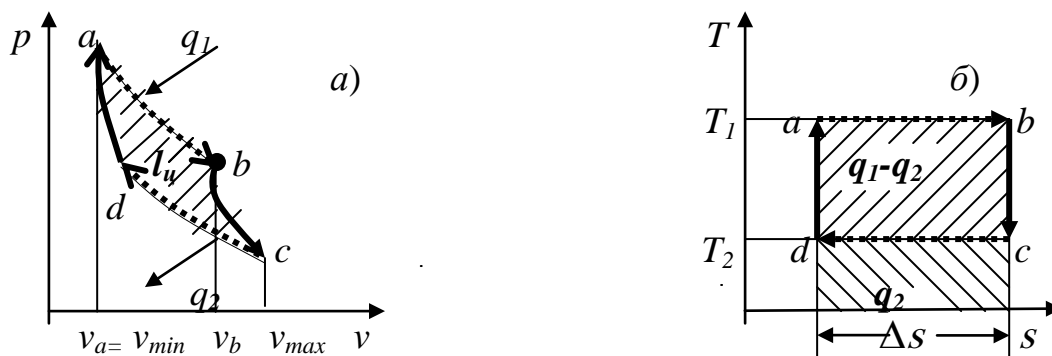
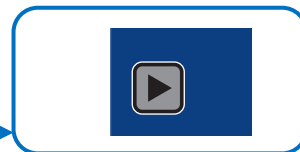


Рис. 2.6. Представления цикла Карно: а) – на  $vp$ -диаграмме; б) – на  $sT$ -диаграмме

Рассмотрим прямой цикл. В изотермном процессе  $a \rightarrow b$  к рабочему телу массой 1 кг при постоянной температуре  $T_1$  подводится теплота в количестве

$$q_1 = RT_1 \ln \frac{v_b}{v_a} = T_1 \Delta s. \quad (2.46)$$

В адиабатном процессе  $b \rightarrow c$  происходит расширение рабочего тела без теплообмена с внешней средой. Его внутренняя энергия уменьшается, а объём увеличивается до

$$v_c = v_{\max} = v_b \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (2.47)$$

Процесс  $c \rightarrow d$  изотермный – протекает при постоянной температуре  $T_2$ . В его ходе рабочее тело сжимается и отдаёт окружающей среде теплоту в количестве

$$q_2 = RT_2 \ln \frac{v_c}{v_d} = T_2 \Delta s. \quad (2.48)$$

<sup>1</sup> Никола Леонар Сади Карно (1796 – 1832) – французский физик и инженер, один из основателей термодинамики.

Из (2.46) и (2.48) следует, что  $R \ln \frac{v_b}{v_a} = \Delta s = R \ln \frac{v_c}{v_d}$ , то есть

$\frac{v_b}{v_a} = \frac{v_c}{v_d}$ . Это отношение называют *степенью изотермического сжатия (расширения)  $\varepsilon_T$* .

Поделим (2.54) на (2.52). Получим  $\frac{q_2}{q_1} = \frac{T_2}{T_1}$ , где  $q_2$  – количество отводимой теплоты, а  $q_1$  – количество подводимой теплоты. Тогда из (2.45) следует, что для цикла Карно термический КПД

$$\eta_t = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (2.49)$$

В уравнение (2.49) не входят характеристики конкретного рабочего тела. Это значит, что термический КПД цикла Карно не зависит от природы рабочего тела.

Теперь покажем, что цикл Карно действительно обеспечивает получение наибольшего КПД в заданном температурном интервале.

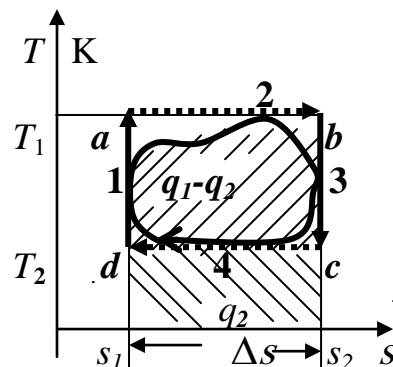


Рис. 2.7. Сравнение произвольного цикла с циклом Карно

На рис. 2.7 произвольный цикл  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$  в заданном интервале температур  $T_2 \leq T \leq T_1$  сопоставлен с циклом Карно  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$  для того же температурного интервала. Подведённая теплота  $q_1$  в произвольном цикле меньше, чем в цикле Карно на величину, пропорциональную сумме площадей, ограниченных контурами  $1a21$  и  $2b32$ . Теплота  $q_2$  в произвольном цикле, пропорциональная площади под процессом  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ , больше отведённой теплоты в цикле Карно, которая пропорциональна площади под процессом  $c \rightarrow d$ . Тогда из (2.45) следует, что термический КПД произвольного цикла меньше КПД цикла Карно.

**Пример 2.1.** Сравнить работы  $L_{ц1}$  и  $L_{ц2}$  двух циклов Карно, в которых подводится одинаковое количество теплоты  $Q_1 = 0,5 \text{ МДж}$  рабочему телу с массой  $m = 1 \text{ кг}$ , но температуры теплоподвода различны и составляют соответственно  $T_{11} = 600 \text{ К}$  и  $T_{12} = 1500 \text{ К}$ . Теплоотвод производится в обоих циклах при одинаковой температуре  $T_2 = 300 \text{ К}$ . Изобразить циклы на  $sT$ -диаграмме.

**Решение.** Из уравнений (2.44а) и (2.49)

$$L_{ц} = Q_1 \eta_t = Q_1 \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right).$$

Тогда

$$L_{ц1} = 0,5 \left( 1 - \frac{300}{600} \right) = 0,25 \text{ МДж}$$

и

$$L_{ц2} = 0,5 \left( 1 - \frac{300}{1500} \right) = 0,4 \text{ МДж}.$$

При построении циклов на  $sT$ -диаграмме необходимо выбрать  $\Delta s_1$  и  $\Delta s_2$  так, чтобы площади под изотермами  $a_1b_1$  и  $a_2b_2$  были одинаковыми (см. рис. 2.8), т.к.  $q_1 = q_2$ . Следовательно,

$$\Delta s_1 = \frac{q_1}{T_{11}} = \frac{Q_1}{m \cdot T_{11}} = \frac{5 \text{ кДж}}{1 \cdot 6 \text{ кг} \cdot \text{К}}, \quad \Delta s_2 = \frac{q_1}{T_{12}} = \frac{1 \text{ кДж}}{3 \text{ кг} \cdot \text{К}}.$$

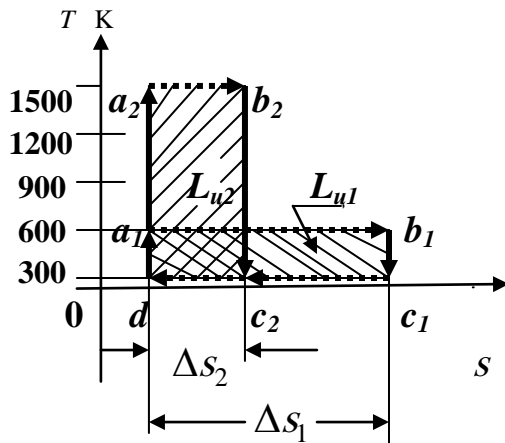


Рис. 2.8. Сопоставление работ  $L_{ц1}$  и  $L_{ц2}$

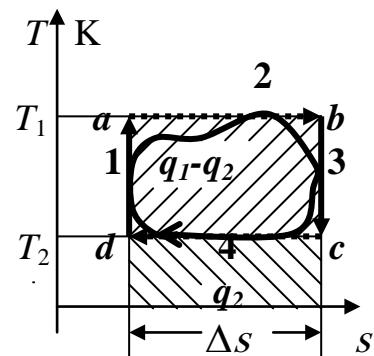


Рис. 2.9. Сравнение произвольного цикла с циклом Карно

По найденным величинам строим циклы на  $sT$ -диаграмме, которые здесь будут иметь вид прямоугольников с известными сторонами  $da_2 = 1500 \text{ К}$ ,  $dc_2 = \Delta s_2$  и  $da_1 = 600 \text{ К}$ ,  $dc_1 = \Delta s_1$ .

Теперь покажем, что цикл Карно действительно обеспечивает получение наибольшего КПД в заданном температурном интервале. На рис. 2.9 произвольный цикл  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$  в заданном интервале температур  $T_2 \leq T \leq T_1$  сопоставлен с циклом Карно  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$  для того же температурного интервала. Подведенная теплота  $q_1$  в произвольном цикле меньше, чем в цикле Карно, на величину, пропорциональную сумме площадей  $1 \rightarrow a \rightarrow 2 \rightarrow 1$  и  $2 \rightarrow b \rightarrow 3 \rightarrow 2$ . Теплота  $q_2$  в произвольном цикле, пропорциональная площади под процессом  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ , больше отведенной теплоты в цикле Карно, которая пропорциональна площади под процессом  $c \rightarrow d$ . Тогда из (2.45) следует, что термический КПД произвольного цикла меньше КПД цикла Карно.

**Пример 2.2.** Вычислить термический КПД для цикла Тринклера, составленного из следующих идеальных процессов (рис. 2.10).

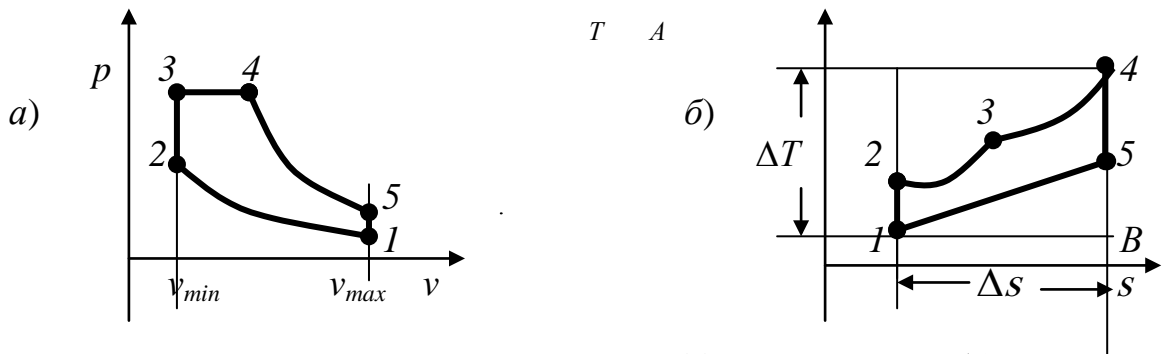


Рис. 2.10. Цикл Тринклера на  $pv$ - (а) и  $sT$ -диаграммах (б):  
 $1 \rightarrow 2$  – изоэнтропное сжатие;  $2 \rightarrow 3$  – изохорический подвод теплоты  $q_1^v$ ;  
 $3 \rightarrow 4$  – изобарный подвод теплоты  $q_1^p$ ;  $4 \rightarrow 5$  – изоэнтропное расширение  
(рабочий ход);  $5 \rightarrow 1$  – изохорный отвод теплоты  $q_2$  (выхлоп)

Температуры в узловых точках цикла известны:  $T_1=320$  К,  $T_2=1000$  К,  $T_3=1400$  К,  $T_4=2600$  К,  $T_5=1060$  К.

Вычислить количество подводимой  $q_1$  и отводимой  $q_2$  теплоты на 1 кг рабочего тела, для которого удельные теплоемкости принять равными

$$c_p = 1,01 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}; \quad c_v = 0,72 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}. \text{ Сравнить вычисленный КПД с}$$

термическим КПД цикла Карно для того же диапазона температур  $\Delta T$  (рис. 2.10,б).



**Решение.** В процессе  $2 \rightarrow 3$  осуществляется изохорический подвод теплоты, величину которой определим из выражения

$$q_1^v = c_v(T_3 - T_2).$$

В процессе  $3 \rightarrow 4$  (изобарный подвод теплоты)  $q_1^p = c_p(T_4 - T_3)$ .

Тогда подводимая теплота цикла

$$q_1 = q_1^v + q_1^p = c_v(T_3 - T_2) + q_1^p = c_p(T_4 - T_3) = 1500 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}.$$

При изохорном отводе теплоты (процесс  $5 \rightarrow 1$ )

$$q_2 = c_v(T_5 - T_1) \approx 532,8 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}} q_2.$$

Из уравнения (2.45) термический КПД цикла Тринклера будет равен

$$\eta_t = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{q_2}{q_1} = \frac{c_v(T_5 - T_1)}{c_v(T_3 - T_2) + c_p(T_4 - T_3)} = 1 - \frac{T_5 - T_1}{T_3 - T_2 + \frac{c_p}{c_v}(T_4 - T_3)} = \frac{1060 - 320}{1400 - 1000 + \frac{1,01}{0,72}(2600 - 1400)} \approx 0,645.$$

Теперь вычислим термический КПД цикла Карно для того же диапазона температур  $\Delta T = [T_1; T_4] = [320; 2600]$  К. Согласно (2.49) искомая величина

$$\eta_t = 1 - \frac{T_1}{T_4} = 1 - \frac{320}{2600} \approx 0,877.$$

Таким образом, термический КПД в цикле Тринклера существенно ниже, чем в цикле Карно для одного и того же температурного диапазона. На рис. 2.10,б цикл Карно изображен в виде контура прямоугольника  $1 \rightarrow A \rightarrow 4 \rightarrow B \rightarrow 1$ .

### Вопросы для самоконтроля

1. Что представляет собой цикл Карно, из каких процессов он состоит?
2. Чему равен термический КПД для цикла Карно?
3. Можно ли построить такой цикл, термический КПД которого в заданном интервале температур был выше, чем у цикла Карно?

## Глава 3. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

### 3.1. Обратимые и необратимые процессы

Если процесс протекает со скоростью, существенно меньшей скорости релаксации, то на любом этапе значения параметров системы будут успевать выравниваться. Такой процесс можно представить непрерывной последовательностью бесконечно близких друг к другу равновесных состояний. Такие процессы называют *квазистатическими* или *равновесными*.

Равновесный процесс может идти в направлении возрастания или убывания любого из параметров состояния системы, то есть как в одном, так и в противоположном направлении. При этом система будет проходить через те же промежуточные состояния, но в обратном порядке. Поэтому равновесные процессы называют ещё *обратимыми*.

Ту энергию, которую получает система извне в виде теплоты  $Q$ , она преобразует в работу  $A$  над внешней средой. Если теперь ту же работу  $A$  совершит внешняя среда над системой, то в обратимом процессе система вернёт внешней среде ту же самую теплоту  $Q$ , которую ранее от неё получила.

Таким образом, при течении в обратном направлении начальный процесс как бы «стирается», никаких «следов» от него не остаётся ни в системе, ни во внешней среде. Система возвращается в исходное состояние, а во внешней среде и системе отсутствуют какие-либо остаточные изменения. Это и есть отличительное свойство обратимого процесса.

Однако все реальные процессы необратимы. Возврат системы в исходное состояние возможен лишь при затрате дополнительной энергии. Но, к счастью, такие процессы можно моделировать как комбинации из обратимых процессов.

### 3.2. Формулировки второго закона термодинамики

Второй закон (начало) термодинамики связан с односторонней направленностью (необратимостью) всех естественных процессов, происходящих в термодинамических системах. Согласно Больцману его формулировка состоит в утверждении о том, что *природа стремится к переходу от менее вероятных состояний к более вероятным*. Данный закон называют ещё *законом возрастания энтропии* и формулируют в виде следующего принципа: *энтропия изолированной системы не может убывать*.

Никола Карно установил, что необходимым условием получения работы с помощью тепловых машин является наличие как минимум двух источников теплоты: горячего (верхнего) и холодного (нижнего). Данная необходимость объясняется тем, что теплота, полученная от верхнего источника, не может быть полностью превращена в механическую работу. Часть её должна быть обязательно отдана нижнему источнику теплоты.

Воображаемый тепловой двигатель, который обеспечивает стопроцентное превращение теплоты в работу, называют *perpetuum mobile второго рода*.

Имеют место ещё и такие формулировки второго начала термодинамики:

- 1) *perpetuum mobile* второго рода невозможен (Оствальд<sup>1</sup>);
- 2) невозможно создать периодически действующую тепловую машину, совершающую механическую работу только за счёт охлаждения теплового резервуара (Кельвин);
- 3) самопроизвольный переход теплоты от более холодных тел к более горячим невозможен (Клаузиус<sup>2</sup>).

Все приведённые выше формулировки различны по форме, но эквивалентны по содержанию, так как напрямую связаны с принципом возрастания энтропии в изолированных системах.

### 3.3. Математическая запись второго закона термодинамики

Для получения второго закона в математической форме представим элементарное изменение энтропии  $dS$  в виде суммы двух составляющих

$$dS = dS_e + dS_i, \quad (3.1)$$

где  $dS_e$  – изменение энтропии системы, связанное с её взаимодействием с внешней средой;  $dS_i$  – изменение, обусловленное протеканием внутри системы необратимых процессов (установлением внутреннего равновесия, релаксацией). В простых однородных системах – это процессы установления механического равновесия (выравнивание давления) и теплового (выравнивание температур).

Сначала рассмотрим неравновесную ( $dS_i \neq 0$ ) изолированную ( $dS_e = 0$ ) систему. Поскольку выравнивание давления происходит значительно быстрее выравнивания температур, можно допустить, что

---

<sup>1</sup> Вильгельм Оствальд (*Ostwald*, 1853 – 1932) – нем. химик и философ, лауреат Нобелевской премии по химии (1909).

<sup>2</sup> Рудольф Юлиус Эммануэль Клаузиус (*Rudolf Julius Emanuel Clausius*, 1822 – 1888) – немецкий физик, механик и математик.

неравновесность системы обусловлена лишь неравенством температур в её частях 1 и 2, то есть, положим, что  $T_1 < T_2$ .

Из свойства аддитивности функций состояния следует, что  $U = U_1 + U_2$  и  $S_i = S_1 + S_2$ . Тогда  $dU = dU_1 + dU_2$  и  $dS_i = dS_1 + dS_2$ , но для изолированной системы  $dU = 0$ , откуда  $dU_1 = -dU_2$  и

$$dS_i = \frac{dS_1}{dU_1} dU_1 + \frac{dS_2}{dU_2} dU_2 = \left( \frac{dS_1}{dU_1} - \frac{dS_2}{dU_2} \right) dU_1. \quad (3.2)$$

Поскольку между подсистемами 1 и 2 установлено механическое равновесие и протекает процесс выравнивания температур (теплообмен), то  $dU_1 = dQ_1$  и  $dU_2 = dQ_2$ , и согласно (2.21)

$dS_1 = \frac{dU_1}{T_1}$  и  $dS_2 = \frac{dU_2}{T_2}$ . Тогда из (2.57) получим

$$dS = dS_i = \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) dQ_1. \quad (3.3)$$

Если  $T_1 < T_2$ , то выражение в скобках будет положительным и знак  $dS$  будет совпадать со знаком  $dQ_1$ , а условие  $dS > 0$  будет означать, что теплота будет подводиться к менее нагретой подсистеме (подсистеме 1). При  $T_1 > T_2$  выражение в скобках станет отрицательным и элементарные изменения энтропии  $dS$  и теплоты  $dQ_1$  будут разных знаков. Тогда условие  $dS > 0$  будет означать, что более горячая подсистема 1 отдаёт тепло более холодной. В обоих случаях энтропия возрастает, а теплота передаётся от горячей подсистемы к холодной.

По мере приближения изолированной системы к состоянию равновесия возрастание (производство) энтропии будет замедляться, а при установлении равновесия и вовсе прекратится. В этот момент  $dS_i = 0$ , и энтропия достигнет своего максимального значения. Состояние равновесия соответствует максимальному значению энтропии при заданных значениях параметров  $U$  и  $V$  системы. Такое равновесие называют *истинным* или *устойчивым*.

Таким образом,  $dS_i \geq 0$ .

Теперь рассмотрим изменение энтропии за счёт теплообмена с внешней средой ( $dS_e \neq 0$ ). Для простоты предположим, что такой теплообмен происходит обратимо. Тогда  $dQ = TdS_e$  и, следовательно,

$$dS = dS_e + dS_i = \frac{dQ}{T} + dS_i,$$

откуда

$$dS \geq \frac{dQ}{T}, \quad (3.4)$$

так как  $dS_i \geq 0$ . Когда теплообмен прекратится,  $dQ = 0$  и

$$dS \geq 0. \quad (3.5)$$

В неравенствах (3.4) и (3.5) знак « > » соответствует необратимому процессу, а равенство – обратимому. Неравенство (3.4) является аналитическим выражением второго закона термодинамики.

#### **Вопросы для самоконтроля и задания**

1. Какие процессы называют равновесными?
2. Перечислите все условия, которые должны соблюдаться в обратимых процессах.
3. Зачем следует изучать обратимые процессы, если все реальные процессы необратимы?
4. Может ли энтропия убывать в процессах, протекающих в изолированных системах?
5. Если предположить, что самопроизвольно развивающийся процесс направлен в сторону уменьшения энтропии, будет ли он противоречить закону сохранения энергии?
6. Дайте основные формулировки второго закона термодинамики и опишите его аналитическим выражением.
7. Является ли второй закон термодинамики таким же универсальным законом природы, как и закон о сохранении и превращении энергии?

### **3.4. Моделирование необратимых процессов термодинамическими процессами идеального газа**

Поскольку энтропия является функцией состояния системы, то из вышесказанного следует, что при осуществлении какого-либо обратимого термодинамического процесса система перейдет в одно состояние, а при осуществлении того же, но необратимого процесса она окажется в другом состоянии с более высокой энтропией.

На  $sT$ -диаграмме (рис. 3.1) показаны обратимый  $1 \rightarrow 2_s$  и необратимый  $1 \rightarrow 2$  процессы адиабатного расширения. Эти процессы имеют одно и то же начальное состояние с параметрами  $p_1, T_1, s_1$  (точка 1 на диаграмме), но конечные состояния у них разные. У обратимого процесса это точка  $2_s$  (состояние с параметрами  $p_2, T_{2_s}, s_1$ ), а у необратимого – энтропия возрастёт  $s_2 > s_1$ , поэтому его конечная точка (точка 2 на диаграмме) сместится вправо, и при том же значении давления  $p_2$  (точки  $2_s$  и 2 лежат на одной и той же изобаре

$p = p_2$ ) температура  $T_2$  в рассматриваемом состоянии будет выше температуры  $T_{2s}$  (рис. 3.1).

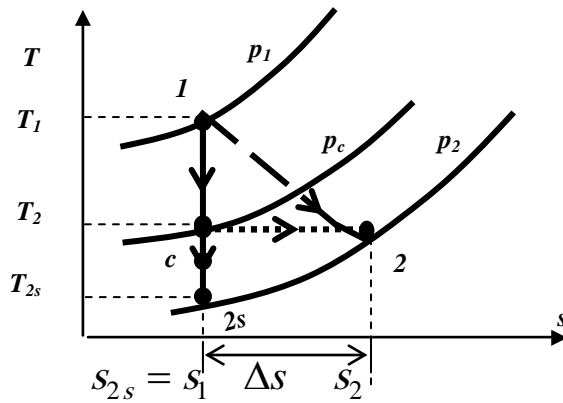


Рис. 3.1. Обратимый и необратимый изоэнтропные процессы

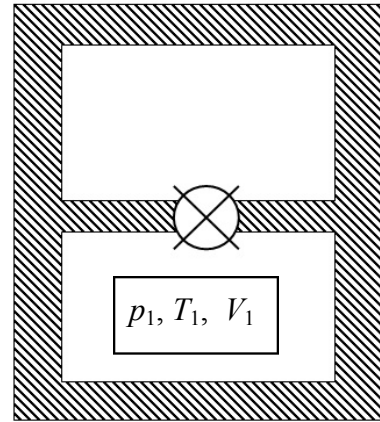


Рис. 3.2. Схема опыта Джоуля

Для изоэнтропного обратимого процесса  $1 \rightarrow 2s$  при  $c_v = \text{const}$  работа адиабатного расширения  $L = c_v(T_1 - T_{2s})$ . Однако вследствие трения фактическая работа расширения меньше и составляет  $L_\phi = c_v(T_1 - T_2)$ . Различие между  $T_{2s}$  и  $T_2$  связано с переходом работы трения в теплоту, воспринимаемую рабочим телом.

Для вычисления величины увеличения энтропии  $\Delta s = s_2 - s_1$  можно мысленно заменить необратимый процесс  $1 \rightarrow 2$  (на рис. 3.1 он представлен пунктирной линией) двумя обратимыми процессами:  $1 \rightarrow c$  и  $c \rightarrow 2$ . Процесс  $1 \rightarrow c$  изоэнтропный. Энтропия будет меняться лишь на участке  $c \rightarrow 2$ , который является обратимым изотермным процессом. Тогда из (2.28) получим

$$\Delta s = R \ln \frac{p_c}{p_2}. \quad (3.6)$$

Данный пример показывает возможность моделирования необратимого процесса двумя обратимыми.

### 3.5. Процесс расширения газа в опыте Джоуля

Классическим примером необратимого процесса является расширение газа в вакуум (опыт Джоуля). Пусть газ с параметрами  $p_1$  и  $T_1$  находится в объёме  $V_1$  нижней части теплоизолированного сосуда (рис. 3.2). Верхняя и нижняя части сосуда разделены

перегородкой. В верхней части вакуум. После открытия крана газ расширяется и быстро заполняет верхнюю часть.

В конце процесса давление газа в обеих частях сосуда станет одинаковым. Объём газа за счёт объёма верхней части сосуда увеличится до величины  $V_1 + V_2$ . Это расширение газа происходит внутри системы. Поэтому никакая внешняя работа не совершается. Теплообмен с окружающей средой также отсутствует, и, значит, по первому закону термодинамики внутренняя энергия газа будет оставаться постоянной. При этом для идеального газа не будет изменяться и его температура  $T_1$ . Но для изотермного процесса справедливо равенство (2.28), из которого следует

$$\Delta s = s_2 - s_1 = R \ln \frac{v_2}{v_1} = R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} > 0, \text{ так как } V_1 + V_2 > V_1.$$

То есть энтропия при расширении газа в вакуум возрастает. Процесс этот необратимый. Обратный ему процесс самопроизвольно (без вакуумного насоса) произойти не может. Создание вакуума в одной из частей сосуда требует затраты определенного количества внешней работы.

### 3.6. Процесс смешения газов

Другим примером необратимого процесса является смешение газов. Рассмотрим простейший случай смешения двух идеальных газов.

Пусть теперь в верхней части сосуда (см. рис. 3.2) находится один газ, а в его нижней части – другой при той же температуре и давлении, что и в верхней части сосуда. Если убрать перегородку, то произойдёт типично необратимый процесс диффузионного смешения газов с возрастанием энтропии системы.

Как и при расширении в вакуум, диффузионное смешение газов будет происходить в данном примере без теплообмена с окружающей средой  $dQ = 0$ . Работы изменения объёма здесь совершаться также не будет, поскольку общий объём газовой смеси будет оставаться постоянным.

Ниже рассмотрим этот процесс подробнее.

В результате броуновского движения происходит перемешивание молекул одного компонента с молекулами другого. Этот процесс необратим, поскольку самопроизвольное разделение молекул смеси на два чистых её компонента никогда не произойдёт.

Предположим, что до смешения компоненты имели одинаковую температуру  $T_1 = T_2$  и находились под одним и тем же давлением

$p_1 = p_2$ . После смешения температура смеси будет равна температуре компонентов  $T = T_1 = T_2$ , но давление компонента теперь будет равно его парциальному давлению, а по закону Дальтона<sup>1</sup> давление смеси  $p = p_1 + p_2 = 2p_1$ . При этом изменение удельной энтропии смеси будет равно

$$\Delta s = R_1 g_1 \ln \frac{p}{p_1} + R_2 g_2 \ln \frac{p}{p_2} = (R_1 g_1 + R_2 g_2) \ln 2 > 0$$

или

$$\Delta s = \bar{R} \left( \frac{g_1}{M_1} + \frac{g_2}{M_2} \right) \ln 2 > 0. \quad (3.7)$$

Здесь  $R_1, R_2$  – удельные газовые постоянные,  $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ ;  $M_1, M_2$  – молярные массы,  $\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ ;  $\bar{R} = 8314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ ;  $g_1, g_2$  – массовые доли первого и второго компонентов соответственно ( $g_1 + g_2 = 1$ ). Из полученного результата следует, что процесс самопроизвольного смешения газов (диффузия) сопровождается ростом энтропии.

### Вопросы для самоконтроля

1. Является ли адиабатный необратимый процесс изоэнтропным?
2. Как рассчитать параметры реального (необратимого) процесса?
3. Почему при расширении газа в вакуум в опыте Джоуля его внутренняя энергия остается постоянной?
4. Смешивается азот с кислородом в пропорции по объёму пять к одному, и в той же пропорции смешивается азот с углекислым газом. При каком смешении изменение удельной энтропии будет больше?

---

<sup>1</sup> Джон Дальтон (1766 – 1844) – английский провинциальный учитель-самоучка, химик, метеоролог и естествоиспытатель. Он впервые (1794) провёл исследования и описал дефект зрения, которым страдал сам, — цветовая слепота, позже названный в его честь дальтонизмом; открыл закон парциальных давлений (закон Дальтона) (1801). Профессор Манчестерского колледжа Оксфордского университета (1793), член Французской академии наук (1816), президент Манчестерского литературного и философского общества (с 1817), член Лондонского королевского общества (1822) и королевского общества Эдинбурга (1835), лауреат королевской медали (1826).



## Глава 4. ТЕРМОДИНАМИКА РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ. ВОДЯНОЙ ПАР

### 4.1. Уравнение Ван-дер-Ваальса

В реальных газах при высоких давлениях и низких температурах существенно начинают сказываться силы взаимодействия между молекулами и конечность объёма молекулы.

Конкретная связь параметров реального газа, согласно современным представлениям, для одного килограмма рабочего тела описывается следующим уравнением:

$$\frac{pv}{RT} = z, \quad (4.1)$$

где  $R$  – удельная (индивидуальная) газовая постоянная,  $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ ;  $z$  – безразмерный коэффициент, который называют *коэффициентом сжимаемости*.

Коэффициент сжимаемости в общем случае является функцией температуры и плотности, которая разлагается в степенной ряд по степеням плотности

$$z = 1 + B\rho + C\rho^2 + D\rho^3 + \dots, \quad (4.2)$$

где  $B, C, D, \dots$  – *вириальные коэффициенты*, которые для конкретного газа являются функциями одной лишь температуры.

Коэффициент сжимаемости можно рассматривать для конкретного газа и как функцию одного лишь давления. При низких давлениях ( $p \rightarrow 0$ ) коэффициент сжимаемости  $z \rightarrow 1$ .

Газ, для которого  $z = 1$  при любых давлениях и температурах, будет являться *идеальным*, т.к. уравнение состояния (4.1) при  $z = 1$  переходит в уравнение Клапейрона (1.8).

В 1873 году Ван-дер-Ваальс<sup>1</sup> предложил простое уравнение для неидеального газа

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT. \quad (4.3)$$

В отличие от уравнения Клапейрона (1.8) в (4.3) имеются две поправки. Поправка  $\frac{a}{v^2}$  учитывает уменьшение давления, обусловленное взаимным притяжением молекул. Поправка  $b$  учитывает конечный объём молекул и силы отталкивания, возникающие между ними.

---

<sup>1</sup> Ян Дидерик Ван-дер-Ваальс (1837 – 1923) – нидерландский физик, нобелевский лауреат 1910 года.

Уравнение (4.3) разрешается относительно  $p = p(v, T)$  в виде

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2}. \quad (4.3a)$$

Численные значения постоянных  $a, b, R$  уравнения Ван-дер-Ваальса можно вычислить через критические параметры вещества  $p_k, v_k, T_k$ , которые определяются экспериментально. В табл. 4.1 представлены эти экспериментальные данные для некоторых веществ.

Таблица 4.1

**Критические параметры веществ**

Вещество	H <sub>2</sub> O	N <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	CO	CO <sub>2</sub>
$p_k$ , МПа	22,060	3,400	5,043	1,32	3,500	7,383
$v_k$ , м <sup>3</sup> /кк	3,06	3,194	2,300	33,50	3,325	2,136
$T_k$ , К	647,1	126,2	154,58	32,20	132,90	304,2
$z_k = \frac{p_k v_k}{RT_k}$	0,229	0,290	0,290	0,320	0,295	0,274

Уравнение Ван-дер-Ваальса является уравнением 3-й степени относительно  $v$  и при различных постоянных значениях  $p$  и  $T$  может иметь либо один, либо три вещественных корня. Поэтому *изотермы Ван-дер-Ваальса* на  $pv$ -диаграмме качественно различны (рис. 4.1).

#### 4.2. Анализ изотерм Ван-дер-Ваальса

При высоких температурах  $T_1, T_2, T_3$ , которые выше критической  $T_k$ , изотермы являются монотонно убывающими функциями. Чем выше температура, тем ближе такая кривая к гиперболе (изотерме идеального газа). Такие кривые имеют только одну точку пересечения с прямыми  $p = \text{const}$ . Здесь уравнение (4.3) при  $p = \text{const}$  и  $T = \text{const} < T_k$  становится кубическим уравнением относительно неизвестной  $v$ , у которого будет только один действительный корень.

При температурах  $T_4, T_5$ , которые ниже критической  $T_k$ , изотермы уже не будут монотонно убывающими функциями. Их графики изгибаются, образуя волнообразный участок с одним локальным минимумом (на рис. 4.1 для изотермы  $T_5$  этот минимум отмечен точкой  $e$ ) и одним локальным максимумом (на рис. 4.1 для изотермы  $T_5$  это точка  $d$ ). Докритические изотермы с горизонтальными прямыми  $p = \text{const}$  могут иметь уже три точки пересечения.

При этом уравнение Ван-дер-Ваальса при  $p = \text{const}$  и  $T = \text{const} < T_k$  будет иметь уже три действительных корня для неизвестной величины  $v$ . Например, изотерма  $T_5$  (см. рис. 4.1) с прямой  $p_5 = \text{const}$  пересекается в точках  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Следовательно, неизвестная  $v$  будет иметь сразу три действительных корня:  $v_1 = a$ ,  $v_2 = b$  и  $v_3 = c$ .

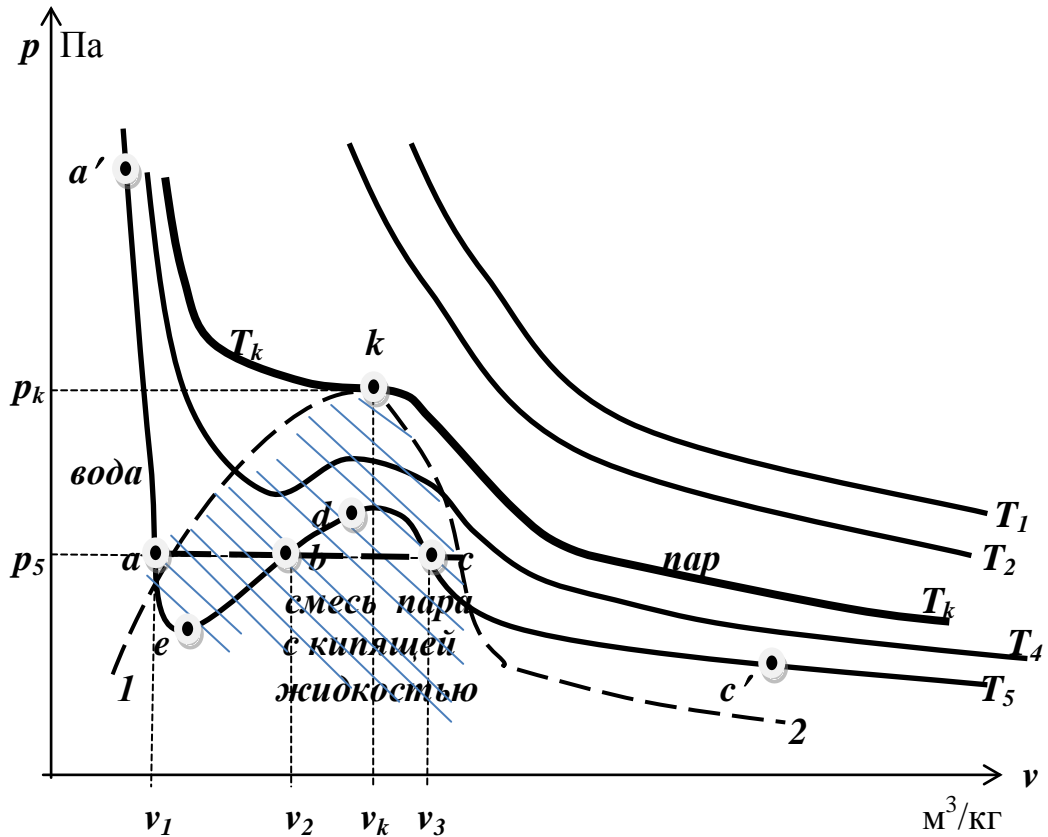


Рис. 4.1. Изотермы Ван-дер-Ваальса:  $T_1 > T_2 > T_3 > T_k > T_4 > T_5$

Между минимумом и максимумом волнообразного участка любой докритической изотермы величина  $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T > 0$ . Однако рост давления с увеличением удельного объема физически не возможен. Эксперимент показывает, что волнообразный участок  $aebdc$  докритической изотермы в реальности будет являться отрезком  $ac$  прямой, параллельной оси абсцисс. На этом участке вещество не может оставаться в виде гомогенной среды и распадается на две фазы: жидкую и газообразную. Этот распад идет при постоянном давлении

(по прямой  $p = \text{const}$ ), то есть отрезок  $ac$  одновременно является частью изобары и изотермы.

Положение этой прямой (изотермы-изобары) определяется правилом Максвелла<sup>1</sup>, согласно которому площади фигур  $aeba$  и  $bdc b$  (см. рис. 4.1) должны быть равны друг другу.

Следовательно, реальная изотерма будет иметь вид ломаной  $a'acc'$ . Её левая ветвь  $a'a$ , круто спадающая вниз, соответствует жидкому состоянию вещества, а правая пологая ветвь  $cc'$  – газообразному. Переход вещества из жидкого в газообразное состояние и обратно происходит по прямому отрезку  $abc$ . Границы двухфазной области на рис. 4.1 показаны пунктирными линиями 1 и 2. Пограничная кривая 1 есть геометрическое место точек начал кипения жидкости и отделяет жидкую фазу от двухфазной области, а пограничная кривая 2 отделяет двухфазную область от газообразной. Эти пограничные кривые имеют общую верхнюю точку  $k$ , через которую проходит изотерма с температурой  $T_k$ .

Волнообразный участок (для изотермы  $T_5$  – это участок  $aebdc$ ) по мере увеличения докритической температуры будет уменьшаться, а по достижении  $T_k$  сольется в точку  $k$ . Это и будет та критическая точка, в которой критические параметры конкретного вещества  $p_k, v_k, T_k$  могут быть определены экспериментально.

### 4.3. Определение параметров уравнения Ван-дер-Ваальса

Для критической изотермы  $T_k$  точка  $k$  является точкой перегиба. Следовательно, в этой точке должны обращаться в нуль первая и вторая производные от функции  $p = p(v)$ , явный вид которой представлен уравнением Ван-дер-Ваальса (4.3а). Найдём эти производные и приравняем их к нулю.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{T_k} = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{RT_k}{v-b} - \frac{a}{v^2} \right) = -\frac{RT_k}{(v_k-b)^2} + \frac{2a}{v_k^3} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_{T_k} = \frac{\partial}{\partial v} \left( -\frac{RT_k}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3} \right) = \frac{2RT_k}{(v_k-b)^3} - \frac{6a}{v_k^4} = 0.$$

Откуда получаются следующие два уравнения:

<sup>1</sup> Джеймс Клерк Максвелл (1831 – 1879) – английский физик, создатель классической электродинамики (знаменитые уравнения Максвелла), один из основоположников статистической физики (распределение Максвелла).

$$\frac{RT_k}{(v_k - b)^2} = \frac{2a}{v_k^3} \text{ и } \frac{2RT_k}{(v_k - b)^3} = \frac{6a}{v_k^4}. \quad (4.4)$$

Поделим второе из уравнений (4.4) на первое, получим

$$\frac{2}{(v_k - b)} = \frac{3}{v_k^4} \text{ или } b = \frac{v_k}{3}.$$

Тогда

$$a = \frac{v_k^3}{2} \frac{RT_k}{(v_k - b)^2} = \frac{v_k^3}{2} \frac{\left(p_k + \frac{a}{v_k^2}\right)(v_k - b)}{(v_k - b)^2} = \frac{v_k^3}{2} \frac{\left(p_k + \frac{a}{v_k^2}\right)}{\left(v_k - \frac{v_k}{3}\right)}.$$

Откуда

$$a = 3v_k^2 p_k.$$

Подставим найденные выражения для параметров  $a$  и  $b$  в первое уравнение из (4.4) и разрешим его относительно газовой постоянной  $R$ . Получим

$$R = \frac{2a(v_k - b)^2}{T_k v_k^3} = \frac{6v_k^2 p_k}{T_k v_k^3} \cdot \left(\frac{2}{3}v_k\right)^2 = \frac{8}{3} \cdot \frac{p_k v_k}{T_k}.$$

Таким образом, все параметры уравнения Ван-дер-Ваальса выражены через параметры состояния для критической точки

$$a = 3v_k^2 p_k, \quad b = \frac{v_k}{3}, \quad R = \frac{8}{3} \cdot \frac{p_k v_k}{T_k}. \quad (4.5)$$

На диаграмме (см. рис. 4.1) можно проследить процесс получения пара из воды. Этот процесс состоит из трех этапов и проходит при постоянном давлении  $p_5 = \text{const}$ .

На первом этапе идёт подогрев воды до температуры  $T_5$  кипения при заданном постоянном давлении  $p_5$ , что соответствует участку прямой  $p_5 = \text{const}$  левее точки  $a$ . При нагревании вода расширяется незначительно, поэтому изотермы на этом участке крутые.

Второй этап – собственно парообразование, превращение кипящей воды в пар (отрезок  $ac$  прямой  $p_5 = \text{const}$ ). Это изобарно-изотермный процесс, в котором вся теплота, получаемая кипящей водой, идёт на работу резкого расширения при превращении жидкости в газ, а температура не повышается. В точке  $c$  вся вода перейдёт в состояние насыщенного пара.

Третий этап – перегрев насыщенного пара. Состояние насыщенного пара при температуре кипения неустойчиво. Небольшое охлаждение или незначительное повышение внешнего давления могут вызвать процесс, обратный парообразованию, – конденсацию. Для транспортировки, бытового и промышленного использования такой пар не пригоден. Его следует перегреть – нагреть до температуры, существенно превышающей температуру кипения. Этот этап соответствует участку прямой  $p_5 = \text{const}$ , находящийся справа от точки  $c$  (см. рис. 4.1).

Следует отметить, что уравнение Ван-дер-Ваальса описывает поведение реальных веществ лишь качественно и для точных расчетов в широком диапазоне изменения параметров не пригодно. В частности, из (4.1) с учетом последнего равенства из (4.5) коэффициент сжимаемости в критической точке

$$z_k = \frac{p_k v_k}{RT_k} = \frac{p_k v_k}{\left(\frac{8}{3} \frac{p_k v_k}{T_k}\right) T_k} = \frac{3}{8} = 0,375,$$

что существенно отличается от экспериментальных значений этого коэффициента для реальных веществ, которые приведены в табл.4.1.

**Пример 4.1.** Представить уравнение Ван-дер-Ваальса в форме разложения коэффициента сжимаемости в бесконечный ряд (4.2) по степеням плотности.

**Решение.** Разделим (4.3а) на  $\frac{RT}{v}$  и от удельного объема

иперейдем к плотности  $\rho = \frac{1}{v}$ . Тогда левая часть полученного равенства даст коэффициент изотермической сжимаемости  $Z$ , а в правой части выполним очевидные преобразования

$$z = \frac{pv}{RT} = \frac{1}{\rho \left(\frac{1}{\rho} - b\right)} - \frac{a\rho}{RT} = \frac{1}{1 - b\rho} - \frac{a}{RT} \rho.$$

Величина  $\frac{1}{1 - b\rho}$  является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем  $b\rho$  и начальным членом  $a_1 = 1$ . Поэтому

$$\frac{1}{1 - b\rho} = 1 + b\rho + b^2 \rho^2 + b^3 \rho^3 + \dots,$$

то есть

$$z = 1 + \left( b - \frac{a}{RT} \right) \rho + b^2 \rho^2 + b^3 \rho^3 + \dots$$

Здесь вириальные коэффициенты разложения (4.2) определились через параметры уравнения Ван-дер-Ваальса:  $B = b - \frac{a}{RT}$ ,  $C = b^2$ ,  $D = b^3$  и т.д.

### Вопросы для самоконтроля

1. Какие поправки используются в уравнении Ван-дер-Ваальса и какие особенности реального газа они учитывают?
2. Какая изотерма Ван-дер-Ваальса называется критической?
3. Чем отличаются докритические изотермы от изотерм при температурах выше критической?
4. Чем объяснить, что волновой участок докритической изотермы не реален, и его следует заменить отрезком, который одновременно является и частью изобары, и частью изотермы?
5. Какой особенностью обладает точка  $k$  критической изотермы и как её можно использовать для определения параметров  $R$ ,  $a$  и  $b$  уравнения состояния (4.3)?

### 4.4. Приведенные параметры, $\pi\varphi$ - и $\pi z$ -диаграммы

В (4.3) подставим найденные значения параметров  $a, b$  и  $R$  из

(4.5) и полученное равенство поделим на  $\frac{p_k v_k}{3}$ . Тогда

$$\left( p + \frac{3v_k^2 p_k}{v^2} \right) \left( v - \frac{v_k}{3} \right) \frac{3}{p_k v_k} = 8 \frac{T}{T_k}$$

или

$$\left( \frac{p}{p_k} + \frac{3v_k^2}{v^2} \right) \cdot \left( 3 \frac{v}{v_k} - 1 \right) = 8 \frac{T}{T_k}.$$

Введем обозначения:

$\pi = \frac{p}{p_k}$  – *приведенное давление* (давление, отнесенное к критическому);

$\varphi = \frac{v}{v_k}$  – *приведенный удельный объем*;

$$\tau = \frac{T}{T_k} - \text{приведенная температура.}$$

Тогда в этих приведенных параметрах последнее уравнение будет иметь вид

$$\left( \pi + \frac{3}{\varphi^2} \right) \cdot (3\varphi - 1) = 8\tau. \quad (4.6)$$

Полученное равенство является уравнением Ван-дер-Ваальса в безразмерном виде. Оно не содержит констант, зависящих от природы конкретного вещества. Поэтому уравнение (4.6) может быть применено к любому веществу, в том числе, и к малоизученному.

Согласно сформулированному Ван-дер-Ваальсом *закону соответственных состояний*, если два сравниваемых газа имеют два одинаковых приведенных параметра, то у них будет одинаковым и третий параметр. Газы, для которых этот закон выполняется, называются *термодинамически подобными*. Для таких газов по уравнению (4.6) можно построить единую  $\pi\varphi$ -диаграмму и с ее помощью определять недостающие параметры малоизученных газов, для которых опытным путем найдены параметры критической точки.

**Пример 4.2.** Чему должна равняться приведенная температура  $\tau$ , чтобы вириальный коэффициент  $B$  разложения коэффициента сжимаемости  $z$  по степеням плотности для газа, состояние которого описывается уравнением Ван-дер-Ваальса, равнялся нулю?

**Решение.** Из решения примера 4.1 имеем, что  $B = b - \frac{a}{RT}$ .

Приравнивая этот вириальный коэффициент к нулю и избавляясь от параметров  $a, b$  и  $R$  с помощью равенств (4.5), получим

$$\frac{v_k}{3} - \frac{3v_k^2 p_k}{8 \cdot \frac{p_k v_k}{T_k} \cdot T} = 0,$$

откуда

$$\tau = \frac{T}{T_k} = \frac{27}{8} = 3,375.$$

Ввиду отмеченной ранее непригодности уравнения Ван-дер-Ваальса для точных вычислений значений недостающих параметров малоизученных газов с целью увеличения точности этих расчетов с помощью метода термодинамического подобия было предложено строить общие  $\pi\varphi$ -диаграммы для групп веществ, имеющих близкие



значения  $z_k$ . Экспериментально было установлено, что метод термодинамического подобия дает более точные результаты при использовании  $\pi z$ -диаграммы, построенной на основе опытных данных (рис. 4.2).

Эта диаграмма представляет собой построенные безразмерные изотермы ( $\tau = \text{const}$ ) в координатах приведенного давления  $\pi$  и коэффициента сжимаемости  $z$ . Эти изотермы пересекаются здесь с *изохорами идеального приведенного объема* –  $v'_r = \frac{p_k v}{RT_k} = \text{const}$ .

Введенный здесь новый параметр  $v'_r$  (идеальный приведенный объем) позволяет отказаться от использования величины  $v_k$ , которая экспериментально определяется с наибольшей погрешностью.

Пользоваться  $\pi z$ -диаграммой можно следующим образом. Если для некоторого малоизученного вещества известны критические параметры  $p_k$  и  $T_k$  и требуется найти его удельный объем при заданных значениях  $p$  и  $T$ , то после подсчета значений  $\pi$  и  $\tau$  на линии  $\tau = \text{const}$  находят точку пересечения с вертикальной прямой  $\pi = \text{const}$  и на оси ординат читают соответствующее этой точке значение  $z$ .

Удельный объем  $v$  теперь можно определить из равенства (4.1). В том случае, когда вместо  $p$  и  $T$  заданы  $p$  и  $v$  (или  $v$  и  $T$ ), сначала вычисляют величину  $v'_r = \frac{p_k v}{RT_k}$ , а также  $\pi = \frac{p}{p_k}$  (или  $\tau = \frac{T}{T_k}$ ), находят точку пересечения найденной изохоры  $v'_r = \text{const}$  с найденной вертикальной прямой  $\pi = \text{const}$  (изотермой  $\tau = \text{const}$ ) и на оси ординат находят отвечающее этой точке пересечения значение  $z$ , а затем по (4.1) вычисляют искомое значение соответствующего параметра.

**Пример 4.3.** В сосуде объемом  $0,25 \text{ м}^3$  при температуре  $320 \text{ К}$  содержится  $26,824 \text{ кг}$  углекислого газа, для которого молярная масса

$$\mu_{\text{CO}_2} = 44 \frac{\text{кг}}{\text{кмоль}}; \text{ параметры критической точки } p_k = 7,38 \text{ МПа};$$

$T_k = 304 \text{ К}$ . В этих условиях эксперимент дает абсолютное давление  $p = 5 \text{ МПа}$ . Определить абсолютное давление по уравнению состояния идеального газа и с помощью  $\pi z$ -диаграммы.

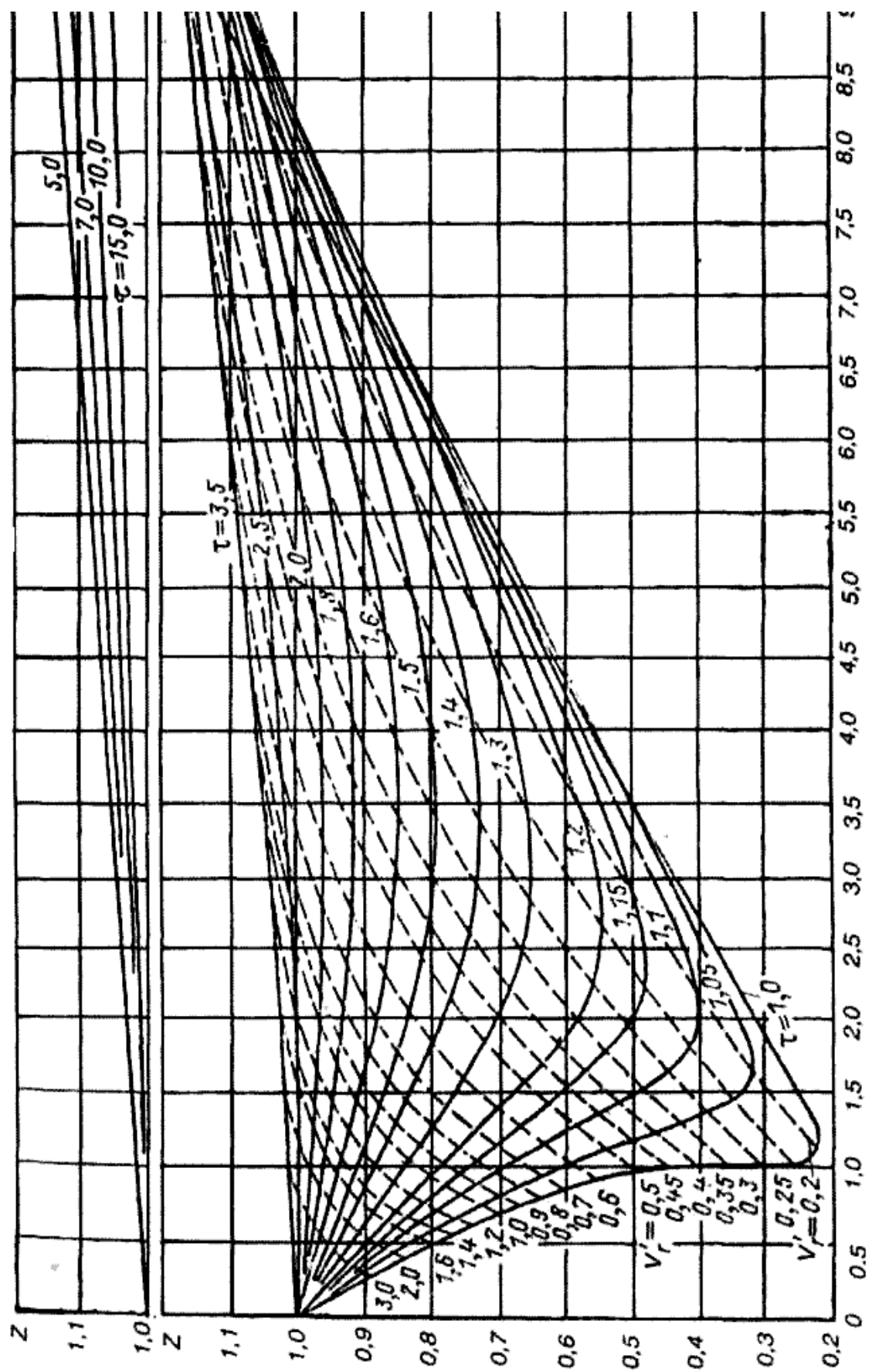


Рис. 4.2.  $\pi z$  - диаграмма

**Решение.** Из уравнения состояния идеального газа  $p = \frac{MRT}{V}$ ,

где  $R = \frac{8,314}{\mu_{CO_2}} = \frac{8,314}{44} \approx 0,189 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ .

Тогда искомое значение давления

$$p = \frac{26,824 \cdot 0,189 \cdot 320}{0,25} \approx 6,49 \text{ МПа},$$

что почти на 30 % выше результатов эксперимента.

Для определения этого давления с помощью  $\pi$ -диаграммы вычислим значение идеального приведенного объема  $v'_r$  и приведенной температуры  $\tau$ :

$$v'_r = \frac{p_k V}{MRT_k} = \frac{7,38 \cdot 10^3 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3} \cdot 0,25 \text{ м}^3}{26,824 \text{ кг} \cdot 0,189 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 320 \text{ К}} \approx 1,2;$$
$$\tau = \frac{T}{T_k} = \frac{320 \text{ К}}{304 \text{ К}} \approx 1,05.$$

Точке пересечения изохоры  $v'_r = 1,2$  с изотермой  $\tau = 1,05$  соответствует (см. рис. 1.2) точка абсцисс  $\pi = 0,69$ . Тогда искомое давление

$$p = \pi \cdot p_k = 0,69 \cdot 7,38 \text{ МПа} \approx 5,07 \text{ МПа}.$$

Данный результат отличается от экспериментального уже только на 1,4 %.

### Вопросы для самоконтроля и задания

1. Для каких веществ может быть использована безразмерная форма записи (4.6) уравнения Ван-дер-Ваальса?
2. В каких единицах измеряются приведенные параметры  $\pi, \tau, \varphi, v'_r$ ?
3. Изложите основную суть метода термодинамического подобия.
4. Объясните, как с помощью  $\pi$ -диаграммы можно определять значения различных параметров состояния реальных газов.
5. Что такое идеальный приведенный объем  $v'_r$  и для чего он нужен?
6. В примере 4.3 вычислите погрешность метода термодинамического подобия при определении температуры  $T = 320 \text{ К}$ .

#### 4.5. Физика процесса парообразования

Пар может быть насыщенным или перегретым. Если пар находится в состоянии динамического равновесия с водой (то есть когда над поверхностью воды приток и убыль молекул пара компенсируют друг друга), то такой пар называется *насыщенным*. Состояние такого равновесия наступает при определенном сочетании его температуры и давления  $(T_s, p_s)$ . Давление насыщения  $p_s$  (этот параметр называют еще *упругостью насыщенного пара*) возрастает с увеличением  $T_s$  (*температуры насыщения*) по экспоненциальному закону  $p_s \sim e^{T_s}$ . Например, при  $T_s = 298,15$  К (+25 °С)  $p_s = 3,166$  кПа, а при  $T_s = 343,15$  К (+70 °С),  $p_s = 31,66$  кПа.

Пар образуется двумя способами: а) путем испарения с поверхности воды, б) в результате парообразования во всем объеме жидкости при ее кипении.

В первом случае  $p_s$  обычно намного меньше давления окружающей среды. Пар распространяется в окружающем пространстве в результате его диффузии в воздух. Новые порции жидкости испаряются лишь по мере удаления от поверхности воды ранее образовавшихся молекул пара. На скорость испарения здесь существенное влияние оказывает интенсивность движения воздуха у поверхности жидкости.

Во втором случае нагретая до температуры кипения жидкость будет испаряться не только с поверхности, но и по всему объему. В толще воды начнут образовываться пузырьки пара. Ввиду того, что плотность воды много больше плотности пара (при 100 °С пар в 1600 раз легче воды), пузырьки пара начнут всплывать, увеличиваясь в объеме по мере поступления в их внутреннее пространство новых порций молекул пара.

От начала кипения до полного выкипания жидкости ей необходимо передать строго определенное количество теплоты. Моменту окончания парообразования соответствует состояние *сухого насыщенного пара*.

Количество теплоты  $q_{п}$ , которое необходимо передать 1 кг нагретой до температуры кипения воды для ее превращения в сухой насыщенный пар, называют *скрытой теплотой парообразования*. Этот подвод теплоты не изменяет температуру системы, и процесс парообразования протекает при постоянной температуре.

Процесс, обратный парообразованию, называется *конденсацией*. При незначительном понижении температуры сухой насыщенный пар вначале становится *влажным*, а затем полностью превращается в

жидкость. Конденсация также происходит при неизменной температуре, значение которой зависит от величины внешнего давления.

Для превращения 1 кг сухого насыщенного пара в кипящую жидкость того же давления от него надо отвести теплоту, равную теплоте парообразования  $q_n$ .

Состояние сухого насыщенного пара неустойчиво. От незначительного охлаждения он становится влажным. Для промышленного использования такой пар непригоден. Чтобы довести его параметры до нужных кондиций и сделать его состояние устойчивым, необходимо его перегреть.

Пар называют *перегретым*, если при заданном давлении он имеет более высокую температуру, чем температура насыщения  $T_s$ . Чем больше степень перегрева (чем сильнее неравенство  $T > T_s$ ), тем больше по своим свойствам перегретый пар приближается к идеальному газу. И наоборот, при приближении к состоянию насыщения между молекулами пара все сильнее начинают проявлять себя ван-дер-ваальсовы силы и ощущаемее становится влияние конечности объема молекул.

#### **Вопросы для самоконтроля**

1. Какой пар называют насыщенным?
2. Как связаны между собой давление и температура насыщения?
3. Какими двумя способами происходит образование пара?
4. В чем недостатки сухого насыщенного пара?
5. Какой пар называют перегретым?

#### **4.6. Производство водяного пара**

Производство водяного пара заданных параметров осуществляют в парогенераторах. Полученный перегретый пар отправляют к месту использования, откуда он возвращается к парогенератору в виде конденсата (*питательной воды*). Эта вода подлежит предварительной очистке, смешению с добавочной водой и предварительному подогреву. Затем она вновь используется в парогенераторе для производства пара.

Сам процесс производства пара идет при постоянном давлении и включает в себя три последовательных этапа:

- 1) подогрев питательной воды до температуры насыщения при заданном давлении;

2) собственно парообразование – превращение кипящей жидкости в сухой насыщенный пар;

3) перегрев пара до требуемой температуры.

Влажный пар – это смесь сухого насыщенного пара с мельчайшими капельками взвешенной в нем жидкости. Если массу сухого насыщенного пара обозначить через  $m_{II}$ , а массу взвешенной в нем жидкости – через  $m_{Ж}$ , то *степень сухости насыщенного пара* будет определяться величиной

$$x = \frac{m_{II}}{m_{Ж} + m_{II}}. \quad (4.7)$$

Эта величина может принимать различные значения в интервале  $[0; 1]$ ; причем  $x=0$  будет соответствовать жидкости, а  $x=1$  – сухому насыщенному пару.

На  $vp$ -диаграмме (рис. 4.3) первый этап парообразования (подогрев питательной воды до температуры насыщения) представлен участком  $ab$ .

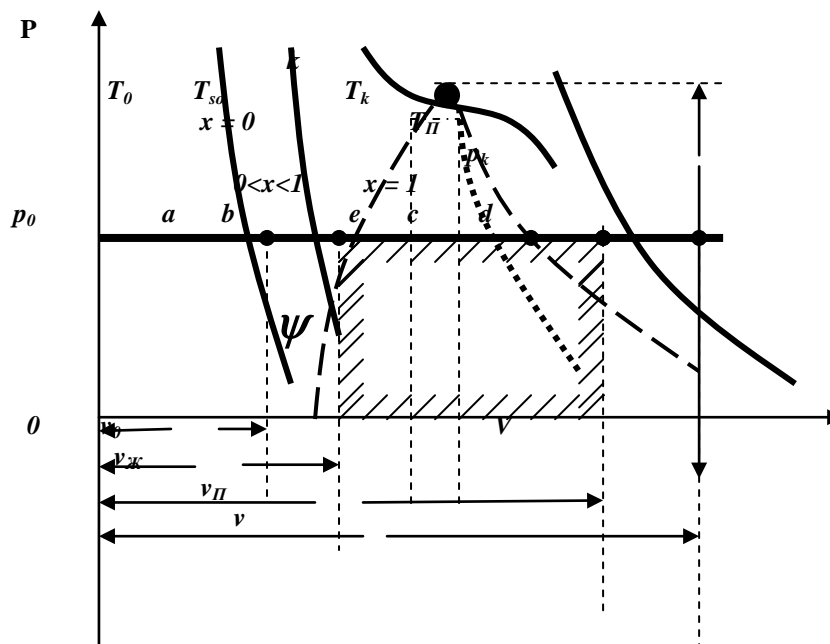


Рис. 4.3. Процесс парообразования на  $vp$ -диаграмме

На участке  $ab$  при постоянном давлении  $p_0$  температура питательной воды возрастает от некоторого начального своего значения  $T_0$  (начальная точка  $a$  рассматриваемого участка лежит на пересечении изобары  $p_0$  с изотермой  $T_0$ ) до некоторой температуры  $T_{so}$ , которая при заданном давлении  $p_0$  будет являться температурой

насыщения (точка  $b$  завершения первого этапа парообразования лежит на пересечении изобары  $p_0$  с изотермой  $T_{so}$ ).

Через точку  $b$  проходит также граница  $kb$  (левая пунктирная линия на рис. 4.3) отделяющая жидкую фазу питательной воды (то есть ту область, где  $x = 0$ ) от влажного пара (от области, где  $0 < x < 1$ ). Линия постоянной степени сухости влажного пара  $x = \text{const} < 1$  здесь изображена точками (кривая  $ke$ ). Граница  $kc$  (правая пунктирная линия на рис. 4.3) отделяет область влажного пара от области сухого насыщенного пара. Границы  $kb$  и  $kc$  также являются линиями постоянной степени сухости влажного пара  $x = 0$  и  $x = 1$  соответственно.

На участке  $ab$  с ростом температуры питательная вода расширяется, и ее удельный объем возрастает от  $v_0$  до  $v_{ж}$ . Однако это увеличение удельного объема незначительно, поскольку вода практически не сжимается. По той же причине на этом участке  $vp$ -диаграммы изотермы идут круто вниз (кривые  $T_0$  и  $T_{so}$ ). Правда при увеличении давления парообразования  $p_0$  будет расти и температура насыщения  $T_{so}$ , длина участка  $ab$  будет увеличиваться и уже удельный объем питательной воды  $v_0$  в начале первого этапа парообразования будет существенно меньше  $v_{ж}$ .

Согласно первому закону термодинамики теплота, необходимая для нагрева питательной воды на  $T_{so} - T_0$  градусов, будет равна

$$q_{ж} = h_{ж} - h_0 = u_{ж} - u_0 + p_0(v_{ж} - v_0).$$

При низких и средних давлениях  $p_0$ , как было сказано выше,  $v_{ж} \approx v_0$ . Тогда, если принять за начало отсчета внутренней энергии температуру  $T_0$ , получим, что  $q_{ж} \approx u_{ж}$ .

Далее  $h_{ж} = h_0 + q_{ж} = u_0 + p_0 v_0 + q_{ж}$ , но в нашем случае  $u_0 = 0$ , а при давлениях ниже критического ( $p_0 < p_k$ ) будет иметь место неравенство  $p_0 v_0 \ll q_{ж}$  и тогда  $h_{ж} \approx q_{ж}$ . Следовательно, для питательной воды при ее подогреве до температуры насыщения имеем следующие приближенные соотношения между ее энергетическими характеристиками:

$$h_{ж} \approx q_{ж} \approx u_{ж}.$$

Из (2.15) следует, что изменение энтропии в процессе подогрева питательной воды (участок  $ab$ ) можно определить из соотношения

$$s_{ж} - s_0 = s_{ж} = c_{ж} \ln \frac{T_{so}}{T_0}, \quad (4.8)$$

где при температуре  $T_0$  можно принять  $s_0 = 0$ , а обозначение  $c_{Ж}$  соответствует среднему значению теплоемкости питательной воды на температурном интервале  $(T_0, T_{so})$ .

Участок  $bc$  соответствует второму этапу – процессу превращения нагретой до температуры кипения  $T_{so}$  питательной воды в сухой насыщенный пар. Он идет одновременно при  $T = T_{so} = \text{const}$  и  $p = p_0 = \text{const}$ . Согласно первому закону термодинамики

$$dh = dq + vdp = dq,$$

откуда теплота парообразования

$$r = h_{\Pi} - h_{Ж} = (u_{\Pi} - u_{Ж}) + p_0(v_{\Pi} - v_{Ж}) = \rho + \Psi, \quad (4.9)$$

где  $r$  – теплота парообразования;  $h_{\Pi}, u_{\Pi}, v_{\Pi}$  – энтальпия, внутренняя энергия, удельный объем сухого насыщенного пара соответственно (эти параметры пара соответствуют точке  $c$  на рис. 4.3); величины  $\rho = u_{\Pi} - u_{Ж}$ ,  $\Psi = p_0(v_{\Pi} - v_{Ж})$  называют соответственно *внутренней* и *внешней теплотой парообразования*.

Внутренняя теплота парообразования  $\rho$  расходуется на преодоление сил межмолекулярного сцепления, присущих жидкостям. Внешняя теплота парообразования  $\Psi$  расходуется на совершение работы, связанной с резким увеличением объема при превращении жидкости в пар. Эта работа пропорциональна площади под отрезком  $bc$  (рис. 4.3). При увеличении  $p_0$  эта площадь будет уменьшаться, а при  $p_0 = p_k$  станет равной нулю. Следовательно, в критической точке внешняя теплота парообразования  $\Psi = 0$ .

Внутренняя теплота парообразования  $\rho$  при приближении к критической точке также уменьшается и достигает в ней нулевого значения. Поэтому и полная теплота парообразования  $r = 0$  в точке  $k$  (см. рис. 4.3).

Поскольку процесс  $bc$  идет при постоянной температуре  $T_{so}$ , то изменение энтропии здесь можно определить из (2.28). Откуда получим

$$s_{\Pi} - s_{Ж} = \frac{r}{T_{so}}.$$

Величина  $s_{Ж}$  определится по (4.2), поэтому

$$s_{\Pi} = c_{Ж} \ln \frac{T_{so}}{T_0} + \frac{r}{T_{so}}. \quad (4.10)$$

Рассмотрим теперь состояние пара в точке  $e$ . Она находится в области влажного пара и характеризуется степенью сухости  $0 < x < 1$ .



Из свойства аддитивности объема следует, что для смеси из двух компонентов (жидкости и пара)

$$V_{см} = V_{ж} + V_{п} = v_{ж}m_{ж} + v_{п}m_{п} = v_{см}m_{см}.$$

Откуда с учетом (4.1) получим

$$v_{см} = \frac{v_{ж}m_{ж} + v_{п}m_{п}}{m_{см}} = \frac{v_{ж}m_{ж} + v_{п}m_{п}}{m_{ж} + m_{п}} = (1-x)v_{ж} + xv_{п},$$

где  $v_{ж}, m_{ж}, v_{п}, m_{п}, v_{см}, m_{см}$  – соответственно удельный объем и масса воды, пара и смеси кипящей воды и пара в области двухфазного состояния вещества в точке  $e$ .

Но свойством аддитивности также обладают внутренняя энергия, энтальпия и энтропия. Поэтому их значения в точке  $e$  вычисляются через степень сухости и соответствующие характеристики компонентов в этой точке по аналогичным формулам

$$u_{см} = (1-x)u_{ж} + xu_{п},$$

$$h_{см} = (1-x)h_{ж} + xh_{п},$$

$$s_{см} = (1-x)s_{ж} + xs_{п}.$$

Разрешая эти уравнения относительно  $x$ , найдём

$$x = \frac{u_{см} - u_{ж}}{u_{п} - u_{ж}} = \frac{h_{см} - h_{ж}}{h_{п} - h_{ж}} = \frac{s_{см} - s_{ж}}{s_{п} - s_{ж}} = \frac{v_{см} - v_{ж}}{v_{п} - v_{ж}}.$$

Ранее было получено, что

$$s_{п} - s_{ж} = \frac{r}{T_{so}} \text{ и } h_{п} - h_{ж} = r.$$

Тогда

$$h_{см} = h_{ж} + rx \text{ и } s_{см} = c_{ж} \ln \frac{T_{so}}{T_0} + \frac{rx}{T_{so}}. \quad (4.11)$$

Сумма  $q_{ж} + rx$  есть количество теплоты, затраченное на превращение одного килограмма питательной воды с температурой  $T_0$  во влажный пар со степенью сухости  $x$ . При  $x=1$  пар будет сухим насыщенным, на его получение затрачена теплота  $q_{ж} + r$ . Чтобы сделать этот пар перегретым, необходимы дополнительные затраты теплоты.

Третьему этапу производства пара (процессу перегрева) соответствует участок  $cd$  (см. рис. 4.3). Пусть  $T_{п}$  – температура перегретого пара, которая соответствует требованиям потребителя. Тогда теплота, расходуемая на перегрев (процесс перегрева идет при постоянном давлении  $p_0$ ), может быть определена из выражения

$$q_{II} = \int_{T_{so}}^{T_{II}} c_p dT = h - h_{II}, \quad (4.12)$$

тогда энтальпию  $h$  перегретого пара можно вычислить из выражения

$$h = h_{II} + \int_{T_{so}}^{T_{II}} c_p dT. \quad (4.13)$$

Изменение энтропии в процессе  $cd$  определится по формуле

$$s - s_{II} = \int_{T_{so}}^{T_{II}} \frac{dq}{T} = \int_{T_{so}}^{T_{II}} c_p \frac{dT}{T},$$

откуда с учетом (4.4) энтропия перегрева пара будет равна

$$s = c_{ж} \ln \frac{T_{so}}{T_0} + \frac{r}{T_{so}} + \int_{T_{so}}^{T_{II}} c_p \frac{dT}{T}. \quad (4.14)$$

В выражениях (4.12) – (4.14) следует учитывать зависимость теплоемкости перегреваемого пара  $c_p$  от температуры.

**Пример 4.4.** Насколько изменится внутренняя энергия кипящей жидкости массой  $M = 10$  кг при превращении ее в сухой насыщенный пар при постоянном давлении  $p_0 = 0,8 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ ? Скрытая теплота

парообразования в этом случае была равной  $r = 2665 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$ , кипящая жидкость занимала объем  $V_{ж} = 10$  л, а насыщенный пар получился с удельным объемом  $v_{II} = 2,08 \frac{\text{м}^3}{\text{кг}}$ .

**Решение.** Из (4.9) следует, что изменение удельной внутренней энергии

$$\Delta u = (u_{II} - u_{ж}) = r - p_0(v_{II} - v_{ж}).$$

Тогда искомая величина

$$\begin{aligned} \Delta U &= M\Delta u = M\Delta u = Mr - p_0(Mv_p - V_{ж}) = \\ &= 10 \text{ кг} \cdot 2665 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}} - 0,8 \cdot 9,8 \cdot 10^4 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \left( 10 \text{ кг} \cdot 2,08 \frac{\text{м}^3}{\text{кг}} - 0,01 \text{ м}^3 \right) = \\ &= 26650 \text{ кДж} - 1629,936 \text{ кДж} = 25020,06 \text{ кДж} \approx 25 \text{ МДж.} \end{aligned}$$

**Пример 4.5.** Определить количество теплоты, необходимого на перегрев сухого насыщенного пара массой  $m = 10$  кг до  $T_{II} = 500$  °С. Зависимость теплоёмкости пара от температуры перегрева принять

линейной, причём массовая удельная теплоёмкость сухого насыщенного пара

$$c_p(T_{so}) = c_p(100\text{ °C}) = 2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}},$$

а для перегретого пара при температуре  $T_{II} = 500\text{ °C}$

$$c_p(T_{II}) = c_p(500\text{ °C}) = 2,15 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

**Решение.** Искомая теплота согласно (4.12) будет равна

$$Q_{II} = m \cdot q_{II} = m \int_{T_{so}}^{T_{II}} c_p(T) dT,$$

где  $c_p(T)$  найдется из пропорции

$$\frac{c_p(T_{II}) - c_p(T_{so})}{T_{II} - T_{so}} = \frac{c_p(T) - c_p(T_{so})}{T - T_{so}}.$$

Находим

$$c_p(T) = c_p(T_{so}) + \frac{c_p(T_{II}) - c_p(T_{so})}{T_{II} - T_{so}} (T - T_{so}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} Q_{II} &= m \int_{T_{so}}^{T_{II}} \left[ c_p(T_{so}) + \frac{c_p(T_{II}) - c_p(T_{so})}{T_{II} - T_{so}} (T - T_{so}) \right] dT = m c_p(T_{so}) (T_{II} - T_{so}) + \\ &+ m \frac{c_p(T_{II}) - c_p(T_{so})}{T_{II} - T_{so}} \left[ \frac{(T_{II} - T_{so})^2}{2} + T_{so} (T_{II} - T_{so}) \right] = 10 \cdot 2 \cdot 400 + \\ &+ 10 \frac{0,15}{400} \left[ \frac{400^2}{2} + 100 \cdot 400 \right] = 8000 + 1,5(200 + 100) = 8450 \text{ кДж}. \end{aligned}$$

### Вопросы для самоконтроля и задания

1. Для рассмотренного выше *примера 4.4* назовите значения внутренней и внешней теплоты парообразования ( $\rho$  и  $\Psi$ ).
2. Чему равно изменение энтальпии в процессе из *примера 4.4*?
3. Назовите основные этапы производства пара и соответствующие им участки укажите на  $v\rho$ -диаграмме.
4. Что такое скрытая теплота парообразования?
5. На что расходуется теплота, подводимая к кипящей жидкости?
6. Чем можно объяснить отсутствие волны Ван-дер-Ваальса на участке  $bc$  реального процесса?
7. Зачем понадобился 3-й этап (участок  $cd$ ) производства пара?

## Глава 5. ТЕОРИЯ ТЕПЛООБМЕНА

Данная теория опирается на основные законы природы из молекулярно-кинетической теории, которые ранее были рассмотрены в конце первой главы (подразд. 1.4). Теплообмен может осуществляться посредством различных механизмов переноса теплоты. В связи с этим существуют разные виды теплообмена, о которых предварительно необходимо сказать несколько слов.

### 5.1. Температурное поле и виды теплообмена

Абсолютная температура как мера интенсивности теплового движения частиц термодинамической системы в области этой системы имеет некоторое распределение. В каждой конкретной точке данной области и каждый конкретный момент времени абсолютная температура будет иметь определённое значение. Функцию, определяющую эти значения в зависимости от координат  $x, y, z$  и времени  $t$

$$T = T(x, y, z, t), \quad (5.1)$$

называют *температурным полем*. Она определяет мгновенные значения абсолютной температуры во всех точках рассматриваемого пространства.

Поскольку абсолютная температура – скалярная величина, то и температурное поле является скалярным. Если во всех точках рассматриваемого пространства абсолютная температура имеет одно и то же значение, то такое температурное поле называется *однородным*; в противном случае – *неоднородным*.

Температурное поле называется *стационарным*, если во всех точках рассматриваемого пространства температура со временем не меняется. Стационарное температурное поле задаётся функцией лишь от координат  $T = T(x, y, z)$ .

*Теплообмен* – это самопроизвольный процесс переноса теплоты в пространстве с неоднородным температурным полем. Он обусловлен обменом энергией теплового движения частиц системы при их механическом взаимодействии.

В более широком смысле теплообмен может вызываться неоднородностью полей и других физических величин (неоднородностью распределения плотности, концентрации), инфракрасным (тепловым) лучеиспусканием, полем скоростей движущихся слоёв жидкости или газа. В зависимости от причин, вызывающих тот или иной теплообмен, различают следующие его виды [10, с. 269].

*Теплопроводность* – молекулярный перенос теплоты в неподвижной среде с неоднородным температурным полем посредством теплового движения микрочастиц.

*Конвекция* – перенос теплоты в среде с неоднородным температурным полем при движении среды.

*Теплообмен излучением* – перенос теплоты, связанный с преобразованием тепловой энергии нагретого тела в энергию электромагнитного поля в виде теплового излучения, воздействием этого излучения на другое тело с обратным преобразованием энергии – из электромагнитной в тепловую.

Это простейшие частные случаи теплообмена. На практике в чистом виде они встречаются редко. Реальный теплообмен представляет собой различные комбинации этих простейших его видов. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся на практике переносы теплоты более сложного вида.

*Конвективный теплообмен* – теплообмен при совместном протекании молекулярного и конвективного переноса теплоты (одновременно теплопроводность и конвекция).

*Теплоотдача (конвективная теплоотдача)* – конвективный теплообмен между движущейся средой и поверхностью её раздела с другой средой (твёрдым телом, жидкостью или газом).

*Теплопередача* – процесс теплообмена между двумя теплоносителями (движущейся средой, используемой для переноса теплоты) через разделяющую их стенку.

*Радиационно-кондуктивный теплообмен* – теплообмен, обусловленный совместным переносом теплоты теплопроводностью и излучением.

*Радиационно-конвективный теплообмен* – теплообмен, обусловленный совместным переносом теплоты теплопроводностью, излучением и конвекцией.

Независимо от вида теплообмена тепловой поток всегда направлен от более нагретого участка к менее нагретому, что связано со вторым законом термодинамики, то есть теплообмен является необратимым процессом.

Характер теплообмена во многом зависит от свойств среды распространения тепловых потоков, её агрегатного состояния и химического состава. Но главным фактором, определяющим интенсивность теплообмена, является температура. Однако зависимость интенсивности теплового потока от температуры для разных видов теплообмена неодинакова. Поэтому в зависимости от того или иного температурного диапазона будет преобладать

механизм того или иного вида теплообмена. Простейшим из таких механизмов является теплопроводность твёрдых тел.

### **Вопросы для самоконтроля**

1. Что такое абсолютная температура и поле температур?
2. Что такое теплообмен в самом общем смысле?
3. Возможно ли самопроизвольное возникновение тепловых потоков в однородном температурном поле?
4. Что называется теплопроводностью и конвекцией?
5. Что называется конвекцией?
6. Что представляет собой теплообмен излучением?
7. Что называется конвективным теплообменом?
8. Что такое теплоотдача и теплопередача?
9. Что такое радиационно-кондуктивный теплообмен?
10. Что такое радиационно-конвективный теплообмен?

### **5.2. Механизм теплопроводности твёрдых тел**

В чистом виде теплопроводность имеет место лишь в твёрдых веществах, имеющих кристаллическую решётку. В газах и жидкостях её можно наблюдать лишь в очень тонких слоях. Основной особенностью этого механизма передачи теплоты является то, что частицы термодинамической системы (в данном случае это узлы кристаллической решётки) не перемещаются по материалу, а лишь колеблются относительно своего неподвижного центра равновесия. Интенсивность этих колебаний и есть абсолютная температура.

Колебания узлов кристаллической решётки могут иметь разную амплитуду и частоту, которые могут меняться по времени. Поэтому в разных точках пространства, занимаемого материалом твёрдого тела, в разные моменты времени абсолютная температура  $T$  может быть разной. Иначе говоря, материал будет иметь некоторое распределение температур, которое будет описываться в общем случае неоднородным температурным полем (5.1).

Узлами кристаллической решётки являются ионы, связанные между собой в решётку ковалентными связями. Данные связи обусловлены стремлением каждого атома заполнить свою внешнюю электронную оболочку недостающими электронами. Соседние атомы решётки сцеплены между собой в «борьбе» за них. Такие общие для соседних атомов электроны можно представить себе струнами, которые эти атомы (узлы) связывают. Так возникает кристаллическая решётка твёрдого тела.

Например, кристаллическая решётка кремния выстроена таким образом, что в кристалле каждый четырёхвалентный атом окружён

четырьмя такими же атомами, с которыми его связывают четыре валентных электрона. Соседние атомы связаны между собой парой общих электронов (рис. 5.1). Такое взаимодействие между атомами называется *ковалентной связью*.

На рис. 5.2 представлена упрощенная модель кристаллической решётки кремния. Такого рода модель в математике называют графом. Чёрными кружочками здесь обозначены атомы четырёхвалентного кремния. Это *вершины графа*. Валентные электроны, связывающие соседние атомы, здесь представлены отрезками, соединяющими соответствующие кружочки. Их называют *рёбрами графа* [12, с.96 – 98]. Этими струнами (рёбрами) и стянуты атомы твёрдого тела.

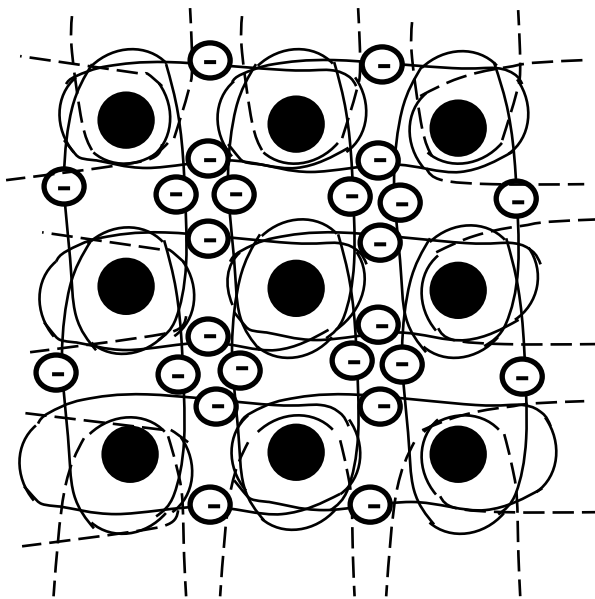


Рис. 5.1. Кристалл кремния

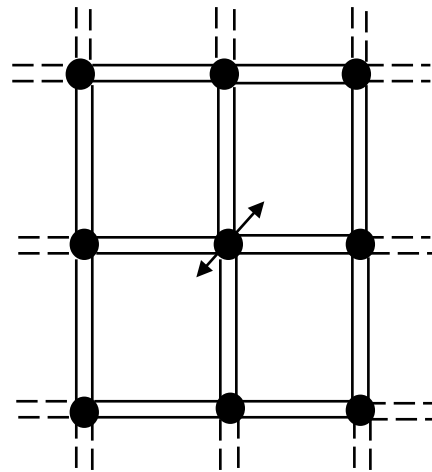


Рис. 5.2. Графовая модель кристалла кремния

При колебании атом дёргает за эти струны и заставляет колебаться соседние атомы, а сам при этом теряет часть кинетической энергии колебания. Так происходит выравнивание температуры по всему объёму тела, обеспечивающее распространение теплоты от более нагретых его участков, к более холодным. Такое распространение теплоты описывается законом Био – Фурье (1.14), который можно переписать в следующем виде:

$$\vec{q} = \frac{\Delta Q}{S \Delta t} = -\lambda \cdot \text{grad} T, \quad (5.2)$$

где векторная величина  $\vec{q}, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ , называемая *плотностью теплового потока*, имеет направление, прямо противоположное направлению

градиента поля температур  $T$ , К (о чём свидетельствует знак « $\leftarrow$ » в правой части данного уравнения) и определяет количество теплоты  $\Delta Q$ , Дж, переносимое за время  $\Delta t$ , с, через площадку  $S$ , м<sup>2</sup>.

Напомним, что градиент – это оператор, преобразующий скалярное поле в векторное. При этом в точке  $(x, y, z)$  скалярного поля  $T$  под действием данного оператора будет возникать вектор  $\vec{F} = \text{grad}T$  с координатами

$$F_x = \frac{\partial T}{\partial x}, F_y = \frac{\partial T}{\partial y}, F_z = \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (5.3)$$

где  $F_x, F_y, F_z$  – проекции вектора  $\vec{F}$  на оси  $x, y, z$  соответственно.

Множество всех точек, в которых температура одна и та же, образуют в поле температур *изотермическую поверхность*. Изотермические поверхности не могут пересекаться, поскольку в любой точке поля не может быть одновременно две разные температуры.

В любой точке поля направление вектора  $\vec{F} = \text{grad}T$  будет ориентировано по нормали к изотермической поверхности в сторону увеличения температуры  $T$  (рис. 5.3).

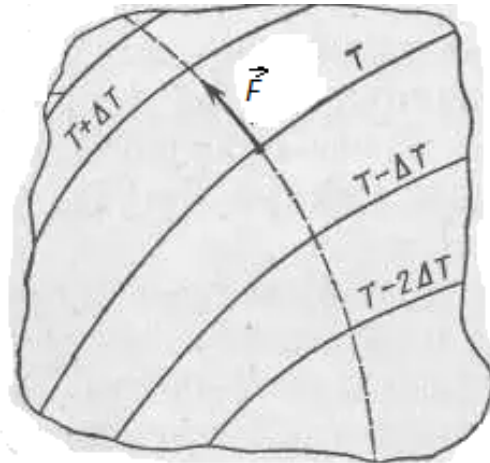


Рис. 5.3. Температурное поле выделенного объёма с изотермическими поверхностями:

$$\begin{aligned} T &= \text{const}; & T + \Delta T &= \text{const}; \\ T - \Delta T &= \text{const}; & T - 2\Delta T &= \text{const} \end{aligned}$$

Согласно (5.2) плотность теплового потока пропорциональна градиенту поля температур, а коэффициент пропорциональности  $\lambda$  (*коэффициентом теплопроводности*),  $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ , будет зависеть от свойств кристаллической решётки (длины «струн», т.е. плотности



материала  $\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ , и их упругих свойств, что характеризует его массовую удельную теплоёмкость в изохорном процессе  $c_v, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ ).

Кроме коэффициента теплопроводности в теплотехнике часто используется коэффициент температуропроводности при постоянном объёме ( $v = \text{const}$ ),  $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ ,

$$a_v = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_v} . \quad (5.4)$$

Коэффициент температуропроводности уже не зависит от свойств материала, и, как было отмечено выше (см. подразд.1.4), из МКТ следует, что он равен коэффициенту диффузии и кинематической вязкости (тройная аналогия). Переход от коэффициента теплопроводности к коэффициенту температуропроводности обеспечивает получение безразмерных температурных полей, независимых от свойств материалов, которые подобны безразмерным полям концентрации и скорости.

#### Вопросы для самоконтроля и задания

1. Что представляет собой кристаллическая решётка твёрдого тела? Почему здесь частицы тела движутся не хаотически, а лишь колеблются относительно своих центров равновесия?
2. Что такое изотермические поверхности?
3. Как определяется направление градиента в любой точке температурного поля?
4. Что такое плотность теплового потока?
5. Сформулируйте закон теплопроводности Био – Фурье.
6. Что такое коэффициент температуропроводности?

### 5.3. Уравнения энергетического баланса при переносе теплоты

Если выделить некоторый объём  $V, \text{м}^3$ , в материале с заданным температурным полем (5.1), то для него независимо от механизма теплопередачи на основании закона сохранения энергии можно получить следующее уравнение энергетического баланса [10, с.287]:

$$\int_V \tilde{Q} dV + \int_S \vec{q} dS = \int_V Q_V dV, \quad (5.5)$$

где  $\tilde{Q}$  – изменение объёмной плотности теплового потока,  $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ ;

$\vec{q}$  – вектор плотности теплового потока,  $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ , проходящего через

единицу поверхности, ограничивающей выделенный объём  $V$ ;  $S$  – площадь поверхности,  $\text{м}^2$ , ограничивающей выделенный объём  $V$ ;  $Q_V$  – объёмная плотность внутренних источников теплоты,  $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ .

Уравнение энергетического баланса (5.5) говорит о том, что теплота  $\int_V \tilde{Q} dV$ , сосредоточенная в выделенном объеме  $V$ , плюс теплота  $\int_S \vec{q} dS$ , отдаваемая из этого объёма через поверхность  $S$ , равна теплоте от внутренних источников в выделенном объёме.

Согласно известной теореме Остроградского – Гаусса

$$\int_S \vec{q} dS = \int_V \text{div} \vec{q} dV.$$

Тогда из (5.4)

$$\int_V \tilde{Q} dV + \int_V \text{div} \vec{q} dV = \int_V Q_V dV$$

или

$$\tilde{Q} + \text{div} \vec{q} = Q_V. \quad (5.6)$$

Здесь использован дифференциальный оператор *дивергенции*, который каждую точку векторного поля  $\vec{q}$  преобразует в скалярную величину – показатель того, в какой степени данная точка пространства является источником или стоком этого поля:

$\text{div} \vec{q} > 0$  – точка поля является источником;

$\text{div} \vec{q} < 0$  – точка поля является стоком;

$\text{div} \vec{q} = 0$  – стоков и источников нет, либо они друг друга компенсируют.

Оператор дивергенции можно расписать через частные производные по пространственным координатам

$$\text{div} \vec{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}, \quad (5.7)$$

где  $q_x, q_y, q_z$  – проекции вектора  $\vec{q}$  на координатные оси  $x, y, z$  соответственно.

Изменение объёмной плотности теплового потока  $\tilde{Q}$  можно выразить через теплоёмкость  $c_v$ , плотность  $\rho$  и изменение температуры материала  $\tilde{Q} = c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t}$ .

Тогда из (5.6) и (5.7) получим

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = Q_V \quad (5.8)$$

или

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = Q_V. \quad (5.9)$$

Выражения (5.8) и (5.9) являются дифференциальными уравнениями переноса теплоты в самом общем виде.

#### Вопросы для самоконтроля и задания

1. На что расходуется теплота, выделяемая из внутренних источников теплоты?
2. Чему равно количество теплоты, проходящей через поверхность, ограничивающую выделенный объём?
3. Что такое дивергенция векторного поля (её физический смысл)?
4. Распишите дивергенцию через частные производные.
5. Напишите дифференциальное уравнение переноса теплоты в общем виде.

#### 5.4. Дифференциальные уравнения теплопроводности

Если в дифференциальные уравнения переноса теплоты (5.8) и (5.9) подставить значение плотности теплового потока для закона теплопроводности (5.2), то получатся дифференциальные уравнения теплопроводности для твёрдых тел. Из (5.8) получим

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} T) = Q_V, \quad (5.10)$$

а при  $\lambda = \text{const}$  с учетом (5.3) и (5.7)

$$\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} T) = -\lambda \operatorname{div} \vec{F} = -\lambda \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) = -\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).$$

Таким образом, уравнение (5.10) приведётся к виду

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = Q_V.$$

Поделим это уравнение на величину  $\lambda$  и перейдём в нём к коэффициенту температуропроводности  $a_v$ , согласно (5.4), получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_v \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{Q_V}{c_v \rho}. \quad (5.11)$$

Уравнение (5.11) является дифференциальным уравнением теплопроводности в прямоугольных координатах. Выражение в

скобках обозначается через  $\Delta T$ , где обозначение  $\Delta$  называется оператором Лапласа. Тогда в операторной форме уравнение (5.11) примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_v \Delta T + \frac{Q_V}{c_v \rho}. \quad (5.12)$$

Если в выделенном объёме отсутствуют источники теплоты, то есть  $Q_V = 0$ , а температурное поле стационарное, то есть  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ , из (5.11) и (5.12) следуют уравнения теплопроводности в стационарном поле температур без внутренних источников теплоты:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad \text{и} \quad \Delta T = 0. \quad (5.13)$$

Если твердое тело представляет собой однослойную плоскую стенку, отделяющую среду с высокой температурой от среды с низкой температурой, то изотермические поверхности такого тела будут представлять собой плоскости, параллельные друг другу и сторонам стенки. В этом случае будет иметь место одномерное температурное поле, тепловой поток будет распространяться в направлении, перпендикулярном всем этим изотермическим поверхностям. Если это направление принять за ось  $x$ , то  $\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$  и из (5.11) следует

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_v \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Q_V}{c_v \rho}. \quad (5.14)$$

Уравнение (5.14) можно представить в более общем виде для тел различной формы

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_v \left( \frac{\partial^2 T}{\partial L^2} + \frac{1}{S_L} \frac{\partial S_L}{\partial L} \frac{\partial T}{\partial L} \right) + \frac{Q_V}{c_v \rho} \quad (5.15)$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_v \left( \frac{\partial^2 T}{\partial L^2} + \frac{n}{L} \frac{\partial T}{\partial L} \right) + \frac{Q_V}{c_v \rho}, \quad (5.16)$$

где  $L$  – обобщённая координата;  $S_L$  – площадь изометрической поверхности, по нормали к которой направлена координата  $L$ .

Для плоской поверхности:  $L = x$ ,  $\frac{\partial S_L}{\partial L} = 0$  – все изотермические поверхности имеют одинаковую площадь, и из (5.15) получается (5.14). Также при  $n = 0$  из (5.16) получается (5.14).

Для цилиндрической поверхности:  $L = R$ ,  $S_L = 2\pi R \cdot l$  – площадь боковой поверхности цилиндра, а  $\frac{\partial S_L}{\partial L} = 2\pi \cdot l$  и из (5.15) получается

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_v \left( \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial R} \right) + \frac{Q_V}{c_v \rho}. \quad (5.17)$$

Также при  $n = 1$  из (5.16) получается (5.17).

Для сферической поверхности:  $L = R$ ,  $S_L = 4\pi R^2$  – площадь боковой поверхности цилиндра, а  $\frac{\partial S_L}{\partial L} = 8\pi R$  и из (5.15) получается

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_v \left( \frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial T}{\partial R} \right) + \frac{Q_V}{c_v \rho}. \quad (5.18)$$

Также при  $n = 2$  из (5.16) получается (5.18).

Полученные, таким образом, дифференциальные уравнения теплопроводности могут быть использованы при решении разного рода практических задач. Решение таких задач связано с интегрированием этих уравнений при заданных начальных и граничных (краевых) условиях, вытекающих из условий данных задач.

В частности, для нахождения стационарного температурного поля могут иметь место краевые условия трёх видов, которые приводят к трём разным задачам:

- 1) первая краевая задача (задача Дирихле) заключается в решении уравнения (5.13), заданного в некоторой области  $V$  при условии, что на границе этой области  $\partial V$  температурное поле задано, то есть  $T|_{\partial V} = \varphi(x, y, z)$ ;
- 2) вторая краевая задача (задача Неймана) заключается в решении уравнения (5.13), заданного в некоторой области  $V$  при условии, что на границе этой области  $\partial V$  задан градиент температурного поля, то есть  $\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\partial V} = \varphi(x, y, z)$ ;
- 3) третья краевая задача заключается в решении линейного неоднородного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами  $Lu = f(x, y, z)$ , заданного в некоторой области  $V$  при условии, что на границе этой области  $\partial V$  задано условие  $au + b \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial V} = \varphi(x, y, z)$ .

Ниже рассмотрим два примера на решение задачи Дирихле.

**Пример 5.1.** Определить температурное поле в плоской однослойной стенке толщиной  $\delta$ , отделяющей горячую среду от холодной. Толщина  $\delta$  значительно меньше ширины и высоты стенки. На границе стенки (горячей и холодной гранях) температуры со временем не меняются. Причём во всех точках горячей грани температура равна величине  $T_{w1}$ , а во всех точках холодной –  $T_{w2}$ .

**Решение.** Из условия задачи следует, что данное температурное поле одномерное. В качестве координаты берём ось  $x$ . Точку  $x=0$  принимаем за координату горячей стенки, а точку  $x=\delta$  – за координату холодной стенки.

Такому случаю соответствует уравнение (5.14), в котором следует принять  $\frac{Q_V}{c_v \rho} = 0$ , так как стенка не имеет внутренних источников теплоты, и  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ , так как в данном случае температурное поле будет стационарным. Следовательно, требуется проинтегрировать уравнение

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (5.19)$$

при граничных условиях

$$T|_{x=0} = T_{w1} \text{ и } T|_{x=\delta} = T_{w2}. \quad (5.20)$$

Из (5.19) следует, что  $\frac{dT}{dx} = C_1$ , где  $C_1$  – постоянная интегрирования. При последующем интегрировании получим общее решение уравнения (5.19)

$$T(x) = C_1 x + C_2.$$

Произвольные постоянные  $C_1, C_2$  определим из краевых условий (5.20)

$$T(0) = T_{w1} = C_1 \cdot 0 + C_2 = C_2 \Rightarrow T(\delta) = T_{w2} = C_1 \cdot \delta + T_{w1} \Rightarrow C_1 = \frac{T_{w2} - T_{w1}}{\delta}.$$

Следовательно, искомое температурное поле будет иметь вид

$$T(x) = T_{w1} - \frac{x}{\delta}(T_{w1} - T_{w2}). \quad (5.21)$$

**Пример 5.2.** Определить температурное поле бесконечной однослойной цилиндрической стенки из однородного материала с постоянными температурами  $T_{w1}$  и  $T_{w2}$  соответственно на внутренней ( $R = R_1$ ) и внешней ( $R = R_2$ ) поверхностях стенки.

**Решение.** Из условия задачи следует, что данное температурное поле одномерное и ему соответствует дифференциальное уравнение (5.17), в котором следует принять  $\frac{Q_V}{c_v \rho} = 0$ , так как стенка не имеет внутренних источников теплоты, и  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ , так как в данном случае температурное поле будет стационарным. Следовательно, требуется проинтегрировать уравнение

$$\frac{d^2 T}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dT}{dR} = 0 \quad (5.22)$$

при граничных условиях

$$T|_{R=R_1} = T_{w1} \text{ и } T|_{R=R_2} = T_{w2}. \quad (5.23)$$

Из (5.23) следует, что

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left( R \cdot \frac{dT}{dR} \right) = 0.$$

Следовательно,  $R \cdot \frac{dT}{dR} = C_1$  или  $dT = C_1 \frac{dR}{R}$ , где  $C_1$  – произвольная постоянная. При последующем интегрировании получим общее решение уравнения (5.22)

$$T(x) = C_1 \ln R + C_2.$$

Постоянные  $C_1, C_2$  определим из краевых условий (5.23). Имеем

$$T(R_1) = T_{w1} = C_1 \cdot \ln R_1 + C_2 \text{ и } T(R_2) = T_{w2} = C_1 \cdot \ln R_2 + C_2.$$

Тогда  $T_{w1} - T_{w2} = C_1 \cdot (\ln R_1 - \ln R_2) = C_1 \ln \frac{R_1}{R_2}$ , откуда

$$C_1 = (T_{w1} - T_{w2}) / \ln \frac{R_1}{R_2} \text{ и } C_2 = T_{w1} - C_1 \cdot \ln R_1 = T_{w1} - (T_{w1} - T_{w2}) \frac{-\ln R_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Следовательно, искомое температурное поле будет иметь вид

$$T(R) = T_{w1} - (T_{w1} - T_{w2}) \frac{\ln \frac{R}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (5.21)$$

### Вопросы для самоконтроля

1. Напишите уравнение теплопроводности с использованием оператора Лапласа.
2. Напишите дифференциальное уравнение теплопроводности в частных производных в самом общем виде.

3. Напишите дифференциальное уравнение теплопроводности для одномерного случая в общем виде. Как из этого уравнения можно получить уравнения для плоской, цилиндрической и сферической контрольных поверхностей?
4. Сформулируйте общую постановку задачи Дирихле.
5. В чём принципиальная разница между задачами Дирихле и Неймана?

### 5.5. Теплопроводность газов и жидкостей

Как ранее отмечалось, в газах и жидкостях теплопроводность имеет место лишь в очень тонких слоях. Согласно МКТ в газах она обусловлена обменом тепловой энергией при соударениях молекул между собой. Молекула, обладающая большей кинетической энергией (большей температурой), соударяясь с молекулой меньшей энергии (температуры), передаёт последнюю часть своей энергии, что приводит к выравниванию температур (процесс релаксации) по всему объёму газовой среды.

Жидкости занимают промежуточное значение между газами и твёрдыми телами. Молекулы жидкости расположены на порядок теснее, чем в газах. Здесь они совершают периодические движения по сложным траекториям лишь в определённых ограниченных участках пространства, находясь при этом в сфере действия других молекул. Механизм теплопроводности жидкости определяется энергетическим обменом при соударениях молекул по типу распространения продольных колебаний подобно распространению звуковых волн.

Для газов коэффициент теплопроводности  $\lambda_2$  можно определить согласно молекулярно-кинетической теории по формуле (1.15), применённой к газовой среде,

$$\lambda_2 = \frac{1}{3} \rho \cdot c_v \cdot w_{CA} \cdot \langle l \rangle, \quad (5.22)$$

где  $\rho$  – плотность газа, кг/м<sup>3</sup>;  $c_v$  – теплоёмкость газа при постоянном

объёме,  $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ ;  $w_{CA}$  – средняя арифметическая скорость молекулы

газа, м/с;  $\langle l \rangle$  – средняя длина свободного пробега молекул в газе.

Очевидно, что плотность  $\rho$  и длина пробега  $\langle l \rangle$  обратно пропорциональны друг другу. Поэтому теплопроводность не будет зависеть от абсолютного давления как средней суммы изменений импульсов на единицу выделенной поверхности. Отсюда же следует увеличение с ростом температуры (рис. 5.4) [13].



Эту зависимость можно описать следующей эмпирической формулой:

$$\lambda_2 = \lambda_{20} \left( \frac{T}{T_0} \right)^n, \quad (5.23)$$

где  $\lambda_{20}$  – теплопроводность газа при температуре  $T_0 = 273 \text{ К}$ ,  $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ ;  $n$  – показатель степени, который зависит от свойств газа. В табл. 5.1 приведены значения величин  $\lambda_{20}$  и  $n$  для воздуха и некоторых других газов.

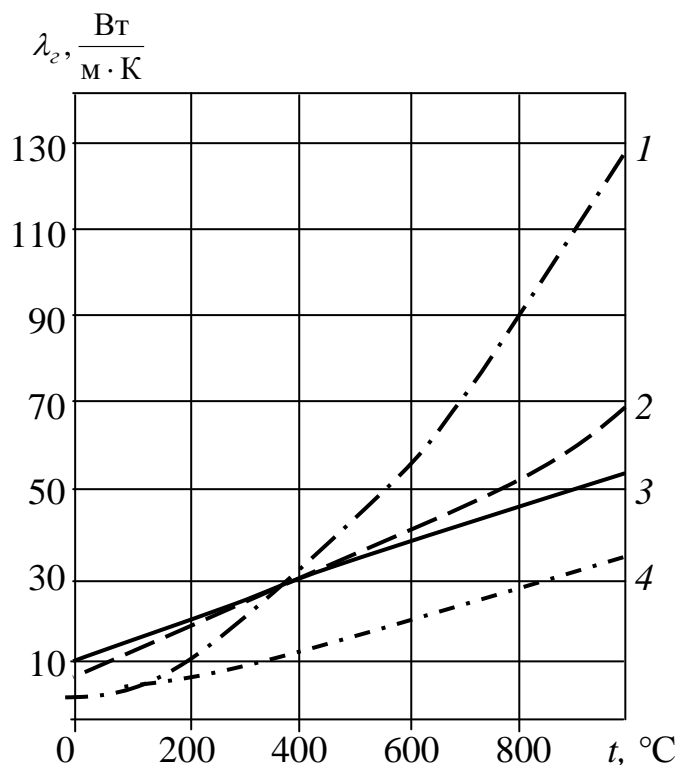


Рис. 5.4. Зависимость теплопроводности некоторых газов от температуры: 1 – водяной пар; 2 – углекислый газ; 3 – воздух; 4 – аргон

Таблица 5.1

**Параметры для определения теплопроводности газов по формуле (5.23)**

Газы	Воз- дух	Азот	Арго н	Водо- род	Гелий	Диоксид углерода	Кисло- род	Крип- тон	Ксе- нон	Неон
$\lambda_{20} \cdot 10^3$ , Вт/(м·К)	24,42	24,19	16,51	172,12	142,6	14,89	24,54	8,89	5,23	46,40
$n$	0,82	0,80	0,80	0,78	0,73	1,23	0,87	0,86	0,91	0,71

Коэффициент теплопроводности  $\lambda_{20}$  может быть также посчитан в зависимости от плотности  $\rho$  по эмпирической формуле

$$\lambda_2 = \lambda_{20} + C\rho^{n_1}, \quad (5.24)$$

где коэффициенты  $C$  и  $n_1$  определяются по табл. 5.2.

Таблица 5.2

**Параметры для определения теплопроводности газов по формуле (5.24)**

Газы	Азот	Аргон	Водород	Гелий	Диоксид углерода	Кислород
$C \cdot 10^5$	1,933	0,751	34,31	18,41	1,005	1,449
$n_1$	1,23	1,26	1,16	1,17	1,26	1,24

Коэффициент теплопроводности водяного пара можно вычислить по следующей эмпирической формуле:

$$\lambda_{пар} = 4,443 \cdot 10^{-6} T^{1,45} + 1,55 \cdot 10^{-4} \rho^{1,25}, \quad (5.25)$$

где  $T$  – абсолютная температура пара, К;  $\rho$  – плотность пара, кг/м<sup>3</sup>.

Теплопроводность газов по отношению к другим агрегатным состояниям вещества минимальна и лежит в диапазоне  $(5 \cdot 10^{-3} \dots 10^{-1}) \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ .

Теплопроводность жидкостей  $\lambda_{ж}$  лежит в диапазоне  $(0,1 \dots 1) \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$  и уменьшается с ростом температуры (за исключением глицерина и воды). Эта зависимость для ряда жидкостей представлена в виде графиков (рис. 5.5).

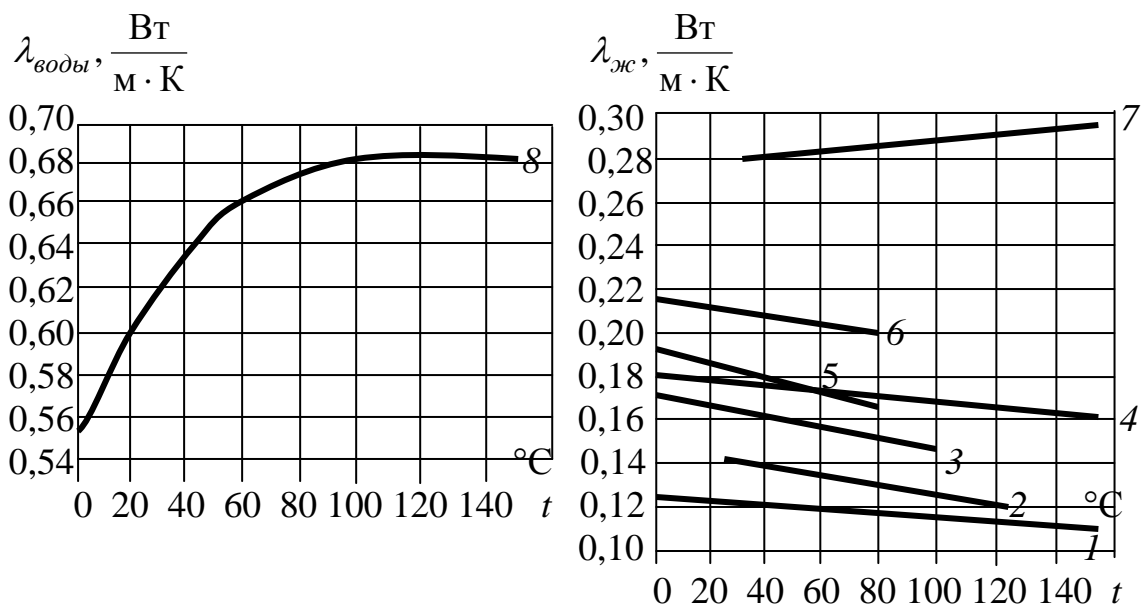


Рис. 5.5. Зависимость теплопроводности некоторых жидкостей от температуры:

1 – вазелиновое масло; 2 – бензол; 3 – ацетон; 4 – касторовое масло;  
5 – спирт этиловый; 6 – спирт метиловый; 7 – глицерин; 8 – вода

Теплопроводность твёрдых тел  $\lambda = (1...430) \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ . Наибольшей теплопроводностью обладают металлы. Твёрдые тела, у которых  $\lambda < 5 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ , относятся к теплоизоляционным материалам.

### Вопросы для самоконтроля

1. Каков механизм теплообмена посредством теплопроводности в газах?
2. Каковы особенности теплопроводности в жидкостях?
3. От каких параметров зависит коэффициент теплопроводности в газах?
4. Каковы диапазоны возможных изменений коэффициента теплопроводности в газах, жидкостях и твёрдых телах?
5. Каков характер изменения коэффициента теплопроводности в жидкостях в зависимости от изменения температуры?

## 5.6. Конвекция

В газах и жидкостях коэффициент теплопроводности существенно меньше, чем в твёрдых телах. Но это вовсе не означает, что теплообмен в этих средах менее интенсивен. В качестве теплоизоляторов газы и жидкости не годятся, поскольку на процесс теплообмена накладывается конвективный перенос, который представляет собой движение конечных объёмов среды, состоящих из колоссального числа молекул. В этих средах неоднородность температурного поля порождает неоднородность поля плотностей  $\rho = \rho(x, y, z)$ . В зависимости от разности температур  $\Delta T = T - T_0$  относительное изменение плотности определится из известного выражения

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \beta \Delta T \quad \text{или} \quad \rho - \rho_0 = -\rho \beta \Delta T, \quad (5.26)$$

где  $\beta$  – коэффициент термической упругости (коэффициент объёмного расширения),  $1/^\circ\text{C}$ ;  $\rho_0$  – плотность газа (жидкости) при температуре  $T_0$ ,  $\text{кг/м}^3$ .

Тогда архимедова подъемная сила, вызванная разностью плотностей, на единицу объёма с учётом (5.26) будет

$$f_A = g(\rho - \rho_0) = -g\rho\beta\Delta T, \quad (5.27)$$

где  $f_A$  – удельная объёмная сила Архимеда,  $\text{Н/м}^3$ ;  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  – ускорение силы тяжести.

Перенос теплоты за счёт массовых сил называется *естественной* или *свободной конвекцией*. Кроме силы Архимеда на среду могут оказывать влияние и другие массовые силы, например, силы, связанные с электрическими и магнитными полями.

Перенос теплоты под действием внешних сил, сообщающих среде кинетическую энергию и вызывающих движение конечных объёмов среды, называется *вынужденной конвекцией*. При вынужденной конвекции интенсивность переноса теплоты может существенно превышать интенсивность переноса теплоты при естественной конвекции.

В движущейся среде уравнение теплопроводности (5.2) следует дополнить членом, учитывающим это движение,

$$\vec{q} = -\lambda_f \cdot \text{grad}T + c_p \rho_f \vec{w}T, \quad (5.28)$$

где  $\lambda_f$  – коэффициент теплопроводности движущейся среды (газа или жидкости),  $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ ;  $\rho_f$  – плотность этой среды,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $c_p$  – её теплоёмкость при постоянном давлении,  $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ ;  $\vec{w}$  – вектор скорости движения среды.

В правой части равенства (5.28) второй член учитывает конвективный перенос теплоты. На границе движущейся среды (на контрольной поверхности между движущейся средой и неподвижной внешней средой) касательная составляющая вектора скорости  $\vec{w}$  будет равна нулю, а его нормальная составляющая будет определяться процессами испарения и диффузии с этой поверхности. В том случае, когда такими процессами можно пренебречь, то теплообмен между поверхностью и средой будет представлять собой теплоотдачу, а уравнение (5.28) примет для этого случая вид

$$\vec{q} = -\lambda_f \cdot \text{grad}T|_{w_n \rightarrow 0}, \quad (5.29)$$

где  $w_n$  – нормальная составляющая вектора  $\vec{w}$ . Величина

$$\alpha = \frac{-\lambda_f \cdot \text{grad}T|_{w_n \rightarrow 0}}{\Delta T}, \quad (5.30)$$

где  $\Delta T$  – разность температур поверхности и внешней среды, называется *коэффициентом конвективной теплоотдачи*. Этот

коэффициент имеет размерность  $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ , то есть  $\alpha$  – это плотность

теплового потока на один градус перепада температур  $\Delta T$ .

Из соотношений (5,29) и (5.30) следует закон теплоотдачи Ньютона:

$$q = \alpha \cdot \Delta T, \quad (5.31)$$

то есть тепловой поток при конвективной теплоотдаче прямо пропорционален перепаду температур между контрольной поверхностью и внешней средой.

Этот закон позволяет сводить прикладные задачи по конвективной теплоотдаче к определению коэффициента  $\alpha$ . Последний, в отличие от коэффициента теплопроводности  $\lambda$ , не является физической характеристикой тела (среды), а зависит от многих факторов (формы и размеров тела, температуры, давления и скорости движения среды и т.д.). Диапазон численных значений  $\alpha$

достаточно широк –  $\alpha = (5 \dots 10^6) \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ . Примерный перечень

диапазонов для разных режимов теплоотдачи представлен в табл. 5.3.

Таблица 5.3

**Коэффициент конвективной теплоотдачи для различных режимов движения**

Режимы движения	Коэффициент конвективной теплоотдачи $\alpha$ , $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$
Свободная конвекция газов	5 ... 50
Вынужденная конвекция газов	30 ... $5 \cdot 10^2$
Свободная конвекция воды	$10^2$ ... $10^3$
Вынужденная конвекция воды	$5 \cdot 10^2$ ... $2 \cdot 10^4$
Кипение воды	$2 \cdot 10^3$ ... $4 \cdot 10^4$
Плёночная конденсация водяных паров	$4 \cdot 10^3$ ... $1,5 \cdot 10^4$
Капельная конденсация водяных паров	$4 \cdot 10^4$ ... $1,2 \cdot 10^5$

**Вопросы для самоконтроля и задания**

1. Какой теплообмен называется естественной конвекцией?
2. Какой теплообмен называется вынужденной конвекцией?
3. Напишите уравнение теплопроводности для движущейся среды.
4. Теплоотдача – это теплообмен между чем и чем?
5. Что такое коэффициент конвективной теплоотдачи?
6. Сформулируйте закон конвективной теплоотдачи Ньютона.
7. От чего зависит коэффициент конвективной теплоотдачи?
8. Почему вынужденная конвекция в сравнении с естественной конвекцией при прочих равных условиях создаёт более интенсивный теплообмен?

## 5.7. Тепловое излучение

В отличие от рассмотренных выше видов теплообмена в механизме теплового излучения среда распространения энергии теплового излучения пассивна по отношению к этому излучению и может лишь создавать помеху ему. Тепловое излучение – распространение электромагнитных волн инфракрасного диапазона длин (0,4...800) мкм. Энергия этого излучения зависит от температуры тела, состояния его поверхности, атомной и молекулярной структуры.

Рассмотрим такой теплообмен между двумя телами. Одно из них нагрето до высокой температуры, при которой возникает лучеиспускание. Это источник. А другое тело холодное – это приёмник теплового излучения, если на него воздействует внешнее тепловое излучение.

*Лучеиспускание* – это процесс превращения внутренней (тепловой) энергии тела в энергию электромагнитных волн инфракрасного диапазона. Лучеиспускание может быть *диффузионным* (энергия излучается равномерно по всем направлениям) и строго *направленным*.

*Поглощение* – это процесс превращения энергии принимаемого телом теплового излучения во внутреннюю (тепловую) энергию данного тела. Холодное тело (приёмник) в общем случае поглощает лишь часть падающего на него теплового излучения. Другая часть этой лучистой энергии может им отражаться и пропускаться через себя.

*Отражение* лучистой энергии может быть *диффузионным* (равномерным по всем направлениям) и *зеркальным* (по законам геометрической оптики).

Излучение, исходящее от тела и зависящее только от свойств и температуры этого тела, называется *собственным*. Излучение, которое тело получает от внешнего источника, называется *падающим*. Полная энергия падающего излучения, согласно закону сохранения энергии, равна

$$E_{nad} = E_A + E_R + E_D, \quad (5.32)$$

где  $E_A$  – часть падающей энергии, поглощаемой телом;  $E_R$  – часть падающей энергии, отражаемой телом;  $E_D$  – часть падающей энергии, проходящей сквозь тело.

Поделим (5.32) на величину  $E_{nad}$ . Получим уравнение

$$A + R + D = 1, \quad (5.33)$$

где  $A = E_A / E_{nad}$ ,  $R = E_R / E_{nad}$ ,  $D = E_D / E_{nad}$  – коэффициенты поглощения, отражения и пропускания соответственно. Эти

коэффициенты являются безразмерными величинами с численными значениями в интервале  $0 \dots 1$  и характеризуют способность тела поглощать, отражать и пропускать тепловое излучение.

Из (5.33) следуют такие крайние случаи:

- 1)  $A = 0, R = 0, D = 1$  – абсолютно прозрачное тело;
- 2)  $A = 0, R = 1, D = 0$  – абсолютно белое тело;
- 3)  $A = 1, R = 0, D = 0$  – абсолютно чёрное тело.

В реальности абсолютно прозрачных, белых и чёрных тел не существует. Имеются лишь некоторые приближения к ним.

Так как твёрдые и жидкие тела не являются абсолютно чёрными, то для них  $A < 1$ . Чем меньше этот коэффициент для некоторого тела, тем меньшую долю падающего излучения оно может поглотить.

Согласно *закону излучения Кирхгофа* отношение излучательной способности тела к его поглотительной способности одинаково для всех тел при данной температуре и данной частоте излучения и не зависит от их формы и физической природы. Из этого закона следует, что *степень черноты* тела можно измерять отношением плотности собственного излучения тела  $E$  к плотности собственного излучения абсолютно чёрного тела  $E_0$ , то есть

$$\varepsilon = \frac{E}{E_0}. \quad (5.34)$$

Степень черноты  $\varepsilon$  характеризует способность тел испускать и поглощать энергию излучения.

Зависимость плотности излучения абсолютно чёрного тела  $E_0$  от температуры  $T$  определяется *законом Стефана<sup>1</sup> – Больцмана*:

$$E_0 = \sigma_0 T^4 = C_0 \left( \frac{T}{100} \right)^4, \quad (5.35)$$

где  $C_0 = \sigma_0 \cdot 10^8 = 5,6686 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}$ ,  $\sigma_0$  – коэффициент излучения абсолютно чёрного тела, постоянная Стефана-Больцмана соответственно.

Для реальных (серых) тел плотность излучения найдётся из (5.34) и (5.35):

$$E = \varepsilon E_0 = \varepsilon \sigma_0 T^4 = \varepsilon C_0 \left( \frac{T}{100} \right)^4. \quad (5.36)$$

---

<sup>1</sup> Йозеф Стефан (1835 – 1893) – австрийский физик и математик. Член Австрийской академии наук (1865).

Плотность потока излучения зависит от его направления по отношению к нормали излучающей поверхности. Эта зависимость определяется *законом Ламберта*:

$$E_{\varphi} = E_n \cos \varphi, \quad (5.37)$$

где  $E_{\varphi}$  — плотность потока излучения, направленного под углом  $\varphi$  по отношению к направлению нормали к поверхности (рис. 5.6).

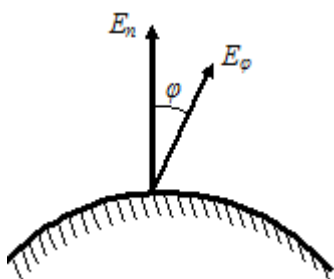


Рис. 5.6. Излучение  $E_{\varphi}$

Плотность излучения в полусферическое пространство  $E$  в  $\pi$  раз больше плотности потока излучения по нормали к поверхности  $E_n$  в единичном телесном угле, то есть  $E_n = \frac{E}{\pi}$ . Поэтому из закона Ламберта (5.37) следует выражение

$$E_{\varphi} = \frac{E}{\pi} \cos \varphi. \quad (5.38)$$

Закон Ламберта для абсолютно чёрных тел строго справедлив и достаточно точно выполняется для диэлектриков и окисленных поверхностей металлов при угле  $\varphi < 60^\circ$ .

Плотность потока излучения на сфере радиусом  $R_0$ , м, около равномерно (диффузно) изменяющегося точечного источника мощностью  $Q$ , Вт, равна [10, с. 540]

$$E = \frac{Q}{4\pi R_0^2}. \quad (5.39)$$

### Вопросы для самоконтроля и задания

1. Что представляет собой процесс лучеиспускания?
2. Что представляют собой процессы поглощения и отражения?
3. Какое тело называется абсолютно прозрачным?
4. Какое тело называется абсолютно белым?
5. Какое тело называется абсолютно чёрным?
6. Как определяется степень черноты тела?
7. Сформулируйте закон излучения Кирхгофа.
8. Сформулируйте закон Стефана – Больцмана.
9. Сформулируйте закон Ламберта<sup>1</sup>.
10. Как вычислить плотность потока излучения, направленного под углом  $\varphi$  по отношению к направлению нормали к поверхности?

<sup>1</sup> Иоганн Генрих Ламберт (1728 – 1777) – немецкий физик, философ, математик.



## 5.8. Уравнения Навье – Стокса

При рассмотрении реальных процессов теплообмена в сплошных средах нельзя не учитывать динамику сплошной среды, которая задаётся уравнениями движения, устанавливающими связь между движением и силами, их вызывающими [3,4]. Если не учитывать вязкость и теплопроводность жидкости или газа, то для такой идеальной модели в качестве уравнения движения подойдёт уравнение Эйлера<sup>1</sup>:

$$\rho \frac{d\vec{w}}{dt} = \rho \vec{F} - \text{grad}p, \quad (5.40)$$

где  $\rho = \rho(x, y, z, t)$  – поле плотности сплошной среды, кг/м<sup>3</sup>;  
 $\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z$  – вектор напряжённости силового поля, действующий на частицу среды с координатами  $x, y, z, \frac{m}{c^2}$ ;  
 $\vec{w} = \vec{w}(x, y, z, t)$  – векторное поле скоростей данной сплошной среды, м/с.

Практическое применение данного уравнения весьма ограничено, поскольку реальные газы и жидкости обладают вязкостью и теплопроводностью.

Движение вязкой жидкости описывают уравнения Навье<sup>2</sup> – Стокса<sup>3</sup>. Для несжимаемой жидкости они состоят из следующих двух уравнений:

$$\rho \frac{d\vec{w}}{dt} = \rho \vec{F} - \text{grad}p + \mu \Delta \vec{w}, \quad (5.41)$$

$$\text{div} \vec{w} = 0, \quad (5.42)$$

где в уравнении (5.41) в отличие от (5.40) в правой части появился член  $\mu \Delta \vec{w}$ , учитывающий вязкость жидкости;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости, Па·с.

Уравнение (5.42) здесь является уравнением неразрывности потока жидкости.

<sup>1</sup> Леонард Эйлер (1707 – 1783) — швейцарский, немецкий и российский математик и механик, внёсший фундаментальный вклад в развитие этих наук (а также физики, астрономии и ряда прикладных наук). Почти полжизни прожил в России. Академик Петербургской, Берлинской, Туринской, Лиссабонской и Базельской академий наук, иностранный член Парижской академии наук.

<sup>2</sup> Клод Луи Мари Анри Навье (1785 – 1836) – французский механик и инженер.

<sup>3</sup> Сэр Джордж Габриель Стокс (1819 – 1903) – ирландский математик, механик и физик-теоретик. Член Лондонского королевского общества (1851), его секретарь в 1854 – 1885 гг. и президент в 1885 – 1890 гг.

Для сжимаемых сред (газов) уравнения Навье – Стокса будут иметь ещё более сложный вид [6]:

$$\rho \frac{d\vec{w}}{dt} = \rho \vec{F} - \text{grad} p + (\mu' + \mu) \text{grad}(\text{div} \vec{w}) + \mu \Delta \vec{w}, \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{w} = 0. \quad (5.44)$$

Здесь  $\mu'$  – второй коэффициент вязкости, появившийся по причине свойства сжимаемости. При наличии этого свойства среды появляется ещё и объёмная вязкость  $\zeta = \mu' + \frac{2}{3}\mu$ . В зависимости от свойств сжимаемости среды она может изменяться в пределах  $0 \leq \zeta \leq \mu$ , поэтому  $-\frac{2}{3}\mu \leq \mu' \leq \frac{1}{3}\mu$ . Для одноатомного газа  $\zeta = 0$ , для многоатомного –  $\zeta \approx \mu$ .

Для описания уравнений Навье – Стокса удобно использовать *набла-оператор*, который можно рассматривать как псевдовектор, который можно скалярно и векторно перемножать с обычными векторами. Его координатами являются не числа, а операции частных производных по координатам декартова пространства

$$\nabla = \nabla \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (5.45)$$

При этом градиент от скалярной величины  $T$  будет записан так:

$$\nabla T = \left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial T}{\partial z} = \text{grad} T. \quad (5.46)$$

Дивергенция вектора  $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$  запишется как скалярное произведение  $\nabla$  на этот вектор:

$$\nabla \cdot \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = \text{div} \vec{w}. \quad (5.47)$$

А их векторное произведение определит ротор вектора  $\vec{w}$ :

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} &= \left( \frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \\ &+ \left( \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \text{rot} \vec{w}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Через набла-оператор выражается и оператор Лапласа:

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta, \quad (5.49)$$

и очень просто осуществляется преобразование выражений типа

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad}T) &= \nabla \cdot \nabla T = \nabla^2 T = \Delta T, \\ \operatorname{rot}(\operatorname{grad}T) &= \nabla \times (\nabla T) = (\nabla \times \nabla)T = 0. \end{aligned}$$

На языке набла-оператора уравнения Навье-Стокса примут вид

$$\rho \frac{d\vec{w}}{dt} = \rho \vec{F} - \nabla p + (\mu' + \mu) \nabla(\nabla \cdot \vec{w}) + \mu \nabla^2 \vec{w}, \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{w} = 0. \quad (5.51)$$

Несмотря на простоту и компактность записи уравнений Навье – Стокса (5.50), (5.51), их аналитическое решение вызывает серьёзные трудности. В отличие от уравнения Эйлера (5.40) уравнение (5.50) содержит члены, которые определяются через вторые частные производные, что значительно усложняет их интегрирование.

### Вопросы для самоконтроля

1. Для каких сред применимо уравнение Эйлера?
2. Напишите уравнения Навье – Стокса для несжимаемой жидкости.
3. Напишите уравнения Навье – Стокса для сжимаемой газовой среды.
4. Напишите уравнения Навье – Стокса для несжимаемой жидкости на языке набла-оператора.
5. Какой порядок имеет уравнение в частных производных Эйлера?
6. Какой порядок имеет система уравнений Навье – Стокса?

### 5.9. Система уравнений конвективного теплообмена

Чтобы оценить сложность задачи аналитического интегрирования уравнений Навье – Стокса, опишем их в декартовых координатах, избавившись от набла-оператора. Для трёхмерного пространства вместо одного уравнения (5.50), записанного в векторной форме, получатся три его проекции на соответствующие оси координат.

Полная производная по времени в левой части уравнения (5.50) для некоторой проекции  $\zeta \in \{x, y, z\}$  запишется как

$$\frac{dw_\zeta}{dt} = \frac{\partial w_\zeta}{\partial t} + \frac{\partial w_\zeta}{\partial x} + \frac{\partial w_\zeta}{\partial y} + \frac{\partial w_\zeta}{\partial z}, \quad (5.52)$$

а  $\zeta$  – проекция градиента от скалярного произведения  $\nabla \cdot \vec{w}$ :

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} (\nabla \cdot \vec{w}) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right). \quad (5.53)$$

Тогда уравнения Навье – Стокса в декартовых координатах примут вид

$$\left. \begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial w_x}{\partial t} + \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) = \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + (\mu' + \\ & + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right); \\ & \rho \left( \frac{\partial w_y}{\partial t} + \frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) = \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + (\mu' + \\ & + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right); \\ & \rho \left( \frac{\partial w_z}{\partial t} + \frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) = \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + (\mu' + \\ & + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right); \\ & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho w_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho w_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho w_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Чтобы получить полную систему дифференциальных уравнений конвективного теплообмена, к данным уравнениям следует добавить уравнение переноса теплоты (5.9), теплопроводности (5.28) и уравнения теплового излучения. Найти точное аналитическое решение такой системы уравнений второго порядка в частных производных до сих пор никому не удалось. Это довольно сложные уравнения в частных производных, и во многом их сложность связана с наличием вязкости среды.

Коэффициент вязкости сильно зависит от температуры. При небольших перепадах температур эту зависимость можно принять линейной вида [5]

$$\mu = \mu_0 [1 + \alpha(T - T_0)], \quad (5.54)$$

где  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости среды при температуре  $T$ , Па·с;  $\mu_0$  – коэффициент динамической вязкости среды при

температуре  $T_0$ , Па·с;  $\alpha$  – температурный коэффициент вязкости (для воздуха  $\alpha \approx 0.006 \text{ K}^{-1}$ ).

При больших температурных перепадах используют степенную зависимость

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^n, \quad (5.55)$$

где  $n$  – показатель степени: для одноатомных газов  $n = 0,5$ ; для максвелловских молекул  $n = 1$ ; для воздуха  $n = 0,76$ .

Более точные результаты даёт формула Сазерленда:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{C + 273}{C + T} \left( \frac{T}{273} \right), \quad (5.56)$$

где  $C$  – коэффициент, который для воздуха равен 117 К, для азота  $C(\text{N}_2) = 110 \text{ K}$ , для кислорода  $C(\text{O}_2) = 127 \text{ K}$ .

Кроме непостоянства коэффициентов в данной системе уравнений в частных производных серьёзную проблему представляют и граничные условия. В отличие от уравнения Эйлера здесь требуются дополнительные граничные условия из-за наличия здесь частных производных второго порядка.

Все эти проблемы делают задачу аналитического решения системы уравнений конвективного теплообмена практически невыполнимой.

Ещё 15 лет назад эту систему уравнений не умели решать и численными методами. Но в последние годы численные методы заметно прогрессируют. Однако и область применения этих методов существенно ограничена рядом факторов и получаемые численные решения системы данных уравнений применимы не для любых сред и случаев теплообмена. В области больших чисел Рейнольдса<sup>1</sup> решение не устойчиво. А для чисел Кнудсена<sup>2</sup>, близких к единице, данная система уравнений, описывающая движение сплошной среды, вообще не применима. Там применимы кинематические уравнения разреженных газов – физика свободномолекулярного движения, а не физика сплошной среды.

Большой научный интерес представляет изучение области перехода газодинамических сред из физики сплошной среды в физику

---

<sup>1</sup> Осборн Рейнольдс (1842 – 1912) — английский механик, физик и инженер, специалист в области гидромеханики и гидравлики. Член Лондонского королевского общества (1877).

<sup>2</sup> Мартин Ганс Христиан Кнудсен (1871 – 1949) – датский физик, преподававший и проводивший исследования в Датском техническом университете.

свободномолекулярного движения и построение общей теории для этих разделов физики. Особенно актуальной эта задача встала, когда в Советском Союзе началось развитие космонавтики. Земная атмосфера до высоты примерно 80 км (тропосфера, стратосфера и часть мезосферы) достаточно точно описывается физикой сплошной среды. На высоте выше примерно 120 км (термосфера и экзосфера) справедливы кинематические уравнения свободномолекулярного движения. То есть переходная область (в районе мезопаузы) полностью выпадает из математического моделирования, а именно в этой области зарождаются процессы, которые приводят к ураганам, тайфунам и другим природным явлениям. Для космонавтики же важны параметры среды в районе мезопаузы, соотношения и зависимости между ними. Поэтому в Советском Союзе была предложена программа исследования этой переходной области с помощью низкоперигейных спутников, но из-за трудностей финансирования была вскоре закрыта.

Трудности, связанные с математическим моделированием конвективного теплообмена, вызвали необходимость физического моделирования на основе теории подобия.

#### **Вопросы для самоконтроля и задания**

1. Перечислите все уравнения, входящие в математическую модель конвективного теплообмена.
2. Как коэффициент динамической вязкости зависит от температуры?
3. Перечислите основные трудности при интегрировании системы уравнений конвективного теплообмена.
4. Какие проблемы возникают при численном интегрировании этой системы уравнений?

#### **5.10. Физическое моделирование. Основные положения теории подобия**

То, что не удаётся определить с помощью математики, можно определить с помощью эксперимента. Однако натурные испытания (эксперимент непосредственно над объектом-оригиналом) довольно часто весьма дороги, опасны для окружающей среды, а иногда и вовсе невозможны. Гораздо дешевле и безопаснее проводить эксперименты над моделью – физической копией оригинала. Например, испытание водородной бомбы в несколько мегатонн тротила можно заменить испытанием водородной бомбы с килотонным зарядом, а затем на основе теории подобия пересчитать результаты эксперимента, определив параметры взрыва для мегатонного оригинала. В этом

случае килотонная водородная бомба будет физической моделью для мегатонной водородной бомбы.

Для расчёта процессов теплообмена используются уравнения для плотности тепловых и массовых потоков, записанных через коэффициенты конвективной теплоотдачи  $\alpha$  (5.30) и конвективной массоотдачи  $\beta$ :

$$q = \alpha \Delta T \text{ и } \dot{m} = \beta \Delta \rho.$$

При этом неизвестные коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  определяют из обобщённых (критериальных) уравнений, получаемых в теории подобия. Рассмотрим основные положения этой теории.

Главный её постулат состоит в том, что явления в природе и технике не могут зависеть от единиц измерения. Поэтому все величины в данной теории (в нашем случае  $T$ ,  $\rho$ ,  $q$ ,  $w$ ,  $\lambda$ ,  $c$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a$  и т.д.) следует представлять в безразмерной форме.

*Теорема 1.* Число безразмерных переменных  $\pi$  при общем числе размерных переменных  $n$  и числе первичных размерных переменных  $k$  равно

$$\pi = n - k.$$

В СИ первичными размерными переменными являются: время, с; длина, м; масса, кг; сила тока, А; температура, К; сила света, кд. Через них выражаются все остальные размерные переменные, например, скорость, м/с; сила, Н = кг·м/с<sup>2</sup> и т.д.

*Геометрическое подобие* модели оригиналу – это одинаковость формы, пропорциональность сходных сторон и равенство соответствующих углов. При геометрическом подобии для сходных сторон

$$\frac{X_1^M}{X_1^O} = \frac{X_2^M}{X_2^O} = \frac{X_3^M}{X_3^O} = \dots = k_L,$$

где  $X_i^M$  –  $i$ -я сторона модели, соответствующая  $i$ -й стороне оригинала  $X_i^O$ ;  $k_L$  – геометрический масштаб или константа геометрического подобия.

Для физического моделирования одного геометрического подобия недостаточно. Аналогично вводится понятие *кинематического подобия* – кинематические масштабы для полей скорости, *динамическое подобие* для полей сил, подобие температурных полей и тепловых потоков. Для нестационарных процессов следует вводить и временной масштаб

$$k_t = \frac{t_i^M - t_0}{t_i^O - t_0},$$

который отсчитан от единого момента отсчёта  $t_0$  для сходных моментов модели  $t_i^m$  и оригинала  $t_i^o$ .

Величины считаются *однородными*, если они имеют одинаковую размерность и одинаковый физический смысл. В подобных процессах однородные величины связаны между собой константами подобия. Например, если рассмотреть процессы (5.56а) и

$$(5.56б), \text{ описываемые уравнением Бернулли}^1 \quad d\left(\Delta p + \frac{\rho w^2}{2}\right) = 0$$

$$\frac{d(\Delta p_a)}{\rho_a} = -\frac{d(w_a^2)}{2}, \quad (5.56а)$$

$$\frac{d(\Delta p_{\bar{o}})}{\rho_{\bar{o}}} = -\frac{d(w_{\bar{o}}^2)}{2}, \quad (5.56б)$$

то на основании их подобия:  $\Delta p_{\bar{o}} = k_p \Delta p_a$ ,  $\rho_{\bar{o}} = k_\rho \rho_a$ ,  $w_{\bar{o}} = k_w w_a$ , где  $k_p, k_\rho, k_w$  – константы подобия полей давления, плотности и скорости соответственно, из (5.56б) получим

$$\frac{d(k_p \Delta p_a)}{k_\rho \rho_a} = -\frac{d(k_w^2 w_a^2)}{2} \Rightarrow \frac{k_p}{k_\rho k_w^2} \frac{d(\Delta p_a)}{\rho_a} = -\frac{d(w_a^2)}{2}.$$

Тогда из сравнения полученного результата с (5.56а) следует, что  $\frac{k_p}{k_\rho k_w^2} = 1$  и, следовательно,

$$\frac{\Delta p_{\bar{o}}}{\rho_{\bar{o}} w_{\bar{o}}^2} = \frac{\Delta p_a}{\rho_a w_a^2} = idem, \quad (5.57)$$

где *idem* означает, что для всех подобных процессов величина  $\frac{\Delta p}{\rho w^2}$

одна и та же.

### Вопросы для самоконтроля и задания

1. Чем физическая модель отличается от математической?
2. Сформулируйте главный постулат теории подобия.
3. Что такое геометрическое подобие?

---

<sup>1</sup> Даниил Бернулли (1700 – 1782), швейцарский физик-универсал, механик и математик, один из создателей кинетической теории газов, гидродинамики и математической физики. Академик и иностранный почётный член (1733) Петербургской академии наук, член академий: Болонской (1724), Берлинской (1747), Парижской (1748), Лондонского королевского общества (1750).



4. Достаточно ли только одного геометрического подобия модели оригиналу? Если нет, то какие ещё должны быть выполнены условия, чтобы модель была адекватна оригиналу?
5. Сформулируйте *теорему 1* теории подобия.
6. Что такое константа подобия?
7. Какие существуют константы подобия?

### 5.11. Критерии подобия и их физический смысл

*Критерии подобия* – это такие формулы из размерных величин, для которых сочетания констант подобия равно единице. Одна из таких формул  $\frac{\Delta p}{\rho w^2}$  была получена выше. Это критерий подобия

Эйлера (или число Эйлера  $Eu = \frac{\Delta p}{\rho w^2}$ ).

Аналогично можно получать критерии подобия для других процессов. В частности, если рассматривать теплопроводность в одномерном температурном поле без внутренних источников теплоты и в неподвижной среде, то такой процесс теплообмена определится из (5.11) в виде частного случая

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (5.58)$$

Два подобных процесса  $a$  и  $b$ , соответствующие этому случаю, будут иметь следующие константы подобия:

$$k_t = \frac{t_b}{t_a}, k_T = \frac{T_b}{T_a}, k_L = \frac{x_b}{x_a}, k_a = \frac{a_b}{a_a}.$$

Тогда из  $\frac{\partial T_b}{\partial t_b} = a_b \frac{\partial^2 T_b}{\partial x_b^2}$  получим  $\frac{k_T \partial T_a}{k_t \partial t_a} = k_a a_a \frac{k_T \partial^2 T_a}{\partial x_a^2}$ . Откуда

$$\frac{\partial T_a}{\partial t_a} = a_a \frac{\partial^2 T_a}{\partial x_a^2} \cdot \frac{k_a k_t}{k_L^2} \Rightarrow \frac{k_a k_t}{k_L^2} = 1. \text{ Следовательно, } \frac{at}{L^2} = idem.$$

Найденная величина

$$\frac{at}{L^2} = Fo$$

называется критерием Фурье.

Так можно получить все основные критерии подобия для различных уравнений движения и переноса теплоты. Запишем их в следующей таблице [10, с. 316 – 318].

Таблица 5.4

## Основные критерии подобия

Символ и формула критерия	Наименование	Физический смысл
1	2	3
$Ho = \frac{wt}{L}$	Критерий гидромеханической гомохронности	Мера отношения переносного (конвективного) ускорения к ускорению в данной точке
$Re = \frac{wL}{\nu}$	Критерий режима движения. Число Рейнольдса	Мера отношения сил инерции к силам вязкости (внутреннего трения)
$Gr = \frac{\beta \Delta T L^3 g}{\nu^2}$	Критерий свободного движения среды. Число Грасгофа	При свободной конвекции мера отношения подъёмной силы к силам вязкости в неизотермном потоке
$Eu = \frac{\Delta p}{\rho w^2}$	Критерий подобия полей давления. Число Эйлера	Мера отношения сил давления к силам инерции в потоке
$Fr = \frac{w^2}{gL}$	Критерий гравитационного подобия. Число Фруда	Мера отношения сил тяжести к силам инерции в потоке
$Ga = \frac{gL^3}{\nu^2}$	Критерий полей свободного течения. Число Галилея	Мера отношения сил тяжести к силам вязкости в потоке
$Ar = \frac{gL^3 \Delta \rho}{\nu^2 \rho}$	Число Архимеда	Мера отношения подъёмных сил к силам вязкости в потоке
$Nu = \frac{\alpha L}{\lambda_f}$ ( $Nu_M = \frac{\beta \cdot L}{D}$ )	Безразмерный коэффициент теплоотдачи (массоотдачи). Тепловое (диффузионное) число Нуссельта	Характеризует увеличение теплообмена (массообмена) за счёт конвекции по сравнению с чисто молекулярным переносом
$Pr = \frac{\nu}{a_p} = \frac{\mu c_p}{\lambda_f}$ ( $Sc = \frac{\nu}{D}$ )	Тепловое (диффузионное) число Прандтля (Шмидта)	Характеризует подобие полей скорости и температуры (массы). При $\nu = a_p = D$ поля скоростей, температур и концентраций подобны
$Wc = \frac{\rho w L}{\sigma}$	Число Вебера	Мера отношения сил инерции к силам поверхностного натяжения в двухфазном потоке
$Po = \frac{Q_v L^2}{\Delta T \lambda_w}$	Критерий обобщённой интенсивности внутренних источников теплоты. Число Померанцева	Мера отношения мощности источника теплоты в единице объёма к количеству теплоты, переносимому в этом объёме через единицу поверхности с характерным размером $L$

1	2	3
$Le = \frac{D}{a}$	Число Льюиса-Семёнова $Le = \frac{Pr}{Sc}$	Характеризует подобие безразмерных полей температур и концентраций
$Pe = \frac{wL}{a}$ ( $Pe_M = \frac{wL}{D}$ )	Критерий теплового (массового) подобия. Тепловое (диффузионное) число Пекле	Характеризует соотношение конвективного и молекулярного переноса теплоты (вещества) в потоке
$Fo = \frac{at}{L^2}$ ( $Fo_M = \frac{Dt}{L^2}$ )	Критерий тепловой (массовой) гомохронности. Тепловое (диффузионное) число Фурье	Характеризует связь между физическими свойствами, размерами тела и скоростью изменения в нём полей температуры (концентрации)
$St = \frac{\alpha}{c_p \rho w}$ ( $St_M = \frac{\beta}{w}$ )	Критерий конвективного переноса теплоты (вещества). Тепловое (диффузионное) число Стентона	Характеризует соотношение скорости переноса теплоты (вещества) и линейной скорости потока
$Bi = \frac{\alpha L}{\lambda_w}$	Критерий краевого подобия. Число Био	Характеризует связь между полем температур в твёрдом теле и условиями теплоотдачи на его поверхности
$Ku = \frac{r}{c_p \Delta T_s}$	Критерий фазового перехода. $\Delta T_s$ – перегрев (переохлаждение) относительно температуры фазового перехода; $r$ – теплота фазового перехода	Характеризует соотношение теплоты фазового перехода и теплоты перегрева (переохлаждения) вновь образующейся фазы

Дадим краткие пояснения для критериев подобия из данной таблицы. Критериями гидродинамического подобия здесь являются  $Ho, Re, Gr, Eu, Er$ ; критерии теплового подобия –  $Pr, Pe, St, Fo, Po, Nu$ ; критерии диффузионного подобия –  $Sc, Re_M, St_M, Fo_M, Nu_M$ .

Тепловое число Прандтля  $Pr = \frac{\nu}{a_p}$  для газов практически не зависит от температуры, давления, а зависит лишь от атомности газа: для одноатомных газов  $Pr \approx 0,67$ , двухатомных –  $Pr \approx 0,7$ , многоатомных –  $Pr = 1$ . Для капельных жидкостей  $Pr \approx 10^2 \div 10^3$  и с увеличением температуры уменьшается. В качестве теплоносителя

иногда используют расплавленные металлы – литий, натрий и т.д. Для них  $Pr \approx 5 \cdot 10^{-3} \dots 5 \cdot 10^{-2}$ .

Диффузионное число Прандтля (число Шмидта)  $Pr_M = Sc = \frac{\nu}{D}$  больше теплового  $Pr_M > Pr$ , и для жидкостей оно может достигать  $10^3$  и более. Для газов в смеси с воздухом это число можно оценить по формуле  $Pr_M = 0,145 \mu^{0,556}$ , при этом погрешность вычислений не будет превышать 30 %.

Без учёта сжимаемости и при безградиентном течении ( $\nabla p = 0$ ) для газов имеет место тройная аналогия процессов переноса теплоты, вещества и количества движения, вытекающая из равенств (1.17).

Выбор в качестве характерного размера  $L$ , входящего в критерии подобия, конкретной величины, зависит от процесса и условий его протекания. При течении в трубах и каналах в качестве  $L$  принимают *гидравлический диаметр*

$$L = d_r = \frac{S_f}{\Pi},$$

где  $S_f$  – площадь поперечного сечения трубы (русла),  $m^2$ ;  $\Pi$  – смоченный периметр, м.

При обтекании тела за характерный размер  $L$  принимается размер обтекаемого тела с учётом конкретных условий.

### **Вопросы для самоконтроля и задания**

1. Что называется критерием подобия?
2. Что характеризует число Рейнольдса?
3. Какой критерий подобия характеризует увеличение теплообмена за счёт конвекции?
4. Перечислите числа, входящие в группу критериев теплового обмена.
5. Как определяется характерный размер при рассмотрении течений по трубам?

## **5.12. Приведение дифференциальных уравнений теплообмена к безразмерному виду**

Как уже отмечалось выше, все уравнения в теории подобия должны быть приведены к безразмерному виду. В качестве примера приведём к безразмерному виду уравнение, описывающее процесс теплообмена одномерного температурного поля в движущейся среде. Такое уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + w_x \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (5.59)$$

где  $w_x = \frac{dx}{dt}$  – скорость частицы движущейся среды в точке  $x$  в момент времени  $t$ .

Если средняя скорость потока  $w$ , то безразмерную скорость можно определить как  $\bar{w} = \frac{w_x}{w}$ . Введём также безразмерные величины

расстояния  $\bar{x} = \frac{x}{L}$  и температуры

$$\bar{\theta} = \frac{T - T_w}{T_f - T_w}, \quad (5.60)$$

где  $T_w$  – температура на граничной поверхности;  $T_f$  – температура внешней среды.

Подставим эти безразмерные величины в (5.59), получим

$$\frac{(T_f - T_w) \partial \bar{\theta}}{\partial t} + w \bar{w} \frac{(T_f - T_w) \partial \bar{\theta}}{L \partial \bar{x}} = a \frac{(T_f - T_w) \partial^2 \bar{\theta}}{L^2 \partial \bar{x}^2}.$$

Разделим полученное уравнение на величину  $a \frac{T_f - T_w}{L^2}$ . Тогда

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \left( \frac{at}{L^2} \right)} + \left( \frac{wL}{a} \right) \bar{w} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{x}^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial Fo} + Pe \cdot \bar{w} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{x}^2}, \quad (5.61)$$

где  $Fo = \frac{at}{L^2}$  – тепловое число Фруда;  $Pe = \frac{wL}{a}$  – тепловое число

Пекле.

Последнее уравнение – это дифференциальное уравнение в безразмерном виде, описывающее процесс теплообмена одномерного температурного поля в движущейся среде. В него входят два критерия подобия  $Fo, Pe$ . Критериев подобия при подобных преобразованиях всегда получается на единицу меньше числа членов исходного уравнения.

Уравнение (5.61) будет иметь единственное решение при заданных начальных и граничных условиях. Величины, входящие в эти условия, являются независимыми постоянными по отношению ко всем остальным величинам, входящим в основное уравнение.

Дифференциальные уравнения безразмерного вида содержат критерии подобия, среди которых будут и такие, которые составлены

из постоянных величин, входящих в условия *однозначности* (корректные начальные и граничные условия). Такие критерии называются *определяющими*. Они могут быть вычислены уже при постановке задачи. *Неопределяющими критериями подобия* называются все остальные, то есть такие, в состав которых входят другие величины, в том числе и переменные. Согласно *теореме 1* для подобных процессов должны быть равны все критерии подобия (определяющие и неопределяющие), входящие в уравнения описания этих процессов.

Следовательно, процессы, описываемые одними и теми же дифференциальными уравнениями, но имеющими разные условия однозначности, не могут быть подобными. Для выполнения условия подобия необходимо, чтобы и условия однозначности были подобными и имели одинаковые определяющие критерии.

Использование безразмерных переменных и критериев подобия вместо размерных величин позволяет существенно упростить обработку опытных данных и получения зависимостей между ними.

#### Вопросы для самоконтроля

1. Как приводится температура к безразмерному виду?
2. От чего зависит число критериев подобия уравнения в безразмерном виде?
3. Какие критерии подобия называются определяющими, а какие – неопределяющими?
4. Какие условия для подобных процессов должны быть выполнены?

### 5.13. Критериальные уравнения

*Теорема 2.* Решение дифференциального уравнения может быть получено в виде соотношения между критериями подобия, входящими в это уравнение в безразмерном виде.

Такие соотношения называются *критериальными уравнениями*. В задачах конвективного теплообмена определяемой величиной является коэффициент конвективной теплоотдачи  $\alpha$ , который согласно (5.30) можно записать как

$$\alpha = \frac{-\lambda_f \cdot \nabla T|_{w_n \rightarrow 0}}{\Delta T} = \frac{-\lambda_f \cdot \frac{\partial T}{\partial n}|_{w_n \rightarrow 0}}{T_f - T_w},$$

а в безразмерном виде с учётом (5.60)

$$\alpha = -\lambda_f \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{L \partial \bar{n}} \Big|_{w_n \rightarrow 0} \quad \text{или} \quad \frac{\alpha L}{\lambda_f} = Nu = - \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{n}} \Big|_{w_n \rightarrow 0}. \quad (62)$$

Критерий Нуссельта, согласно *теореме 2*, может быть представлен в виде функции от критериев подобия, входящих в дифференциальное уравнение, описывающее рассматриваемый процесс.

Для наиболее характерных процессов теплообмена в установившемся режиме критерий Нуссельта является функцией критериев Прандтля, Рейнольдса и Грасгофа

$$Nu = f(Pr, Re, Gr),$$

причём для свободной конвекции  $Nu = f(Pr, Gr)$ , а для вынужденной конвекции  $Nu = f(Pr, Re)$ .

Довольно часто эти функциональные зависимости сводятся к степенному виду. Для свободной конвекции

$$Nu = C_1 Pr^{n_1} Gr^{m_1}, \quad (5.63)$$

а для вынужденной конвекции

$$Nu = C_2 Pr^{n_2} Re^{m_2}, \quad (5.64)$$

где постоянные  $C_1, n_1, m_1, C_2, n_2, m_2$  могут быть определены экспериментально.

Таким образом, безразмерный коэффициент теплоотдачи  $Nu$  при свободной конвекции зависит от критерия свободного движения среды  $Gr$ , а при вынужденной конвекции – от критерия режима движения  $Re$ .

Аналогичные критериальные уравнения описывают и процессы переноса вещества. Для свободной конвекции

$$Nu_M = C_3 Pr_M^{n_3} Gr^{m_3}, \quad (5.63)$$

а для вынужденной конвекции

$$Nu_M = C_4 Pr_M^{n_4} Re^{m_4}. \quad (5.64)$$

Следует иметь в виду, что постоянные  $C_i, n_i, m_i$  получены для строго определённых диапазонов критериев  $Pr, Re, Gr$ , которые должны быть указаны. И только для данных диапазонов эти постоянные будут задавать правильные зависимости. Например, для теплообмена при обтекании шара газом (для газов  $Pr \approx 1$ ) при режиме движения  $Re > 200$  получается критериальное уравнение  $Nu = 0,54 Re^{0,5}$ , которое не будет годиться для капельных жидкостей, так как для них  $Pr > 1$ , и расплавов металлов, так как для них  $Pr \ll 1$ . Это критериальное уравнение будет справедливо только для газового потока, обдувающего шар, при обязательном выполнении условия

$$Re = \frac{wL}{\nu} = \frac{\rho w d}{\mu} > 200, \quad (5.65)$$

где плотность  $\rho$ , скорость  $w$ , вязкость  $\mu$  газа и диаметр  $d$  шара могут быть разными, лишь бы выполнялось условие (5.65).

*Теорема 3.* Для подобия процессов и явлений определяющие критерии подобия должны быть соответственно одинаковыми, а условия однозначности (краевые условия) подобны.

Выше эта теорема была использована при определении условий подобия процессов и явлений.

### **Вопросы для самоконтроля и задания**

1. Сформулируйте вторую теорему подобия.
2. Что такое критериальное уравнение?
3. Что представляет собой коэффициент теплоотдачи в безразмерном виде?
4. Напишите критериальные уравнения конвективного теплообмена для свободной и вынужденной конвекции.
5. В трубе диаметром 0,1 м происходит конвективный теплообмен в газовой среде при  $Nu = 10$ . Чему равен коэффициент теплоотдачи, если теплопроводность газа

$$\lambda_f = 0,03 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} ?$$

### **5.14. Достоинства и недостатки физического моделирования**

Главным достоинством физического моделирования является возможность изучения физических явлений, не поддающихся математическому описанию. К достоинствам метода также следует отнести полное воспроизводство процесса и его наглядность.

К недостаткам метода физического моделирования относятся:

- 1) высокая стоимость моделей сложных объектов;
- 2) изменение параметров оригинала часто требует создания для него новой модели;
- 3) метод в ряде случаев имеет серьёзные ограничения, а иногда и вовсе не применим.

Рассмотрим на простых примерах ситуации, когда имеет место последний недостаток.

Пусть в аэродинамической трубе обдувается модель обтекателя летательного аппарата с целью определения силы лобового сопротивления воздуха. Оригинал и модель должны удовлетворять одному и тому же критерию режима движения, то есть  $Re_O = Re_M$  или

$$\frac{w_O d_O}{\nu_O} = \frac{w_M d_M}{\nu_M}.$$



Если принять кинематические вязкости воздуха для модели и оригинала равными ( $\nu_M = \nu_O$ ), то  $w_M = w_O \frac{d_O}{d_M}$ . Поэтому во сколько раз в модели уменьшен размер (диаметр миделева сечения), во столько же раз следует увеличить скорость обдувания модели  $w_M$ . Чтобы уменьшить влияние внутренней стенки трубы на процесс обдувания модели, размер  $d_M$  должен быть небольшим – много меньше внутреннего диаметра трубы. В связи с этим и из соображений стоимости модели потребуется в десятки раз увеличить скорость  $w_M$  по сравнению с  $w_O$ , а на это может не хватить мощности аэродинамической трубы.

Если попытаться как-то компенсировать увеличение требуемой скорости  $w_M$  за счёт уменьшения кинематической вязкости, применяя газ с наименьшим коэффициентом кинематической вязкости  $\nu_M$ , то это мало что даст, так как никакой газ не имеет этот коэффициент ниже, чем у воздуха, более чем в два с половиной раза. Заменять же воздух жидкостью нельзя, так как для жидкостей  $Pr > 1$ .

В том случае, когда модель по размерам значительно меньше оригинала, следует при установлении подобия учитывать ещё и силы тяжести, то есть критерий гравитационного подобия (число Фруда  $Fr = \frac{w^2}{gL}$ ) должен быть у оригинала и модели одним и тем же. Тогда получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{w_O d_O}{\nu_O} &= \frac{w_M d_M}{\nu_M}, \\ \frac{w_O^2}{g_O d_O} &= \frac{w_M^2}{g_M d_M}. \end{aligned} \right\} \quad (5.66)$$

Пусть  $\nu_M = \nu_O$  и  $g_M = g_O$ . Тогда из данной системы уравнений получим систему

$$\left. \begin{aligned} w_O d_O &= w_M d_M, \\ \frac{w_O^2}{d_O} &= \frac{w_M^2}{d_M}. \end{aligned} \right\} \quad (5.67)$$

Эта система имеет единственное решение  $d_M = d_O$ , что делает бесполезным моделирование.

Увеличить ускорение силы тяжести модели  $g_M$  можно, если раскрутить аэродинамическую трубу в центрифуге. Видимо, реализация такой идеи выльется в очень высокую стоимость

эксперимента. Но даже в этом случае из второго уравнения системы (5.66) следует  $g_M = g_O \frac{d_O w_M^2}{d_M w_O^2}$ , а из первого уравнения этой же

системы при  $v_M = v_O$  скорость обдувания модели  $w_M = w_O \frac{d_O}{d_M}$ .

Тогда  $g_M = g_O \left( \frac{d_O}{d_M} \right)^3$ , то есть при уменьшении размеров модели в 9

раз, чтобы получить равенство критериев подобия, необходимо на центрифуге достичь ускорение  $g_M = g_O \cdot 9^3 = 729g$ . Таких перегрузок не выдержит ни одна конструкция.

Откажемся от идеи с центрифугой и примем  $g_M = g_O$ . Тогда из (5.66) получим

$$\frac{d_M}{d_O} = \left( \frac{v_M}{v_O} \right)^{2/3}.$$

Поскольку любой газ не может иметь вязкость ниже вязкости воздуха не более чем в два с половиной раза, то

$d_M = d_O \left( \frac{1}{2,5} \right)^{2/3} \approx 0,54d_O$ . То есть размеры модели в этом случае

могут быть меньше размеров оригинала даже меньше чем в два раза. Видимо, в подобных случаях дешевле будет обдувать сами оригиналы и не тратить на создание их физических моделей.

Тем не менее для многих инженерно-технических задач метод физического моделирования является весьма полезным как в исследовательских целях, так и для решения практических задач.

### **Вопросы для самоконтроля и задания**

1. Перечислите основные достоинства метода физического моделирования.
2. Перечислите основные недостатки метода физического моделирования.
3. Какой физический смысл имеет число Рейнольдса?
4. Какой физический смысл имеет число Фруда?

### Библиографический список

1. Алексеев, Г.Н. Общая теплотехника / Г.Н. Алексеев.– М. : Высшая школа, 1980.
2. Андриющенко, А.И. Основы технической термодинамики реальных процессов / А.И. Андриющенко.– М. : Высшая школа, 1975.
3. Тирский, Г.А. Лекция 1. Вихри идеальной жидкости [Электронный ресурс] : видео / Г.А. Тирский. – Режим доступа : <https://www.youtube.com/watch?v=hyZg65tiCyg>, свободный. – Загл. с экрана (дата обращения к ресурсу : 05.12.2016).
4. Тирский, Г.А. Лекция 2. Вихревая нить [Электронный ресурс] : видео / Г.А. Тирский.– Режим доступа : <https://www.youtube.com/watch?v=Njy7fbvmxEs>, свободный. – Загл. с экрана (дата обращения к ресурсу: 05.12.2016).
5. Тирский, Г.А. Лекция 3. Вязкая теплопроводная жидкость [Электронный ресурс] : видео / Г.А. Тирский. – Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=6QI9P1-1ovk&spfreload=10>, свободный. – Загл. с экрана (дата обращения к ресурсу: 05.12.2016).
6. Тирский, Г.А. Лекция 4. Уравнения Навье – Стокса [Электронный ресурс]: видео / Г.А. Тирский. – Режим доступа : <https://www.youtube.com/watch?v=R1mC-ScfWmc&spfreload=10>, свободный. – Загл. с экрана (дата обращения к ресурсу: 05.12.2016).
7. Гухман, А.А. Об основаниях термодинамики / А.А. Гухман. – М. : Энергоатомиздат, 1986.
8. Новиков, И.И. Термодинамика / И.И. Новиков.– М. : Машиностроение, 1984.
9. Савельев, И.В. Курс общей физики / И.В. Савельев. – Том 1, часть 3. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1970.
10. Теплотехника : учеб. для вузов / В.Н. Луканин, М.Г. Шатров, Г.М. Камфер и др.; под ред. В.Н. Луканина.– 2-е изд., перераб. – М. : Высшая школа, 2000.
11. Червенчук, В.Д. Учебное пособие по физике : учебное пособие / В.Д. Червенчук. – Омск : Полиграфический центр КАН, 2013.
12. Червенчук, В. Д. Термодинамические процессы в теплотехнике : учебное пособие / В. Д. Червенчук. – Тара : Издательство ТФ ОмГАУ, 2008.
13. Червенчук, В.Д. Введение в дискретную математику и логику : учебное пособие / В.Д. Червенчук, И.В. Червенчук. – М. : Столица, 2011.
14. Шорин, С.Н. Теплопередача / С.Н. Шорин. – М. : Высшая школа, 1964.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ  
Работа № 1. АНАЛИЗ РАБОТЫ И РАСЧЕТ ОТДЕЛЬНЫХ  
ЭЛЕМЕНТОВ КОТЛОАГРЕГАТА

**Цель работы:** освоение приемов пользования таблицами теплоемкостей компонентов газовой смеси, методов расчета отдельных элементов котлоагрегата паросиловой установки.

**1. Исходные данные для выполнения работы**

1.1. Производительность котла  $D$ , т/ч.

1.2. Топливо: вид, месторождение, испарительность  $I$ , кг/кг; состав и объем  $V$ , м<sup>3</sup>/кг, продуктов сгорания; теплота сгорания топлива  $Q_H^P$ , кДж/кг.

1.3. Режим работы котлоагрегата (снижение температуры дымовых газов):

– в топке в результате лучистого теплообмена с  $t_1^T$  до  $t_2^T$ , °С;

– в зоне кипяtilьных труб вследствие конвективного теплообмена с  $t_1^K$  до  $t_2^K$ , °С;

– в экономайзере вследствие конвективного теплообмена с  $t_1^{ЭК}$  до  $t_2^{ЭК}$ , °С.

1.4. Режим работы паросиловой установки (ПСУ):

– мощность паровой турбины  $N_T$  [кВт];

– удельный расход пара  $d_0$  [кг/(кВт·ч)];

– температура воды, добавляемой из водопровода  $t_{д.в.}$ , °С.

1.5. Режим работы экономайзера:

– разряжение в газоходах экономайзера  $W_{ЭК}$  [мм вод. ст.];

– приведенное барометрическое давление  $B$ , мм рт. ст.;

– коэффициент теплопередачи экономайзера  $K$ , Вт/(м<sup>2</sup>·К).

Все эти исходные данные для расчетов по вариантам приведены в табл. П.1.1 и П.1.2.

**2. Порядок выполнения работы**

2.1. Изучить принципиальную схему паросиловой установки (ПСУ), представленной на рис. П.1.1. Ознакомиться с процессом производства пара с помощью данной ПСУ, уяснить функциональное назначение входящих в эту схему элементов. Затем приступить к следующим этапам.

Таблица П.1.1

## Исходные данные по топливу

№ варианта	Д, т ч	Месторождение	И, кг кг	$Q_{Н}^P$ , кДж кг	Объем продуктов сгорания, м <sup>3</sup> /кг		
					СО <sub>2</sub>	Н <sub>2</sub> О	Н <sub>2</sub>
1	12	Кизеловское	5,0	21700	0,94	0,60	4,20
2	14	Богословское	5,2	11300	0,99	0,57	4,37
3	6	Кемеровское	5,4	23960	0,64	0,67	2,59
4	8	Бабаевское	5,6	27910	0,5	0,97	2,20
5	10	Подмосковное	5,8	10224	0,5	0,98	2,20
6	12	Минусинское	6,0	25360	0,79	0,69	3,23
7	16	Челябинское	6,2	14600	0,84	0,82	3,51
8	18	Карагандинское	6,4	22800	0,79	0,61	3,31
9	20	Ленинское	6,6	24690	0,79	0,69	3,23
10	12	Экибастузское	6,8	17100	1,26	0,70	5,45
11	14	Райчихинское	7,0	19200	0,83	0,59	3,57
12	6	Калужское	6,2	24320	0,71	0,77	2,87
13	8	Макарьевское	6,5	20120	0,56	0,77	2,36
14	10	Сучанское	6,6	18080	0,41	0,90	1,76
15	12	Подгородненское	6,7	17400	1,02	0,56	4,40
16	16	Таврическое	6,8	18050	0,93	0,43	3,97
17	18	Гусиноозерское	6,9	11360	0,89	0,64	3,79
18	20	Богословское	5,2	11300	0,99	0,57	4,37
19	12	Егоршинское	5,6	25500	0,64	0,67	2,85
20	6	Донецкое	5,8	26500	1,25	0,47	5,69
21	16	Галимовское	6,0	21500	1,36	0,50	5,77
22	8	Липовецкое	6,2	21800	1,19	0,60	5,91
23	10	Азейское	7,2	21400	0,94	0,61	3,91
24	12	Кизеловское	5,0	21700	0,94	0,60	4,20
25	16	Богословское	5,2	11300	0,99	0,57	4,37
26	18	Кемеровское	5,4	23960	0,64	0,67	2,59
27	14	Бабаевское	5,6	27910	0,5	0,97	2,20
28	16	Подмосковное	5,8	10224	0,5	0,98	2,20
29	8	Минусинское	6,0	25360	0,79	0,69	3,23
30	10	Челябинское	6,2	14600	0,84	0,82	3,51
31	12	Карагандинское	6,4	22800	0,79	0,61	3,31
32	16	Ленинское	6,6	24690	0,79	0,69	3,23

Таблица П.1.2

## Исходные данные по режимам работы

№ варианта	Режимы работы												
	котлоагрегата						ПСУ				экономайзера		
	$t_1^T$	$t_2^T$	$t_1^K$	$t_2^K$	$t_1^{\text{ЭК}}$	$t_2^{\text{ЭК}}$	$N_T$	$d_0$	$W_K$	$t_{\text{Д.В.}}$	$W_{\text{ЭК}}$	$B$	$K$
	°С	°С	°С	°С	°С	°С	кВт	кг/(кВт·ч)	мм рт.ст.	°С	мм вод.ст.	мм рт.ст.	Вт/(м <sup>2</sup> ·К)
1	1200	850	850	650	650	250	300	6,0	550	15	35	745	29
2	1300	1150	1150	800	800	450	700	6,1	560	16	36	745	30
3	1100	850	850	650	650	300	900	6,2	570	17	37	740	31
4	1000	800	800	650	650	350	1000	6,3	580	18	38	735	32
5	1200	900	900	650	650	300	1200	6,4	590	19	39	750	34
6	1100	900	900	650	650	250	1500	6,5	600	20	40	745	32
7	1000	750	750	500	500	300	200	6,6	610	21	41	747	38
8	950	750	750	600	600	300	2500	6,0	550	22	42	740	40
9	1200	850	850	600	600	300	3000	6,1	560	15	43	735	42
10	1100	800	800	500	500	300	300	6,2	570	16	44	750	44
11	1200	800	800	600	600	200	650	6,3	580	17	45	755	29
12	1100	800	800	400	400	200	850	6,4	590	18	46	745	31
13	950	700	700	450	450	250	950	6,5	600	19	47	735	33
14	1200	900	900	500	500	250	1000	6,6	610	20	48	745	35
15	1100	800	800	400	400	300	1200	6,0	620	21	49	745	37
16	1050	950	950	500	500	300	1300	6,1	630	22	50	745	39
17	1000	800	800	400	400	300	1800	6,2	590	23	45	745	38
18	1200	800	800	600	600	300	2000	6,3	580	15	46	745	36
19	1100	900	900	500	500	300	250	6,4	570	16	47	740	34
20	1050	800	800	600	600	250	700	6,5	560	17	48	740	32
21	1000	800	800	500	500	300	800	6,6	550	18	49	750	40
22	950	750	750	500	500	300	950	6,0	540	19	50	750	28
23	1000	800	800	500	500	200	1200	6,1	600	20	51	752	29
24	1200	1000	1000	800	800	200	1500	6,2	610	21	52	752	30
25	950	600	600	400	400	200	1300	6,3	600	22	53	747	35
26	1100	900	900	500	500	300	900	6,4	620	14	54	737	36
27	950	750	750	600	600	300	900	6,2	570	17	36	745	30
28	1200	850	850	600	600	300	1000	6,3	580	18	37	740	31
29	1100	800	800	500	500	300	1200	6,4	590	19	38	735	32
30	1200	800	800	600	600	200	1500	6,5	600	20	39	750	34
31	1100	800	800	400	400	200	200	6,6	610	21	40	745	32
32	950	750	750	500	500	300	2500	6,0	550	22	41	747	38

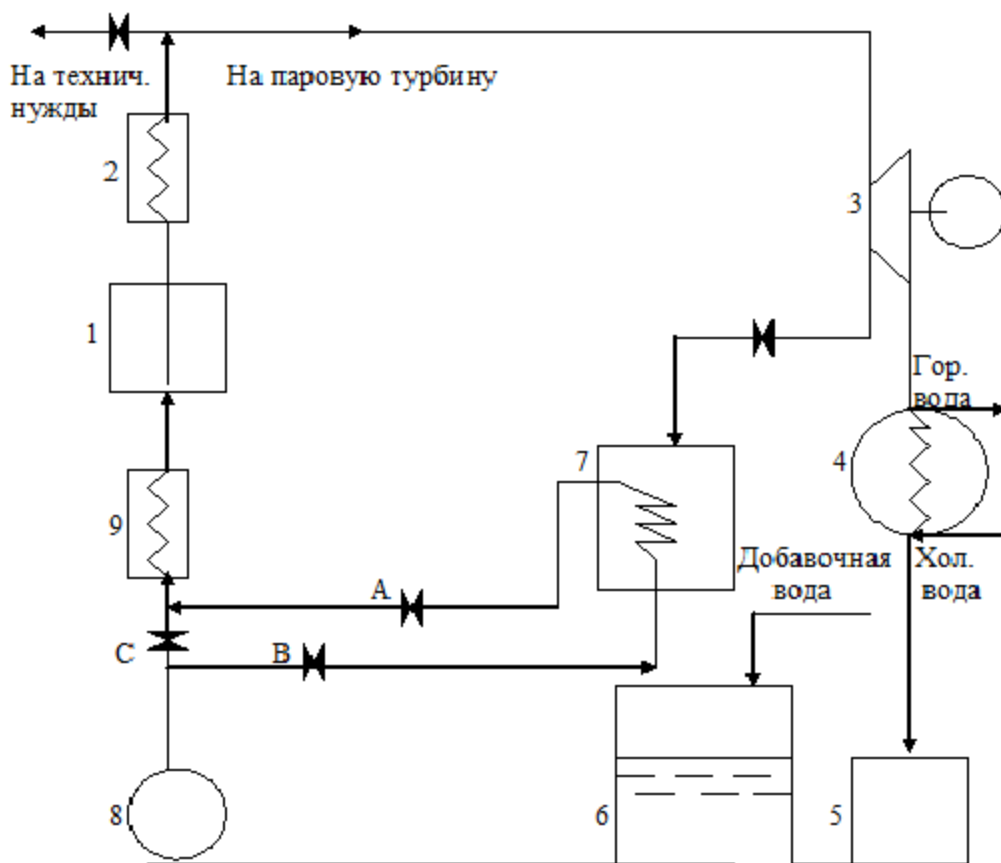


Рис. П.1.1. Схема паросиловой установки:

1 – котлоагрегат; 2 – пароперегреватель; 3 – паровая турбина с генератором; 4 – конденсатор отработанного пара; 5 – вакуум-насос; 6 – сборный бак питательной воды; 7 – паровой водоподогреватель; 8 – питательный насос; 9 – водяной экономайзер

2.2. Определить температуру смеси добавочной воды и конденсата паровой турбины. Установить необходимость предварительного подогрева (до экономайзера) питательной воды.

2.2.1. Вычислить количество конденсата паровой турбины

$$K_K = N_T \cdot d_0,$$

где  $d_0$  – удельный расход пара, кг/(кВт·ч), (см. табл. П.1.2);  $N_T$  – мощность паровой турбины, кВт, (см. табл. П.1. 2);  $K_K$  – количество конденсата, кг/ч.

2.2.2. Определить количество добавочной воды, кг/ч

$$K_{Д.В} = D - K_K,$$

где  $D$  – паропроизводительность котла (см. табл. П.1.1).

2.2.3. Определение температуры конденсата  $t_k = f(p_k)$  в конденсаторе 4 (рис.П.1.1) по табл. П.1.3. При этом давление насыщенных паров в конденсаторе вычисляется по формуле

$$p_K = (B - W_K) \text{ мм рт.ст.} = \frac{B - W_K}{735,6} \text{ атм} = \frac{0,987}{735,6} (B - W_K) \text{ бар},$$

где данные  $B$  и  $W_K$  берутся из табл. П.1.2.

Таблица П.1.3

**Насыщенный водяной пар**

Давление $p$ , бар	Температура насыщения $t$ , °С	Энтальпия кипения воды $i$ , кДж/кг	Скрытая теплота парообразования $r$ , кДж/кг	Энтальпия сухого пара $i_{п.}$ , кДж/кг	Удельный объем, м <sup>3</sup> /кг	
					воды $V_B$	пара $V_{п.}$
0,01	6,92	29,32	2484	2513	0,004	129,9
0,02	17,51	73,52	3459	2533	0,001	66,97
0,03	24,09	101,04	2444	2545	0,001	45,66
0,04	26,98	124,42	2433	2554	0,001	34,61
0,05	32,88	137,83	2423	2561	0,001	28,19
0,06	36,18	151,50	2415	2567	0,001	23,74
0,07	39,03	103,43	2409	2572	0,001	20,53
0,08	41,54	173,9	2402	2576	0,001	18,10
0,09	43,79	183,3	2397	2580	0,001	16,20
0,1	45,84	191,9	2392	2584	0,001	14,65
0,2	60,08	251,4	2358	2609	0,001	7,647
0,3	69,12	289,3	2336	2625	0,001	5,23
0,4	75,88	317,7	2318	2636	0,001	3,99
0,5	81,35	340,6	2304	2645	0,001	3,24
0,6	85,95	360,0	2293	2653	0,001	2,73
0,7	89,97	376,8	2283	2660	0,001	2,36
0,8	93,52	391,8	2273	2665	0,001	2,08
0,9	96,72	405,3	2265	2670	0,001	1,87
1,0	99,64	417,4	2258	2675	0,001	1,69

2.2.4. Определить температуру смеси конденсата и добавочной воды в питательном баке б (рис. П.1.1).



$$t_{\text{см}} = \frac{K_{\text{д.в}} \cdot t_{\text{д.в}} + K_{\text{к}} \cdot t_{\text{к}}}{K_{\text{к}} + K_{\text{д.в}}}.$$

2.2.5. Определить достаточную температуру питательной воды. Такая температура должна превышать точку росы  $t_s$  на 10...15°

$$t_{\text{пит.в}} = t_s + (10...15).$$

Точку росы  $t_s$  определяют по парциальному давлению водяного пара  $p_{\text{H}_2\text{O}}$  из табл. П.1.3. Само же это давление вычисляется по формуле

$$p_{\text{H}_2\text{O}} = p_{\text{см}} \cdot r_{\text{H}_2\text{O}},$$

где объемная доля водяного пара в смеси газов

$$r_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{V_{\text{H}_2\text{O}}}{V_{\text{CO}_2} + V_{\text{H}_2\text{O}} + V_{\text{N}_2}},$$

а входящие сюда объемы продуктов сгорания  $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$  и  $\text{N}_2$  следует взять из табл. П.1.1.

Абсолютное давление смеси газов в экономайзере 9 (рис. П.1.1) найдется из выражения

$$p_{\text{см}} = \left( \frac{B}{735,6} - \frac{W_{\text{ЭК}}}{10000} \right) \text{атм} = 0,987 \left( \frac{B}{735,6} - \frac{W_{\text{ЭК}}}{10000} \right) \text{бар},$$

где данные  $B$  и  $W_{\text{ЭК}}$  берутся из табл. П.1.2.

Если при этих вычислениях будет иметь место неравенство  $t_{\text{пит.в}} > t_{\text{см}}$ , то вода перед подачей на экономайзер подвергается паровому подогреву. Для этого надо открыть вентили А, В и перекрыть вентиль С (рис. П.1.1).

2.3. Определить КПД котлоагрегата. С этой целью произвести следующие вычисления.

2.3.1. Найти полезно использованную в котлоагрегате теплоту на всех его участках (топка, конвективный участок, экономайзер – рис. П.1.2).

$Q_{\text{пол}}^{\text{ОБЩ}} = Q_{\text{т}} + Q_{\text{к.у}} + Q_{\text{ЭК}}$  – полезно использованная в котлоагрегате теплота, кДж/кг. Пусть  $Q_i$  – полезно использованная теплота на  $i$ -м участке котлоагрегата, т.е.  $Q_i \in \{Q_{\text{т}}, Q_{\text{к.у}}, Q_{\text{ЭК}}\}$ .

Тогда

$$Q_i = V_{\text{ОБЩ}} \cdot i_1^2 C_{\text{P}i} \cdot (t_i^2 - t_i^1),$$

где  $V_{\text{ОБЩ}} = V_{\text{см}} \cdot \frac{D}{I}$  – общий объем дымовых газов, м<sup>3</sup>/ч,  $V_{\text{см}} = V_{\text{CO}_2} + V_{\text{H}_2\text{O}} + V_{\text{N}_2}$ , а величины  $V_{\text{CO}_2}$ ,  $V_{\text{H}_2\text{O}}$ ,  $V_{\text{N}_2}$ ,  $D$ ,  $I$  даны в табл. П.1.1;

${}_{t_1}^{t_2}C_{\text{PiCi}}$  – средняя объемная теплоемкость при постоянном давлении ( $p = \text{const}$ ) в интервале температур от  $t_i^1$  до  $t_i^2$ , кДж/(м<sup>3</sup>·К). Ее можно вычислить по формуле

$${}_{t_1}^{t_2}C_{\text{PiCi}} = \sum_{j=\text{CO}_2}^{N_2} {}_{t_1}^{t_2}C_{\text{Pij}} \cdot r_j = {}_{t_1}^{t_2}C_{\text{PiCO}_2} \frac{V_{\text{CO}_2}}{V_{\text{CM}}} + {}_{t_1}^{t_2}C_{\text{PiH}_2\text{O}} \frac{V_{\text{H}_2\text{O}}}{V_{\text{CM}}} + {}_{t_1}^{t_2}C_{\text{PiN}_2} \frac{V_{\text{N}_2}}{V_{\text{CM}}},$$

где  ${}_{t_1}^{t_2}C_{\text{Pij}}$  – средняя объемная теплоемкость  $j$ -го компонента дымовых газов ( $j \in \{\text{CO}_2, \text{H}_2\text{O}, \text{N}_2\}$ ) при постоянном давлении ( $p = \text{const}$ ) в интервале температур от  $t_i^1$  до  $t_i^2$ , кДж/(м<sup>3</sup>·К). Она определяется из выражения

$${}_{t_1}^{t_2}C_{\text{Pij}} = \frac{C_{\text{Pij}}(t_i^1) \cdot t_i^1 - C_{\text{Pij}}(t_i^2) \cdot t_i^2}{t_i^1 - t_i^2}.$$

Здесь удельные объемные теплоемкости  $C_{\text{Pij}}(t)$  находятся из табл. П.1.4, а остальные данные из табл. П.1.1 и П.1.2.

a) б)



Рис. П.1.2. Тракты котлоагрегата

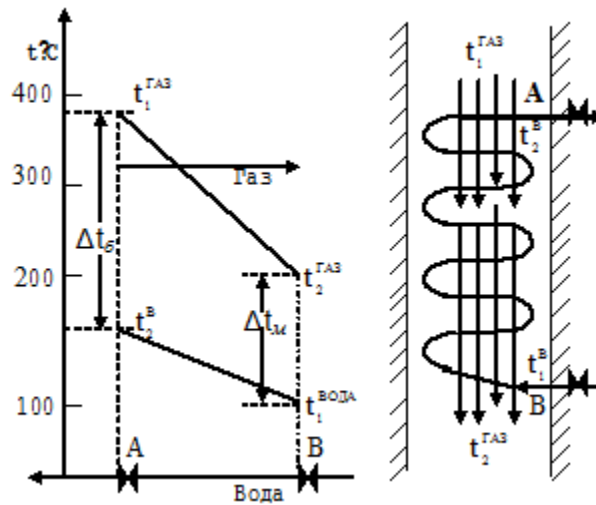


Рис. П.1.3. Диаграмма определения температурного напора (а) и схема экономайзера (б)

2.3.2. Определить теплоту, затраченную на работу котлоагрегата по формуле

$$Q_{\text{ЗАТР}} = \frac{D}{I} \cdot Q_{\text{P}}^{\text{H}},$$

где данные  $D, I, Q_{\text{P}}^{\text{H}}$  даны в табл. П.1.1.

2.3.3. Далее вычисляется КПД котлоагрегата  $\eta = \frac{Q_{\text{ПОЛ}}^{\text{ОБЩ}}}{Q_{\text{ЗАТР}}} \cdot 100\%$ .

Таблица П.1.4

Объёмная теплоёмкость при постоянном давлении  $C_{\text{p}ij}(t)$ , кДж/(м<sup>3</sup>К)

Температура $t, ^\circ\text{C}$	Г А З Ы				
	CO <sub>2</sub>	H <sub>2</sub> O	O <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	Воздух
0	1,599	1,494	1,305	1,298	1,290
100	1,700	1,505	1,317	1,300	1,300
200	1,737	1,522	1,335	1,303	1,307
300	1,862	1,548	1,356	1,310	1,317
400	1,927	1,565	1,377	1,320	1,328
500	1,988	1,589	1,378	1,322	1,342
600	2,041	1,614	1,416	1,348	1,356
700	2,088	1,668	1,434	1,388	1,370
800	2,131	1,695	1,449	1,371	1,380
900	2,169	1,722	1,466	1,384	1,390
1000	2,203	1,750	1,477	1,397	1,407
1100	2,235	1,770	1,489	1,408	1,427
1200	2,263	1,802	1,500	1,420	1,432
1300	2,298	1,825	1,510	1,430	1,443
1400	2,313	1,828	1,520	1,440	1,458
1500	2,335	1,857	1,529	1,449	1,462

2.4. Рассчитать поверхность нагрева экономайзера. С этой целью выполнить следующие расчеты.

2.4.1. Определить температуру воды  $t_2^B$ , °С, на выходе из экономайзера (рис. П.1.3) из уравнения

$$Q_{\text{ЭК}} = D \cdot c_B \cdot (t_2^B - t_1^B),$$

откуда

$$t_2^B = t_1^B + \frac{Q_{\text{ЭК}}}{D \cdot c_B},$$

где  $c_B = 4,187 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$  – удельная теплоемкость питательной воды;

$t_1^B = t_{\text{ПИТ.В}}$  – температура питательной воды при входе в экономайзер получена в п. 2.2.5;  $D$  – паропроизводительность котла (1 т/ч = 1000 кг/ч) берётся из табл. П.1.1;  $Q_{\text{ЭК}}$  – полезная теплота экономайзера вычислена в п. 2.3.

2.4.2. Определить средний температурный напор между двумя средами (дымовыми газами и питательной водой) в экономайзере. На рис. 3 введены обозначения:

$\Delta t_6$  – бóльшая разность температур между дымовыми газами и питательной водой;

$\Delta t_M$  – меньшая разность температур между дымовыми газами и питательной водой.

Средний температурный напор между этими средами при  $\frac{\Delta t_6}{\Delta t_M} \leq 1,5$  вычисляется как среднее арифметическое, т.е.

$$\Delta t_{\text{СРЕД}} = \frac{\Delta t_6 + \Delta t_M}{2},$$

а при  $\frac{\Delta t_6}{\Delta t_M} > 1,5$  – как среднее логарифмическое

$$\Delta t_{\text{СРЕД}} = \frac{\Delta t_6 - \Delta t_M}{\ln \frac{\Delta t_6}{\Delta t_M}}.$$

2.4.3. Определить площадь поверхности нагрева экономайзера можно из следующего уравнения:

$$Q_{\text{ЭК}} = S_{\text{ЭК}} \cdot K \cdot \Delta t_{\text{СРЕД}},$$

откуда искомая площадь

$$S_{\text{ЭК}} = \frac{Q_{\text{ЭК}}}{K \cdot \Delta t_{\text{СРЕД}}},$$

где  $K$  – коэффициент теплоотдачи экономайзера,  $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ , из табл.

П.1.2.

**Замечание.** При вычислении  $S_{\text{ЭК}}$  проверьте размерность. Данные следует подставлять в таких единицах измерения, чтобы ответ получился в  $\text{м}^2$ .

### Контрольные вопросы и задания

1. Расскажите принцип действия паросиловой установки.
2. От чего зависит температура точки росы?
3. Зависит ли теплоемкость газов при постоянном давлении от температуры?
4. От чего зависит КПД котлоагрегата?
5. Что определяет коэффициент теплоотдачи?

## Работа № 2. АНАЛИЗ ЦИКЛА ДВИГАТЕЛЯ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ СО СМЕШАННЫМ ПОДВОДОМ ТЕПЛОТЫ

**Цель работы:** усвоение методов термодинамического расчёта рабочих циклов тепловых двигателей, закрепление теоретических знаний по термодинамике двигателей внутреннего сгорания.

### 1. Исходные данные для выполнения работы

1.1. В качестве рабочего тела принимается идеальный газ (воздух) с удельными теплоемкостями:

$c_p = 1,01 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$  – удельная теплоемкость при постоянном

давлении;  $c_v = 0,72 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$  – удельная теплоемкость при постоянном объеме.

1.2. Параметры рабочего тела:  $p_1$  – начальное давление, МПа;

$t_1$  – начальная температура, °С.

1.3. Характеристики цикла:  $\lambda$  – степень повышения давления;  $\varepsilon$  – степень сжатия;  $\rho$  – степень предварительного расширения.

Эти исходные данные по вариантам приведены в табл. П.1.4.

Требуется провести расчёт цикла Тринклера, диаграммы которого представлены на рис. П.1.4.

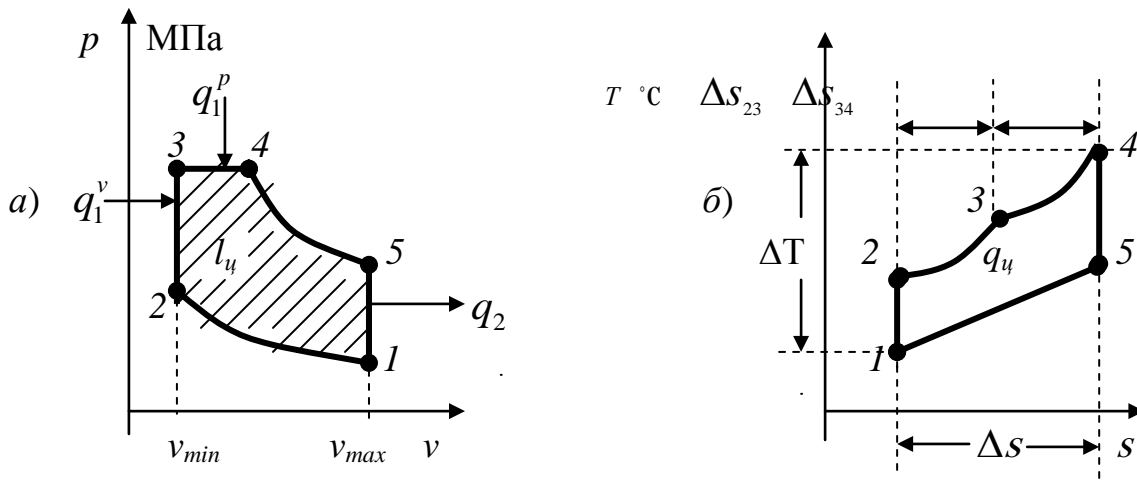


Рис. П.1.4. Цикл Тринклера на  $p$ - $v$ - (а) и  $sT$ -диаграммах (б)

Этот цикл состоит из следующих идеальных процессов:

$1 \rightarrow 2$  – адиабатное сжатие;  $2 \rightarrow 3$  – изохорический подвод теплоты  $q_1^v$ ;  $3 \rightarrow 4$  – изобарный подвод теплоты  $q_1^p$ ,  $4 \rightarrow 5$  – адиабатное расширение (рабочий ход);  $5 \rightarrow 1$  – изохорный отвод теплоты  $q_2$  (выхлоп).

Таблица П.1.4

**Исходные данные по вариантам заданий**

№ варианта	Параметры рабочего тела		Характеристики цикла ДВС		
	$p_1$ , МПа	$t_1$ , °C	$\lambda$	$\varepsilon$	$\rho$
I	0,22	65	1,40	16	1,30
2	0,18	30	1,50	17	1,35
3	0,16	35	1,60	18	1,40
4	0,21	40	1,70	19	1,45
5	0,14	26	1,80	20	1,50
6	0,20	18	1,90	21	1,55
7	0,17	28	2,00	16	1,60
8	0,23	38	1,45	17	1,65
9	0,12	37	1,55	18	1,70
10	0,15	31	1,65	19	1,75
11	0,19	25	1,75	20	1,80
12	0,24	27	1,85	21	1,85
13	0,14	29	1,95	16	1,90
14	0,12	32	1,20	17	1,95
15	0,18	33	1,30	18	2,00
16	0,13	34	1,40	19	2,05
17	0,15	36	1,50	20	2,10
18	0,25	39	1,60	21	2,15
19	0,14	41	1,70	16	2,20
20	0,16	42	1,80	17	1,30
21	0,21	43	1,90	18	1,40
22	0,13	44	2,00	19	1,50
23	0,19	45	1,35	20	1,60
24	0,18	46	1,25	21	1,70
25	0,17	47	1,45	16	1,80
26	0,20	48	1,55	17	1,90

## 2. Порядок выполнения работы

2.1. Определить термодинамические параметры  $p, v, T$  в характерных точках цикла, используя начальные их значения  $p_1$  и  $T_1 = t_1 + 273,15$  и характеристики цикла.

2.1.1. Точка 1:  $p_1, t_1$  известны из табл. П.1.5. Вычислим:  $T_1 = t_1 + 273,15$  К. Удельный объем находится из уравнения

Клапейрона:  $v_1 = \frac{RT_1}{p_1}, \frac{\text{м}^3}{\text{кг}}, R = c_p - c_v = (1,01 - 0,72) \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$  – газовая

постоянная рабочего тела.

2.1.2. Точка 2:  $p_2 = p_1 \cdot \varepsilon^k, T_2 = T_1 \cdot \varepsilon^{k-1}, v_2 = v_1 \cdot \varepsilon^{-1},$  где  $k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{1,01}{0,72} = 1,49$  – показатель адиабаты рабочего тела.

2.1.3. Точка 3:  $p_3 = p_2 \cdot \lambda, T_3 = T_2 \cdot \lambda, v_3 = v_2.$

2.1.4. Точка 4:  $p_4 = p_3, T_4 = T_3 \cdot \rho, v_4 = v_3 \cdot \rho.$

2.1.5. Точка 5:  $p_5 = p_1 \cdot \lambda \cdot \rho^k, T_5 = T_1 \cdot \lambda \cdot \rho^k, v_5 = v_1.$

2.2. Определить количество подведенной и отведенной теплоты.

2.2.1. Количество подведенной теплоты  $q_1 = q_1^v + q_1^p$  (рис. П.1.4). В процессе  $2 \rightarrow 3$  осуществляется изохорический подвод теплоты  $q_1^v = c_v(T_3 - T_2)$ , а в процессе  $3 \rightarrow 4$  – изобарный подвод теплоты  $q_1^p = c_p(T_4 - T_3)$ . Таким образом, количество подведенной теплоты

$$q_1 = c_v(T_3 - T_2) + c_p(T_4 - T_3).$$

2.2.2. Количество отведенной теплоты – это теплота, отведенная в изохорном процессе  $5 \rightarrow 1$  (выхлоп). Поэтому она равна

$$q_2 = c_v(T_5 - T_1).$$

2.3. Вычислить термический КПД цикла:  $\eta_t = \left(1 - \frac{q_2}{q_1}\right) \cdot 100\%.$

2.4. Определить полезную работу цикла.

Эта величина численно равна площади плоской фигуры, контуром которой является цикл. На рис. П.1.4,а эта площадь заштрихована. При этом работа произвольного процесса  $a \rightarrow b$  в общем случае определяется из выражения  $l_{a \rightarrow b} = \int_{v_a}^{v_b} p(v) dv$ , что численно равно площади под кривой, которую на  $vp$ -диаграмме описывает данный процесс. Чтобы найти площадь заштрихованной

фигуры (см. рис. П.1.4,*a*), нужно площадь прямоугольника под отрезком  $3 \rightarrow 4$  сложить с площадью криволинейной трапеции под дугой  $4 \rightarrow 5$  и вычесть площадь криволинейной трапеции под дугой  $1 \rightarrow 2$ . Поэтому работа нашего цикла будет равна  $l_{\text{пол}} = l_{3 \rightarrow 4} + l_{4 \rightarrow 5} - l_{1 \rightarrow 2}$ .

2.4.1. Работа изобарного процесса  $3 \rightarrow 4$ , на котором  $p = p_4 = p_3 = \text{const}$ , равна  $l_{3 \rightarrow 4} = \int_{v_3}^{v_4} p_3 dv = p_3(v_4 - v_3)$ .

2.4.2. Работа адиабатного процесса  $3 \rightarrow 4$ , на котором  $pv^k = p_4 v_4^k = \text{const}$ , откуда  $p = p_4 v_4^k / v^k$ , будет

$$l_{4 \rightarrow 5} = \int_{v_4}^{v_5} p dv = v_4^k p_4 \int_{v_4}^{v_5} v^{-k} dv = v_4^k p_4 \frac{v_5^{1-k} - v_4^{1-k}}{1-k} = \frac{v_4 p_4 - v_5 p_5}{k-1}.$$

2.4.3. Аналогично работа адиабатного процесса  $1 \rightarrow 2$ , где  $pv^k = p_1 v_1^k = \text{const}$ , откуда  $p = p_1 v_1^k / v^k$ , будет

$$l_{1 \rightarrow 2} = \int_{v_1}^{v_2} p dv = v_1^k p_1 \int_{v_1}^{v_2} v^{-k} dv = v_1^k p_1 \frac{v_2^{1-k} - v_1^{1-k}}{1-k} = \frac{v_1 p_1 - v_2 p_2}{k-1}.$$

2.5. Построить по вычисленным данным на миллиметровке в масштабе реальный цикл на  $vp$ - и  $sT$ -диаграммах. При построении  $sT$ -диаграммы на оси абсцисс точки  $s_1 = s_2$  и  $s_4 = s_5$  берутся произвольно. Затем вычисляются величины изменения энтропии в изохорном процессе  $2 \rightarrow 3$  по известной формуле  $\Delta s_{23} = c_v \ln \frac{T_3}{T_2}$ , а в

изобарном процессе  $3 \rightarrow 4$   $\Delta s_{34} = c_p \ln \frac{T_4}{T_3}$ , и находится их сумма

$$\Delta s = \Delta s_{23} + \Delta s_{34}.$$

Измеренный в миллиметрах отрезок, отложенный на оси абсцисс, делим на  $\Delta s$  и получаем цену деления в миллиметрах одного  $\frac{\text{кДж}}{\text{К}}$ .

Далее в масштабе строим на  $sT$ -диаграмме дуги процессов  $2 \rightarrow 3$ ,  $3 \rightarrow 4$  и  $5 \rightarrow 1$ .

### Контрольные вопросы и задания

1. Из каких процессов состоит цикл Тринклера?
2. Напишите соотношения между термодинамическими параметрами для всех этих процессов.
3. От чего зависит КПД цикла Тринклера?



## СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ

Таблица П.2.1

Плотность  $\rho$ , теплопроводность  $\lambda$ , теплоемкость  $C_p$  металлов и сплавов  
( $p = 0,1$  МПа;  $t = 20$  °С)

Элемент	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\lambda$ , Вт/(м·К)	$C_p$ , кДж/(кг·К)
Алюминий	2700	209	0,896
Бронза (75% Cu, 25 % Sn)	8660	25,9	0,344
Вольфрам	19340	169	0,134
Дюралюминий	2800	164	0,884
Железо	7880	74	0,44
Золото	19310	313	0,130
Калий	870	100	0,737
Кремний	2300	33,7	-
Латунь (70 % Cu, 30 % Zn)	8520	110,7	0,385
Литий	534	68,6	3,31
Магний	1760	158	0,975
Медь	8930	390	0,388
Молибден	10214	136,9	0,251
Натрий	975	109	1,20
Никель	8900	67,5	0,427
Олово	7300	66,3	0,222
Платина	21460	69,8	0,132
Свинец	11350	35,1	0,127
Серебро	10500	419	0,234
Сталь 45	7794	32	0,560
Сталь углеродистая (C = 0,5 %)	7830	53,6	0,465
Сталь нержавеющая 1X18Н9Т	7900	16	0,502
Титан	4540	15,1	0,531
Углерод, графит	1700-2300	174	0,67
Уран	19100	19,2	0,117
Цинк	7150	113	0,384
Чугун (C = 4 %)	7270	51,9	0,419

Таблица П.2.2

**Плотность  $\rho$ , теплопроводность  $\lambda$ , теплоемкость  $c_p$   
некоторых неметаллических материалов**

Материал	$t$ , °С	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\lambda$ , Вт/(м·К)	$c_p$ , кДж/(кг·К)
Асбошифер	20	1800	0,64	-
Асфальт	30	2120	0,74	1,67
Бетон с щебнем	0	2000	1,28	0,84
Бетон сухой	0	1600	0,84	-
Бумага обыкновенная	20	-	0,14	1,51
Вата хлопчатобумажная	30	80	0,042	-
Глина	20	2000	0,90	0,84
Лед	0	917	2,2	2,26
Мел	50	2000	0,90	0,88
Мрамор	0	2800	3,5	0,92
Резина твердая обыкновенная	0	1200	0,157	1,38
Снег: свежесвыпавший,	-	200	0,10	2,09
уплотненный	-	400	0,46	2,09
Стекло: обыкновенное,	20	2500	0,74	0,67
термометрическое,	20	2590	0,96	
кварцевое	800	-	2,40	
Текстолит	20	1300	0,23	1,46
Фанера клееная	0	600	0,15	2,51
Фарфор	95	2400	1,04	1,09
Фибра красная		1290	0,469-0,498	-
Фибра белая	-	1220	0,278-0,291	-
Фибролит магниальный	0	300	0,099	
Эбонит	20	1200	0,16	-

Таблица П.2.3

**Плотность  $\rho$ , теплопроводность  $\lambda$  и предельная температура  $t$  применения  
теплоизоляционных и огнеупорных материалов и изделий**

Наименование материала или изделий	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\lambda$ , Вт/(м К)	$t$ , °С
Материал			
Асбест	500	0,107+0,00019·t	700
Асбест	800	0,140+0,00019·t	700
Асбозонолит	520	0,143+0,00019·t	700
Асбозурит	700	0,162+0,000169·t	300
Асбослюда	600	0,120+0,000148·t	600
Асботермит	560	0,109+0,000145·t	550
Диатомит молотый	450	0,091+0,00028·t	800
Зонолит (вермикулит)	200	0,072+0,000262·t	1100
Минеральная стеклянная вата	200	0,047+0,87·t	500
Новоасбозурит	600	0,144+0,00014·t	250
Ньювель	450	0,87+0,00064·t	350
Совелит	500	0,090+0,00087·t	450
Ферригипс (паста феррон)	500	0,101+0,00015·t	600
Шлаковая вата (сорт 0)	200	0,06+0,000145·t	750
Изделия			
Альфоль гофрированный, сегменты	200	0,0535+0,000221·t	500
Асбоцементные сегменты	400	0,0919+0,000128·t	450
Вермикулитовые плиты	380	0,081+0,00015·t	700
Вулканитовые плиты	400	0,080+0,00021·t	600
Войлок строительный	300	0,05 при 0°С	190
Кирпич:			
диатомитовый,	550	0,113+0,00023·t	850
динасовый,	1500	0,9+0,0007·t	1700
керамический (красный),	1800	0,77 при 0°С	-
магнезитовый,	2700	4,65-0,0017·t	1700
пеношамотный,	600	0,10+0,000145·t	1300
пенодиатомитовый,	230	0,07 при 70°С	700
хромитовый,	3050	1,3+0,00041·t	1700
шамотный	1850	0,84+0,0006·t	1400
Минеральный войлок	250	0,058 при 50°С	-
Пенобетонные блоки	500	0,122 при 50°С	300

Таблица П.2.4

**Теплофизические свойства некоторых газов ( $t = 0^\circ\text{C}$ )**

Газы	$\lambda_p,$ $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	$\rho,$ $\frac{\text{кг}}{\text{м}}$	$c_p,$ $\frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	$a \cdot 10^6,$ $\text{м}^2 / \text{с}$	$\nu \cdot 10^6,$ $\text{м}^2 / \text{с}$	$Pr$
Азот	0,0243	1,250	1,030	18,87	1,363	0,722
Водород	0,1721	0,0899	14,192	134,9	9,571	0,71
Кислород	0,0247	1,429	0,915	18,89	1,354	0,717
Оксид углерода	0,0233	1,250	1,039	17,9	1,33	0,741
Углекислый газ	0,0146	1,977	0,815	9,1	0,71	0,782
Гелий	0,141	0,2	5,20	$1,356 \cdot 10^4$	19,52	0,702

Таблица П.2.5

**Физические свойства сухого воздуха ( $p = 0,101 \text{ МПа}$ )**

$t,$ $^\circ\text{C}$	$\rho,$ $\frac{\text{кг}}{\text{м}}$	$c_p,$ $\frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	$\lambda,$ $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	$\mu \cdot 10^{-6},$ Па·с	$\nu \cdot 10^{-6},$ $\text{м}^2 / \text{с}$	$Pr$
-20	1,395	1,009	2,28	16,2	12,79	0,716
-10	1,342	1,009	2,36	16,7	12,43	0,712
0	1,293	1,005	2,44	17,2	13,28	0,707
10	1,247	1,005	2,51	17,6	14,16	0,705
20	1,205	1,005	2,59	18,1	15,06	0,703
30	1,165	1,005	2,67	18,6	16,00	0,701
40	1,128	1,005	2,76	19,1	16,96	0,699
50	1,093	1,005	2,83	19,6	17,95	0,698
60	1,060	1,005	2,90	20,1	18,97	0,696
100	0,946	1,009	3,21	21,9	23,13	0,688
200	0,746	1,026	3,93	26,0	34,85	0,680

Таблица П.2.6

## Физические свойства воды в состоянии насыщения

$t$ , °C	$\rho$ , $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$c_p$ , $\frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	$\lambda \cdot 10^{-2}$ , $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	$\nu \cdot 10^{-6}$ , $\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$	$\beta \cdot 10^{-6}$ , $\frac{1}{\text{К}}$	$\sigma \cdot 10^{-4}$ , $\frac{\text{Н}}{\text{м}}$	$Pr$
0	999,9	4,212	55,1	1,789	-0,63	756,4	13,67
10	999,9	4,191	57,4	1,306	+0,70	741,6	9,52
20	998,2	4,183	59,9	1,006	1,82	726,9	7,02
30	995,7	4,174	61,8	0,805	3,21	712,2	5,42
40	992,2	4,174	63,5	0,659	3,87	696,5	4,31
50	988,1	4,174	64,8	0,556	4,49	676,9	3,54
60	983,2	4,179	65,9	0,478	5,11	662,2	2,98
70	977,8	4,187	66,8	0,415	5,70	643,5	2,55
80	971,8	4,195	67,4	0,365	6,32	625,9	2,21
90	965,3	4,208	68,0	0,326	6,95	607,2	1,95
190	876,0	4,459	67,0	0,165	12,6	400,2	0,96
200	863,0	4,505	66,3	0,158	13,3	376,7	0,93
210	852,8	4,555	65,5	0,153	14,1	354,1	0,91
220	840,3	4,614	64,5	0,149	14,8	331,6	0,89
230	827,3	4,681	63,7	0,145	15,9	310,0	0,88
240	813,6	4,756	62,8	0,141	16,8	285,5	0,87
250	799,0	4,844	61,8	0,137	18,1	261,9	0,86
260	784,0	4,949	60,5	0,135	19,7	237,4	0,87
270	767,9	5,070	59,0	0,133	21,6	214,8	0,88
280	750,7	5,230	57,4	0,131	23,7	191,3	0,90
290	732,3	5,485	55,8	0,129	26,2	168,7	0,93
300	712,5	5,736	54,0	0,128	29,2	144,2	0,97
310	691,1	6,071	52,3	0,128	32,9	120,7	1,03
320	667,1	6,574	50,6	0,128	38,2	98,10	1,11
330	640,2	7,244	48,4	0,127	43,3	76,71	1,22
340	610,1	8,165	45,7	0,127	53,4	56,70	1,39
350	574,4	9,504	43,0	0,126	66,8	38,16	1,60
360	528,0	13,984	39,5	0,126	109	20,21	2,35
370	450,5	40,321	33,7	0,126	264	4,71	6,79

Таблица П.2.7

**Термодинамические свойства воды и водяного пара  
на линии насыщения**

$t$ , °С	$p$ , МПа	$v'$ , $\frac{м^3}{кг}$	$v''$ , $\frac{м^3}{кг}$	$h'$ , $\frac{кДж}{кг}$	$h''$ , $\frac{кДж}{кг}$
0,01	0,0006108	0,0010002	206,3	0	2501
5	0,0008719	0,0010001	147,2	21,05	2510
10	0,0012277	0,0010004	106,42	42,04	2519
15	0,0017041	0,0010010	77,97	62,97	2528
20	0,002337	0,0010018	57,84	83,90	2537
25	0,003166	0,0010030	43,40	104,81	2547
30	0,004241	0,0010044	32,93	125,71	2556
40	0,007375	0,0010079	19,55	167,50	2574
60	0,019917	0,0010171	7,678	251,1	2609
80	0,04736	0,0010290	3,408	334,9	2643
100	0,10132	0,0010435	1,673	419,1	2676
120	0,19854	0,0010603	0,8917	503,7	2706
140	0,3614	0,0010798	0,5087	589,0	2734
160	0,6180	0,0011021	0,3068	675,5	2758
180	1,0027	0,0011275	0,1939	763,1	2778
200	1,5551	0,0011565	0,1272	852,4	2793
220	2,3201	0,0011900	0,08606	943,7	2802
240	3,3480	0,0012291	0,05967	1037,5	2803
260	4,694	0,0012755	0,04215	1135	2796
280	6,491	0,0013322	0,03013	1236,9	2780
300	8,592	0,0014036	0,02164	1344,9	2749
320	11,290	0,001499	0,01545	1462,1	2700
340	14,608	0,001639	0,01078	1594,7	2622
360	18,674	0,001894	0,006943	1762	2481
374	22,122	0,00280	0,00347	485,3	512,7

Таблица П.2.8

**Физические свойства перегретого водяного пара при  $p = 0,1$  МПа**

$t$ , °C	$v$ , $\frac{\text{м}^3}{\text{кг}}$	$\lambda$ , $\frac{\text{мВт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	$\mu$ , мкПа·с	$c_p$ , $\frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$
200	2,172	33,3	16,18	1,974
210	2,219	34,2	16,58	1,976
220	2,266	35,2	16,99	1,978
230	2,313	36,2	17,40	1,981
240	2,359	37,2	17,81	1,984
250	2,406	38,2	18,22	1,988
260	2,453	39,2	18,63	1,992
270	2,499	40,2	19,04	1,996
280	2,546	41,3	19,46	2,001
290	2,592	42,3	19,87	1,006
300	2,639	43,4	20,29	2,011
310	2,685	44,5	20,70	2,016
320	2,732	45,6	21,12	2,021
330	2,778	46,7	21,53	2,026
340	2,824	48,8	21,95	2,032
350	2,871	49,0	22,37	2,038
360	2,917	50,1	22,78	2,044
370	2,964	51,3	23,20	2,050
380	3,010	52,4	23,61	2,056
400	3,103	54,8	24,44	2,068
420	3,195	57,1	25,27	2,080
440	3,288	59,5	26,10	2,093
460	3,380	62,0	26,93	2,106
500	3,565	67,0	28,57	2,132