

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

ХАИТ АНАТОЛИЙ ВИЛЬЧ

РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОЛОГИЧЕСКИХ ОСНОВ  
РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ ЗАКРУЧЕННЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ОДНО- И  
ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ГИДРО- И ПНЕВМОАППАРАТАХ НА  
ОСНОВЕ ГИПОТЕЗЫ БУССИНЕСКА

2.5.10 - Гидравлические машины, вакуумная, компрессорная техника,  
гидро- и пневмосистемы

ДИССЕРТАЦИЯ  
на соискание ученой степени доктора технических наук

Научный консультант:  
заслуженный работник Высшей школы РФ,  
доктор технических наук, профессор  
Щерба Виктор Евгеньевич

ОМСК — 2025

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	8
ГЛАВА 1. ТУРБУЛЕНТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ: СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА И МОДЕЛИРОВАНИЯ	25
1.1. Краткий обзор исследований турбулентности . . . . .	25
1.1.1. Потеря течением устойчивости. Возникновение турбулентности .	26
1.1.2. Развитая изотропная турбулентность . . . . .	34
1.2. Уравнения турбулентного течения сжимаемой жидкости . . . . .	41
1.2.1. Уравнения Рейнольдса . . . . .	41
1.2.2. Уравнения переноса реинольдсовых напряжений . . . . .	46
1.2.3. Полуэмпирические модели турбулентности . . . . .	49
1.3. Слабая и гидродинамическая турбулентность в поверхностных волнах . . . . .	61
1.3.1. Потенциальные поверхностные волны . . . . .	61
1.3.2. Теория Захарова, слабая турбулентность . . . . .	66
1.3.3. Гидродинамическая турбулентность в квази-потенциальных волнах . . . . .	73
1.4. Выводы по главе . . . . .	77
ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В ВИХРЕВОЙ ТРУБЕ	80
2.1. Вихревые трубы Ранка-Хилша . . . . .	80
2.1.1. Конструкция и основные характеристики вихревой трубы . . . . .	81
2.1.2. Влияние формы проточной части на характеристики вихревых труб . . . . .	87
2.1.3. Микроструктура винтового течения . . . . .	91

2.2. Физические основы эффекта Ранка-Хилша . . . . .	94
2.3. Формулировка анизотропной модификации ВД модели турбулентности на основе гипотезы взаимодействия вихрей . . . . .	101
2.3.1. Ламинарные тепловые потоки $q_{\sigma, lam}$ и $q_{\lambda, lam}$ . . . . .	102
2.3.2. Турбулентные тепловые потоки $q_{\sigma, turb}$ и $q_{\lambda, turb}$ . . . . .	104
2.3.3. Поправка на сжимаемость газа Ван Деемтера $q_{\gamma}$ (ВД) . . . . .	106
2.4. Формулировка изотропной модификации ВД модели турбулентности на основе гипотезы взаимодействия вихрей . . . . .	109
2.5. Численные методы . . . . .	113
2.6. Выводы по главе . . . . .	120
 ГЛАВА 3. РАЗРАБОТКА МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В ГИДРОВОЛНОВОМ ЛОТКЕ С ВОЛНОПРОДУКТОРОМ	 123
3.1. Нелинейные поверхностные волны . . . . .	123
3.1.1. Роль поверхностных волн в формировании климата . . . . .	124
3.1.2. Морское и прибрежное строительство . . . . .	126
3.1.3. Лабораторные и численные исследования поверхностных волн . . . . .	128
3.2. Разработка сопряженной численной модели гидроволнового лотка .	132
3.2.1. Модель двухфазного течения с поверхностью раздела . . . . .	134
3.2.2. Модель однофазного квазипотенциального течения . . . . .	139
3.2.3. Модель турбулентной вязкости и кинематический критерий обрушения гребня волны . . . . .	142
3.2.4. Сопряжение однофазной и двухфазной моделей течения жидкости	147
3.3. Метод Pressure-Implicit with Splitting of Operators (PISO) . . . . .	148
3.4. Выводы по главе . . . . .	150
 ГЛАВА 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В ВИХРЕВОЙ ТРУБЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ МОДИФИЦИРОВАННОЙ И СТАНДАРТНЫХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ	 153

4.1. Численное исследование течения газа в разделительной вихревой трубе . . . . .	153
4.2. Численное исследование течения газа в двухконтурной вихревой трубе . . . . .	161
4.2.1. Стандартные модели турбулентности на основе гипотезы Буссинеска . . . . .	164
4.2.2. Стандартные модели рейнольдсовых напряжений RSM и крупных вихрей LES . . . . .	168
4.3. Исследование и калибровка модифицированной модели турбулентности $k$ - $\varepsilon$ -VD . . . . .	174
4.3.1. Калибровка модифицированной модели $k$ - $\varepsilon$ -VD . . . . .	177
4.3.2. Интегральные характеристики и течение газа в вихревой трубе . . . . .	180
4.3.3. Профили газодинамических параметров . . . . .	186
4.3.4. Тепловые потоки в вихревой трубе . . . . .	189
4.4. Выводы по главе . . . . .	192
<b>ГЛАВА 5. УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ ПРОТОЧНОЙ ЧАСТИ ВИХРЕВОЙ ТРУБЫ С ЦЕЛЬЮ ПОВЫШЕНИЯ ЕЁ ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНОСТИ</b>	<b>195</b>
5.1. Исследование течения газа с использованием метода минимизация генерации энтропии . . . . .	195
5.1.1. Метод минимизация генерации энтропии . . . . .	196
5.1.2. Результаты анализа . . . . .	198
5.2. Параметрическое исследование конфигурации камеры энергоразделения . . . . .	203
5.2.1. Результаты численных исследований . . . . .	204
5.2.2. Результаты экспериментальных исследований . . . . .	208
5.3. Усовершенствование отдельных узлов вихревой трубы . . . . .	218
5.3.1. Принципиально новый тип соплового ввода . . . . .	219

5.3.2. Развихритель холодного потока . . . . .	231
5.3.3. Диффузор горячего потока . . . . .	236
5.4. Промышленная верификация результатов исследования . . . . .	238
5.4.1. Вихревые воздушные теплогенераторы . . . . .	239
5.4.2. Вихревые холодогенераторы для установок утилизации попутного нефтяного газа . . . . .	242
5.5. Выводы по главе . . . . .	243

## ГЛАВА 6. ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ГИДРОВОЛНОВОМ ЛОТКЕ С ВОЛНОПРОДУКТОРОМ ИСПОЛЬЗУЯ МОДИФИЦИРОВАННУЮ МОДЕЛЬ

6.1. Исследование и калибровка модели турбулентной вязкости для обрушающихся волн . . . . .	247
6.1.1. Комбинация лабораторного и численного гидроволновых лотков . . . . .	247
6.1.2. Кинематические параметры обрушающегося гребня . . . . .	251
6.1.3. Поле скоростей под обрушающимся волновым пакетом и промежуточные выводы . . . . .	261
6.2. Диссипация энергии волны в модели турбулентной вязкости . . . . .	263
6.2.1. Генерация волнового пакета с гауссовой огибающей . . . . .	263
6.2.2. Исследование потоков энергии через поперечные сечения гидроволнового лотка . . . . .	269
6.3. Погрешности модели турбулентной вязкости для обрушающихся волн . . . . .	273
6.3.1. Изменение формы волны с ростом параметра крутизны $\kappa_0 \zeta_0$ . . . . .	273
6.3.2. Гидродинамическая турбулентность, генерируемая обрушением поверхностных волн . . . . .	276
6.4. Уточнение модели турбулентной вязкости для обрушающихся волн . . . . .	284
6.4.1. Эффект фазовой синхронизации . . . . .	284

6.4.2. Эмпирическая параметризация эффекта фазовой синхронизации для модели турбулентной вязкости . . . . .	291
6.5. Выводы по главе . . . . .	295
<b>ГЛАВА 7. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ ВОЛНОПРОДУКТОРОМ ДЛЯ ГИДРОВОЛНОВЫХ ЛОТКОВ</b>	<b>297</b>
7.1. Генерация волн при помощи волнопродуктора . . . . .	297
7.2. Алгоритм на основе уравнения Захарова . . . . .	303
7.2.1. Нелинейное граничное условие на волнопродукторе . . . . .	306
7.2.2. Решение 1-го порядка нелинейности . . . . .	309
7.2.3. Решение 2-го порядка нелинейности . . . . .	310
7.2.4. Случай расположения шарнира выше дна лотка ( $L < 0$ ) . . . . .	312
7.2.5. Полное слабо-нелинейное решение . . . . .	313
7.3. Алгоритм на основе нелинейного уравнения Шредингера . . . . .	316
7.3.1. Нелинейное граничное условие на волнопродукторе . . . . .	320
7.3.2. Решения 1-го, 2-го и 3-го порядков нелинейности . . . . .	321
7.3.3. Полное слабо-нелинейное решение . . . . .	323
7.4. Внедрение алгоритмов управления волнопродуктором . . . . .	325
7.5. Выводы по главе . . . . .	328
<b>ГЛАВА 8. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ ВОЛНОПРОДУКТОРОМ</b>	<b>331</b>
8.1. Исследование алгоритма на базе уравнения Захарова . . . . .	331
8.1.1. Режимы генерации волн . . . . .	331
8.1.2. Вихревые течения вблизи волнопродуктора и эмпирическая правка передаточной функции . . . . .	333
8.1.3. Численные исследования . . . . .	339
8.1.4. Экспериментальные исследования . . . . .	343
8.2. Исследование алгоритма на базе уравнения Шредингера . . . . .	349

8.2.1. Режимы генерации волн . . . . .	349
8.2.2. Численные исследования . . . . .	352
8.2.3. Экспериментальные исследования . . . . .	355
8.3. Итерационный метод повышения точности генерации волн . . . . .	360
8.3.1. Сильно нелинейный волновой пакет . . . . .	360
8.3.2. Слабо нелинейный волновой пакет . . . . .	365
8.4. Выводы по главе . . . . .	368
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>	<b>371</b>
<b>СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ</b>	<b>376</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b>	<b>381</b>
Приложение 1.	427
Приложение 2.	429
Приложение 3.	434
Приложение 4.	436
Приложение 5.	439
Приложение 6.	444
Приложение 7.	450
Приложение 8.	456

## ВВЕДЕНИЕ

### **Актуальность работы**

Сложные закрученные турбулентные одно- и двухфазные течения, возникающие в различных гидравлических и пневматических аппаратах, тяжело поддаются математическому описанию и моделированию. Отсутствие фундаментальной теории турбулентности требует вовлечения упрощений, эмпирических поправок и параметризаций, называемых моделями турбулентности. В свою очередь, введение эмпирических данных в математические модели приводит к неполному пониманию физических процессов, наблюдавшихся в течениях жидкости и газа и определяющих рабочие процессы гидропневмоаппаратов. В связи со сложностью и неполной изученностью указанных физических процессов, погрешность прогнозирования интегральных характеристик гидропневмоаппаратов, таких как вихревые трубы Ранка-Хилша или поршневые волнопродукторы возвратно-поступательного действия, может превышать 15...30%.

Современные вихревые трубы широко применяются в промышленности, в том числе в установках сепарации попутного нефтяного газа, сжижения природного газа, охлаждения бурового раствора, в установках нагрева воздуха и др. Они характеризуются относительно низкой величиной холодильного КПД порядка  $\eta_c \sim 0.2...0.22$ , а их функционирование обеспечивается компрессорными станциями большой мощности.

Отсутствие точных и достоверных методик математического моделирования рабочих процессов (течений жидкости и газа) и интегральных характеристик вихревых труб выступает ограничивающим фактором совершенствования последних с целью повышения их энергетической эффективности. С учетом широкого распространения вихревых труб в промышленности, повышение холодильного КПД даже на 3...5% потенциально приведет к экономии энергии, потребляемой компрессорными станциями, в десятки МВт. В связи

с этим, проблему повышения энергоэффективности вихревых труб следует считать актуальной и имеющей важное хозяйственное значение для развития страны.

С другой стороны, особенную важность для развития страны играют вопросы судоходства и морского строительства. Проектирование судов, объектов прибрежной инфраструктуры, объектов береговой защиты, морских платформ, плавучих газовых хранилищ и других инженерно-технических сооружений требует проведения физических (натурных) испытаний в специальных гидроволновых лабораториях страны. Генерация проектного волнения в гидроволновых лотках осуществляется при помощи программно управляемых поршневых волнопродукторов, преобразующих механическую энергию возвратно-поступательного движения в гидравлическую энергию поверхностных волн.

Современные волнопродукторы характеризуются значительными отклонениями в форме генерируемых поверхностных волн, которые могут превышать 15%, а физическая природа возникающих ошибок остается неизвестной. С учетом того, что энергия поверхностных волн пропорциональна квадрату высоты волны, ошибки работы волнопродуктора могут приводить к большим погрешностям определения как силового воздействия от наката волн на объект, так и других проектных параметров. А следовательно, к высокому риску неверного выбора проектного решения и тяжелым последствиям такого выбора. Особая важность гидроволновых лабораторий для развития судоходства и морского строительства страны указывает на актуальность научной проблемы существенного повышения точности генерации волн волнопродукторами.

Решение указанных актуальных проблем, имеющих важное хозяйственное значение для развития страны, невозможно без развития методов математического моделирования сложных закрученных турбулентных одно- и двухфазных течений жидкости и газа с целью минимизации погрешности прогнозирования интегральных характеристик гидропневмоаппаратов. Для

этого требуется более глубокое понимание физических процессов, определяющих работу данных гидропневмоаппаратов. Этим вопросам посвящена настоящая диссертация.

### **Степень разработанности проблемы**

Рассматриваемые научные проблемы изучались различными коллектиками и научными школами на протяжении десятилетий: А.И. Леонтьев, О.М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов (РГУ НГ), С.А. Исаев (СПбГУ ГА), Г.М. Моргунов (МЭИ), А.А. Жарковский (СПбПУ), И.О. Хинце, Ф. Харлоу, В.Е. Launder, D.B. Spalding, H. Jasak, F.R. Menter, G.J. Reece, W. Rodi, А.П. Меркулов (КуАИ), М.Г. Дубинский (МАИ), В.С. Мартыновский (ОТИХП), В.М. Бродянский (МЭИ), А.Д. Суслов (МВТУ), А.В. Мартынов (МЭИ), А.А. Халатов (ИТТФ НАНУ), В.И. Метенин (КПТИ), А.И. Азаров (ЛПИ), Ш.А. Пиралишвили (РГАТУ), В.И. Кузнецов (ОмГТУ), М.А. Жидков, В.А. Целищев (УУНиТ), М.Х. Правдина (ИТ СО РАН), В.А. Арбузов (ИТ СО РАН), Г.Н. Бобровников (МВТУ), Н.А. Прибатурин (ИТ СО РАН), J.J. Van Deemter , R.G. Deissler, M. Perlmutter, R. Liew, A. Bazgir, J. Lagrandeur, S. Poncet, N.J. Dyck, K. Dincer, S.E. Rafiee, B. Kobiela, J.J. Derksen, T. Farouk, A. Gutsol, A. Secchiaroli, R. Ricci, N. Bej, R. Oberti, M. Baghdad, И.С. Нуднер (БГТУ Военмех), К.К. Семёнов (СПбПУ), Г.С. Хакимзянов (КГУ), Ю.Н. Захаров (ИВТ СО РАН), Л.Б. Чубаров (ИВТ СО РАН), Ю.И. Шокин (ИВТ СО РАН), А.А. Коробкин (Институт гидродинамики СО РАН), С.И. Бадулин (ИО РАН), Е.Н. Пелиновский (НГТУ), Ю.И. Троицкая (ИПФ РАН), А.В. Слюняев (ИПФ РАН), Д.А. Сергеев (ИПФ РАН), К.Е. Афанасьев (КемГУ), С.В. Стуколов (КемГУ), О.И. Гусев (ИВТ СО РАН), Н.А. Schaffer, T. Waseda, P.H. Taylor, T.A.A. Adcock, L. Shemer, D. Liberzon, V. Shrira, S.T. Grilli, M.P. Tulin, C. Swan, J. Spinneken, Z. Tian, M. Perlin, G. Ducrozet, V. Sriram, J.H. Duncan, W.K. Melville, M.L. Banner, R.J. Rapp, W. Bai, L. Qian, Z. Ma и другие научные группы и школы.

В качестве основных достижений можно выделить: создание теоретической базы и математических методов расчета многомерных течений жидкости и газа в гидропневмоаппаратах; создание теоретической базы вихревого эффекта; создание критериальных уравнений расчета вихревых труб; разработка и внедрение серии устройств, использующих вихревой эффект; создание линейной и слабонелинейных теорий волнопродуктора; разработка и внедрение алгоритмов числового управления волнопродукторами.

Несмотря на большое количество проведенных исследований, научные проблемы, рассмотренные выше по тексту, остаются не решенными по настоящее время. Исходя из этого, формулируется цель и ряд задач исследования.

**Целью исследования** является разработка методологии расчета и математического моделирования сложных закрученных турбулентных одно- и двухфазных течений в гидропневмоаппаратах на основе усовершенствованных моделей турбулентности (*n.1-3 паспорта специальности*), и применение разработанных подходов для совершенствования гидравлических и пневматических устройств, включая алгоритмы автоматизированного управления ими (*n.4-5 паспорта специальности*).

**Объектом исследования** являются рабочие процессы гидро- и пневмоаппаратов со сложными закрученными вихревыми одно- и двухфазными течениями жидкости и газа.

**Предметом исследования** являются математические модели и методология расчета сложных закрученных турбулентных одно- и двухфазных течений жидкости и газа, связывающие рабочие процессы гидро- и пневмоаппаратов с их интегральными характеристиками.

Для достижения поставленной цели, **в диссертации решаются следующие задачи:**

1. Разработать значительно усовершенствованные модели турбулентных течений

чений жидкости и газа, которые позволяют более точно отразить физические процессы, определяющие работу гидропневмоаппаратов (вихревой трубы и поршневого волнопродуктора), а следовательно повысить точность прогнозирования их интегральных характеристик.

2. Разработать современные компьютерные программы для реализации усовершенствованных математических моделей турбулентных течений с применением методов параллельных вычислений для их использования на суперкомпьютерных системах (вычислительных кластерах).
3. На основе проведенных экспериментальных исследований, выполнить калибровку и валидацию разработанных моделей турбулентных течений жидкости и газа.
4. Используя разработанные математические модели, провести детальные численные и экспериментальные исследования течений жидкости и газа в проточных частях вихревой трубы и волнопродуктора гидроволнового лотка с целью раскрытия основных физических принципов и закономерностей протекающих процессов.
5. Используя современные методы планирования эксперимента, провести детальные вычислительные и лабораторные исследования влияния основных геометрических и эксплуатационных параметров на энергоэффективность вихревой трубы. На основании результатов исследований разработать новые конструкции узлов вихревой трубы для повышения ее энергоэффективности.
6. Разработать слабонелинейные алгоритмы автоматизированного управления поршневыми и шарнирно закрепленными волнопродукторами, предназначенные для значительного повышения точности генерации поверхностных волн в лабораторных гидроволновых лотках (для повышения точности лабораторных испытаний на силовое воздействие от наката волн).
7. Раскрывая физику процессов, протекающих при работе волнопродуктора, используя разработанные математические модели течений жидкости и га-

за, разработать методы эмпирической корректировки слабонелинейных алгоритмов автоматизированного управления волнородукторами для повышения точности генерации волн.

## **Научная новизна**

1. На основании выявленных недостатков, разработаны значительно усовершенствованные математические модели сложных турбулентных одно- и двухфазных течений жидкости и газа, которые более точно отражают физику происходящих процессов. Математические модели учитывают впервые введенный турбулентный поток энергии  $q_\gamma$ , связанный с эффектами сжимаемости жидкости и дополняющий ранее учтенные турбулентные потоки  $q_\sigma$  и  $q_\lambda$ . Установлено, что вклад  $q_\gamma$  в энергообменные процессы достигает  $\sim 30\%$  и хорошо согласуется с гипотезой взаимодействия вихрей. Математические модели также учитывают кинематический критерий, который верно отражает физику обрушения волн, что впервые экспериментально доказано в работе. (*n.1 паспорта специальности*)
2. Проведена калибровка и детальная верификация усовершенствованных моделей турбулентных течений по отношению к серии лабораторных измерений, выполненных, в том числе, с использованием нового метода синхронизации вычислительных и лабораторных экспериментов. Успешная верификация моделей, использованных для расчета сложных турбулентных одно- и двухфазных течений жидкости в гидропневмоаппаратах, подтвердила существенное повышение точности прогнозирования интегральных характеристик вихревых труб и поршневых волнопродукторов. Погрешность прогноза величины изоэнтропного КПД вихревой трубы снижена с  $\sim 30\%$  до  $\sim 2...10\%$ . Погрешность определения пространственной координаты обрушения волны, сгенерированной волнопродуктором, снижена до  $0.15...0.55\%$  от длины гидроволнового лотка. (*n.1,3 паспорта специальности*)
3. На основании новых знаний о структуре сложных турбулентных течений,

полученных используя разработанные математические модели и лабораторные измерения, выявлены новые физические явления. Применяя метод минимизации порождения энтропии для анализа результатов математического моделирования было установлено существование паразитной области течения в камере энергоразделения вихревой трубы. Обнаружен эффект дестабилизации течения в сверхзвуковом сопловом вводе и спрямляющем лопаточном аппарате холодного потока. Использование разработанной математической модели позволило впервые обнаружить формирование сложных нестационарных вихревых течений вблизи волнопродуктора, вызванных его функционированием. Впервые обнаружен физический эффект “фазовой синхронизации” (phase locking effect), вызванный турбулентными течениями, порожденными обрушением поверхностных волн. (*n.3,4 паспорта специальности*)

4. Проведена серия вычислительных экспериментов на базе разработанных математических моделей и плана эксперимента для совершенствования рабочих процессов вихревых труб за счет изменения основных геометрических и эксплуатационных факторов. Установлено, что уменьшение диаметров камеры энергоразделения позволяет исключить паразитную область течения и, тем самым, повысить КПД вихревой трубы. Для верификации результатов вычислительных экспериментов создан оригинальный экспериментальный стенд и проведены измерения интегральных характеристик вихревой трубы в двухконтурном и разделительном режимах работы, которые подтвердили рост КПД. (*n.1,3,4 паспорта специальности*)
5. Применение созданных математических моделей позволило разработать ряд усовершенствований вихревой трубы, имеющих большое практическое значение. Предложен и разработан принципиально новый способ формирования сверхзвукового винтового течения и соответствующий ему новый тип соплового ввода вихревой трубы. Предложен и разработан новый способ эффективного торможения высокоскоростного холодного потока вихревой

трубы за счет установки спрямляющего лопаточного аппарата. Численно и экспериментально установлено, что внедрение разработанных усовершенствований вихревой трубы позволяет увеличить ее изоэнтропный КПД в режиме наибольшей холодопроизводительности на  $\sim 4\ldots 5\%$  (в отдельных случаях до  $\sim 7\%$ ). (*n.1,2,4 паспорта специальности*)

6. Разработаны принципиально новые слабонелинейные алгоритмы автоматизированного управления поршневым и шарнирно закрепленным волнопродуктором, опирающиеся на решения нелинейных уравнений Захарова и Шредингера. Применение уравнений Захарова и Шредингера в новых алгоритмах управления волнопродуктором взамен стандартных аналитических подходов позволило повысить точность генерации волн за счет впервые учтенных нелинейных поправок 3-го порядка нелинейности. (*n.2,4,5 паспорта специальности*)
7. Опираясь на новые знания о структуре обнаруженных сложных нестационарных вихревых течений, формирующихся вблизи волнопродуктора, предложен метод их учета путем введения эмпирической корректировочной функции  $\beta$  в слабонелинейные алгоритмы на базе уравнений Захарова и Шредингера. Разработан оригинальный итерационный метод поиска числовых значений функции  $\beta$  на основе математических моделей сложных течений жидкости и газа. Совокупность новых разработок позволила минимизировать погрешность генерации поверхностных волн до среднеквадратичного отклонения  $0.5\ldots 1\%$ . (*n.1,4,5 паспорта специальности*)

### **Теоретическая значимость**

1. Теоретически обоснована и экспериментально подтверждена необходимость учета впервые введенного полуэмпирического турбулентного потока энергии  $q_\gamma$ , который вносит вклад порядка  $\sim 30\%$  в эффект энергоразделения в вихревой трубе Ранка-Хилша. Теоретически показано, что турбулентный поток энергии  $q_\gamma$  составляет неотъемлемую частью гипотезы взаимо-

действия вихрей, что является дополнительным подтверждением верности данной гипотезы.

2. Теоретически и экспериментально доказана гипотеза о том, что обрушение поверхностных волн возникает в тот момент времени, когда лагранжева скорость жидкой частицы на гребне волны сравнивается или начинает превышать скорость самого гребня:  $V_{fl} \geq V_{cr}$ . На основании доказанной гипотезы сформулирован и откалиброван кинематический критерий обрушения поверхностных волн, являющийся неотъемлемой частью модели сложного течения в гидроволновом лотке с волнопродуктором.
3. Используя указанные выше экспериментально подтвержденные теоретические результаты и опираясь на глубокий физико-математический анализ рабочих процессов гидропневмоаппаратов (вихревых труб и поршневых волнопродукторов), разработаны теоретические основы и получены математические уравнения моделей сложных турбулентных одно- и двухфазных течений жидкости и газа, наблюдаемых в исследуемых гидропневмоаппаратах. Экспериментально показано, что численное решение уравнений полученных моделей течений жидкости и газа дает существенный рост точности прогнозирования интегральных характеристик вихревых труб и поршневых волнопродукторов.
4. Для преодоления ограничений существующих теорий рабочих процессов волнопродуктора (таких как повсеместно используемая теория 2-го порядка нелинейности Шаффера), предложены и разработаны принципиально новые теории волнопродуктора на базе нелинейных уравнений Захарова и Шредингера. В связи с тем, что уравнение Шредингера ограничено 3-им порядком нелинейности, а уравнение Захарова не имеет ограничений по порядку нелинейности, предложенный новый теоретический подход позволил преодолеть ограничения существующих теорий волнопродуктора через впервые учтенные нелинейные поправки 3-го и даже более высоких порядков нелинейности.

5. Используя разработанные теоретические методы и модели, впервые обнаружены и исследованы физические явления, важные для инженерной практики: формирование паразитной области течения в камере энергоразделения вихревой трубы; эффект дестабилизации течения в вихревой трубе; явление “фазовой синхронизации”, возникающее при обрушении поверхностных волн; впервые обнаружено формирование сложных нестационарных вихревых течений вблизи волнопродуктора, вызванных его функционированием.
6. Совокупность экспериментально подтвержденных теоретических разработок привела к созданию методологических основ расчета сложных течений жидкости и газа, практическая реализация которых создала новые инструменты совершенствования рабочих процессов вихревых труб и поршневых волнопродукторов.

### **Практическая ценность**

1. На основании проведенного анализа и раскрытия физических процессов, протекающих в сложных закрученных турбулентных течениях, разработаны усовершенствования вихревой трубы и ее узлов, которые позволили увеличить величину изоэнтропного КПД в режиме наибольшей холодопроизводительности на  $\sim 4\ldots 5\%$ . В том числе, разработан и защищен патентом на изобретение (№2533590) сверхзвуковой сопловой ввод вихревой трубы нового типа. Запатентованы ряд других изобретений и полезных моделей (№2406952, №124367).
2. Учет впервые полученных нелинейных поправок 3-го порядка нелинейности в рамках теории волнопродуктора на базе уравнений Захарова и Шредингера, а также предложенной оригинальной эмпирической корректирующей функции  $\beta$ , позволил разработать новые высокоточные алгоритмы автоматизированного управления поршневым и шарнирно закрепленным волнопродуктором, которые защищены свидетельствами о государствен-

ной регистрации программ для ЭВМ №2025669129 и №2025669130.

3. Разработанные алгоритмы автоматизированного управления волнопродуктором используются на практике в лаборатории поверхностных волн Тель-Авивского университета для управления шарнирно закрепленным волнопродуктором большого гидроволнового лотка, что закреплено в приложенной справке о внедрении.
4. Результаты исследования были использованы в конструкторском бюро ООО “КБ “ЧКЗ–ЮГСОН” и АО “КЭНПО” при проектировании и изготовлении широкой линейки вихревых труб и других гидропневмоаппаратов, в том числе: ВТ 3-6, ВТ 5-90, ВТ 30Р, РЕСШ.4414, ВТ 30-50, ДВТР 40-9000, ВТ 63Р и др. К диссертации приложены соответствующие справки о внедрении.
5. Усовершенствованные модели сложных закрученных турбулентных одно- и двухфазных течений жидкости и газа вошли в состав разработанных высокопроизводительных компьютерных программ, базирующихся на современных численных алгоритмах (методы конечных объемов, граничных элементов, распределенных вычислений и др.).
6. Отдельные части диссертации использовались соискателем при подготовке лекционного материала в рамках обучения студентов технических специальностей в двух университетах: ФГАОУ ВО Уральский федеральный университет и Ариэльский университет (Израиль).

## **Методы исследований**

В диссертации использована комбинация взаимодополняющих методов теоретических и экспериментальных исследований, методов анализа течений жидкости и газа, термодинамики и теплообмена. Теоретический анализ основывается на методах дифференциального и интегрального исчисления, дополненных методами возмущения и разложения по малому параметру. В численном анализе использовались современные версии Метода Контрольных

Объемов и Метода Границых Элементов. При проведении экспериментальных исследований использовались методы статистической обработки результатов для оценки неопределенности измерений.

**Достоверность и обоснованность результатов** подтверждается:

- использованием основных фундаментальных уравнений сохранения массы, момента движения, энергии, а также уравнений состояния, в математических моделях;
- корректным использованием современных численных методов (методы конечных объемов, граничных элементов, распределенных вычислений);
- детальной верификацией результатов численного исследования по отношению к лабораторным измерениям, которая качественно и количественно подтвердила результаты математического моделирования;
- использованием апробированных методов планирования и проведения экспериментов, а также анализа экспериментальных результатов.

**Работа выполнена при поддержке следующих грантов:**

1. Гранты на проведение научных исследований молодыми учеными и аспирантами Уральского федерального университета, 2010–2011 гг.
2. Грант Российской Академии Архитектуры и Строительных Наук, институт “УралНИИпроект РААСН”, № Д-23/13, 2013–2015 гг. Тема: Исследование инновационных энергоэффективных систем климатизации на базе вихревой трубы. Исполнитель.
3. Грант Министерства науки, технологий и космоса Израиля, № 3-12473, 2015–2019 гг. Тема: Исследование неоднородных ветровых волн при стационарном и/или нестационарном воздействии. Исполнитель в рамках постдокторантury, Тель-Авивский университет (Израиль).
4. Грант исследовательского совета по инженерным и физическим наукам (EPSRC, Англия), № EP/S011862/1, 2019–2021 гг. Тема: Высокоточное моделирование захвата воздуха при воздействии обрушающихся волн на

сооружения. Исполнитель в рамках постдокторантуры, Университет Манчестер Метрополитен (Англия).

### **Положения, выносимые на защиту**

1. На основе полученных новых знаний о физических процессах, наблюдавшихся в сложных течениях жидкости и газа, предложены усовершенствование моделей турбулентности для расчета и прогнозирования интегральных характеристик вихревых труб и поршневых волнопродукторов. (*n.1,3 паспорта специальности*)
2. Методологические основы расчета и математического моделирования рабочих процессов исследуемых гидропневмоаппаратов. (*n.1,2 паспорта специальности*)
3. Результаты численного и экспериментального анализа рабочих процессов исследуемых гидропневмоаппаратов. Новые знания о структуре турбулентного течения в проточной части вихревой трубы и поршневого волнопродуктора, полученные, в том числе, при помощи метода минимизации порождения энтропии. (*n.1,3,4 паспорта специальности*)
4. Впервые обнаруженные физические явления, а также их влияние на рабочие процессы и интегральные характеристики исследуемых гидропневмоаппаратов. (*n.4 паспорта специальности*)
5. Новые элементы проточной части вихревой трубы и их конструкции, полученные в результате применения разработанных математических методов и моделей (предложен и запатентован принципиально новый тип соплового ввода вихревой трубы, а также методика его расчета и моделирования; новый способ повышения энергоэффективности вихревой трубы путем установки спрямляющего лопаточного аппарата для эффективного торможения холодного потока). (*n.1,2,4 паспорта специальности*)
6. Принципиально новые слабонелинейные алгоритмы автоматизированного управления поршневым и шарнирно закрепленным волнопродуктором, от-

личающиеся повышенной точностью за счет учета поправок 2-го и 3-го порядков нелинейности (алгоритмы внедрены в систему управления лабораторными волнопродукторами, а также зарегистрированы в Роспатенте).  
*(n.2,4,5 паспорта специальности)*

7. Новый метод повышения точности генерации поверхностных волн волнопродуктором на основе разработанных моделей течений жидкости и газа за счет внесения эмпирических корректировок в слабонелинейные алгоритмы автоматизированного управления волнопродуктором. *(n.1,4,5 паспорта специальности)*

## **Апробация работы**

Результаты, изложенные в диссертации, докладывались и обсуждались:

- на 8-и международных научных конференциях: ISOPE 2020 (Китай); ASME OMAE 2019 (Великобритания); ASME OMAE 2018 (Испания); ICME 2018 (Израиль); WISE 2018 (Израиль); CONVR 2013 (Великобритания); ICCBE 2012 (Россия); ICMEME 2012 (Китай).
- на 4-х всероссийских научно-технических конференциях (Москва, Саратов, Екатеринбург);
- на 9-ти международных семинарах: University of Plymouth (Великобритания, 2022); SRM Institute of Science and Technology (Индия, 2022); Сибирское отделение РАН (ФИЦ ИВТ, Новосибирск, 2021); Ariel University (Израиль, 2020); Tel Aviv University (Израиль, 2020); Keele University (Великобритания, 2020); Queen's University Belfast (Великобритания, 2019); Manchester Metropolitan University (Великобритания, 2019); Tel Aviv University (Израиль, 2018).

## **Публикации**

По материалам диссертации опубликовано 54 печатных труда:

- 21 статья в изданиях «Белого списка» (Единого государственного перечня научных изданий), включенных в базы цитирования Web of

Science и Scopus, из них 11 статей в изданиях Q1 (1-го уровня);

- 11 статей в ведущих рецензируемых журналах и научных изданиях, рекомендуемых Высшей аттестационной комиссией РФ;
- 15 статей в других изданиях;
- 3 патента Российской Федерации и 4 свидетельства о регистрации программы для ЭВМ.

### **Личный вклад соискателя в работу**

Все исследования, результаты которых изложены в диссертации, были выполнены соискателем лично или при его непосредственном участии. Некоторая часть результатов была получена студентами при работе над дипломными проектами и магистерскими диссертациями под непосредственным руководством соискателя и в его соавторстве. Материалы диссертации основаны на исследованиях соискателя, выполненных за период 2009–2025 гг.

### **Объем и структура работы**

Диссертация изложена на 459 страницах, в том числе 375 страниц основного текста, состоит из введения, восьми глав, заключения, списка литературы и восьми приложений. В работе содержится 150 рисунков, 25 таблиц. Библиографический список включает 427 наименований.

### **Благодарности**

Настоящее диссертационное исследование было бы невозможным без неоценимого вклада научных руководителей соискателя: проф. В.Е. Щербы (Омский государственный технический университет), проф. А.С. Носкова (Уральский федеральный университет), проф. Л. Шемера (Тель-Авивский университет, Израиль), д-ра З. Ма (Университете Манчестер Метрополитен, Великобритания), доц. В.Ю. Энгеля, проф. В.Н. Алехина (Уральский федеральный университет), гл. констр. А.В. Ловцова (КБ “ЧКЗ-ЮГСОН”). Их страсть к науке, глубокий профессиональный опыт, талант и знания стали

прочной основой для научной деятельности соискателя. Соискатель выражает глубокую благодарность гл. конструктору КБ “ЧКЗ-ЮГСОН” А.В. Ловцову, ген. директору КБ “ЧКЗ-ЮГСОН” В.П. Сыропятову, доц. А.В. Некрасову, доц. В.Ю. Энгелю, доц. А.М. Корякину и доц. В.М. Колоскову за вовлечение соискателя в научно-исследовательскую работу.

Соискатель благодарит АО “КЭНПО” в лице генерального директора г-на М.В. Щукина и коммерческого директора г-на В.Н. Олькова, а также коллектив конструкторского бюро “ЧКЗ-ЮГСОН”, за внедрение передовых инновационных научно-исследовательских разработок в промышленные образцы и изделия. Глубокая благодарность выражается проф. А.А. Жарковскому, проф. В.А. Целищеву, проф. А.В. Волкову, проф. А.В. Месропяну, проф. В.А. Пронину, проф. И.В. Баранову за конструктивную критику диссертации и ценные замечания.

Отдельная благодарность выражается уважаемым коллегам, с которыми соискателю посчастливилось тесно взаимодействовать по широкому кругу научных вопросов: зав. каф. гидравлики Л.Г. Пастуховой (Россия), доц. В.А. Дорошенко (Россия), доц. С.Ю. Плешкову (Россия), Н.М. Аношину (Россия), доц. А.А. Секачевой (Россия), доц. А.А. Антипину (Россия), С.Н. Городилову (Россия), доц. В.Б. Давыдову (Россия), проф. Л.Б. Чубарову (Россия), доц. А.Ю. Морозову (Россия), проф. В. Бьянко (Италия), проф. М. Де Роса (Италия), проф. П. Зунино (Италия), проф. В. Шрире (Великобритания), д-ру С. Анненкову (Великобритания), проф. Д. Либерзону (Израиль), д-ру Р. Штульмайеру (Великобритания, Израиль), проф. Я. Толедо (Израиль, Германия), проф. Ц. Шилеру (Израиль), проф. И. Авраами (Израиль), д-ру Ш. Линейкину (Израиль), д-ру И. Беринскому (Израиль), д-ру И. Бармаку (Израиль), д-ру Г. Розенману (Израиль, США), д-ру А. Завадскому (Израиль), д-ру А. Ферштману (Израиль, США), д-ру П. Чернышову (Россия, Израиль, Германия), д-ру Т. Вречица (Израиль, Сербия), д-ру С.К. Сингху (Индия, Из-

раиль), д-ру С. Де Чоудхури (Индия, Великобритания), И. Цину (Израиль), Э. Мейснеру (Израиль).

Соискатель благодарит коллеги кафедр гидравлики и САПРОС Уральского федерального университета, коллектив Школы машиностроения Тель-Авивского университета, коллектив Департамента машиностроения Ариэльского университета, коллектив Центра математического моделирования и анализа потоков в Университете Манчестер Метрополитен, коллектив кафедры “Гидромеханика и транспортные машины” Омского государственного технического университета.

Соискатель благодарит студентов и магистрантов, руководство работами которых скрасило исследования соискателя. В конце, но не в последнюю очередь, соискатель благодарит своих родителей, семью, родственников и друзей, которые всегда были и остаются рядом.

## ГЛАВА 1

# ТУРБУЛЕНТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ: СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА И МОДЕЛИРОВАНИЯ

### 1.1. Краткий обзор исследований турбулентности

Течения жидкостей и газов являются одной из самых распространенных форм движения материи. Они являются неотъемлемой составляющей живой и неживой природы, а также повсеместно используются в науке и технике. Практически любая техническая система включает в себя в той или иной мере движение жидкости или газа [1]. Широкое распространение различных течений потребовало создание теоретической базы для их точных и приблизительных (инженерных) расчетов. В полной мере теоретическая база до сих пор не создана, а многие фундаментальные вопросы не имеют ответов.

Такое положение дел вызвано, в первую очередь, сложностью механики течений жидкости. В отличие от механики твердого тела, течение жидкости фундаментально нелинейно, в первую очередь, из-за наличия конвективных переносов массы и других скаляров. Э.Н. Лоренц занимаясь исследованиями планетарных погодных явлений обнаружил, что незначительные изменения начальных условий в его модели атмосферных течений приводят к кардинальным изменениям в результатах расчета. Более того, изменения в начальных условиях были на уровне ошибок округления с учетом разрядности процессора. Далее Лоренцу удалось предельно упростить используемую численную модель и исследовать ее основные свойства в работе [2]. В результате был открыт так называемый странный аттрактор Лоренца.

Главной особенностью системы аттрактора Лоренца является наличие двух центров равновесия, то есть, так называемая, бистабильность [3]. С течением времени система Лоренца стремится к одному из этих центров. Однако обнаруживаются некоторые режимы, в которых происходит неожидан-

ная смена одного центра равновесия на другой. Причем, возможность такой смены центра равновесия определяется малыми изменениями в начальных условиях системы. Позже было показано существование странного аттрактора Лоренца в реальных физических явлениях, например, при конвекции в подогреваемом снизу слое [3].

Применительно к механики жидкости и газа (МЖГ), стремление течения к единственному центру равновесия делает течение устойчивым. Такие течения, как правило, характеризуются низкими скоростями и является “спокойным”. При устремлении времени в бесконечность, все параметры течения становятся постоянными. Однако при увеличении скорости течения выше определенного порога, силы вязкого трения становятся недостаточными для демпфирования нелинейностей, которые, в конечном счете, приводят к потери течением устойчивости. Вопросы устойчивости течений жидкости и газа являются настолько важными, что они привели к формированию отдельного подраздела МЖГ - “Теории гидродинамической устойчивости” [4, 5].

### **1.1.1. Потеря течением устойчивости. Возникновение турбулентности**

Понятие устойчивости состояния физической или математической системы было сформулировано Клерком Максвеллом [6] следующим образом: “Состояние системы является устойчивым, если бесконечно малое возмущение данного состояния будет изменяться только на бесконечно малое количество в некоторый будущий момент времени; но когда бесконечно малое изменение в данном состоянии может принести к конечному отклонению системы за конечное время, состояние системы является неустойчивым”. Теория гидродинамической устойчивости приобретает особую важность ввиду того, что для разрушения устойчивости течения достаточно бесконечного малого возмущения. В качестве примера, на рис. 1.1 показаны некоторые случаи потери

устойчивости, наблюдаемые в природе.

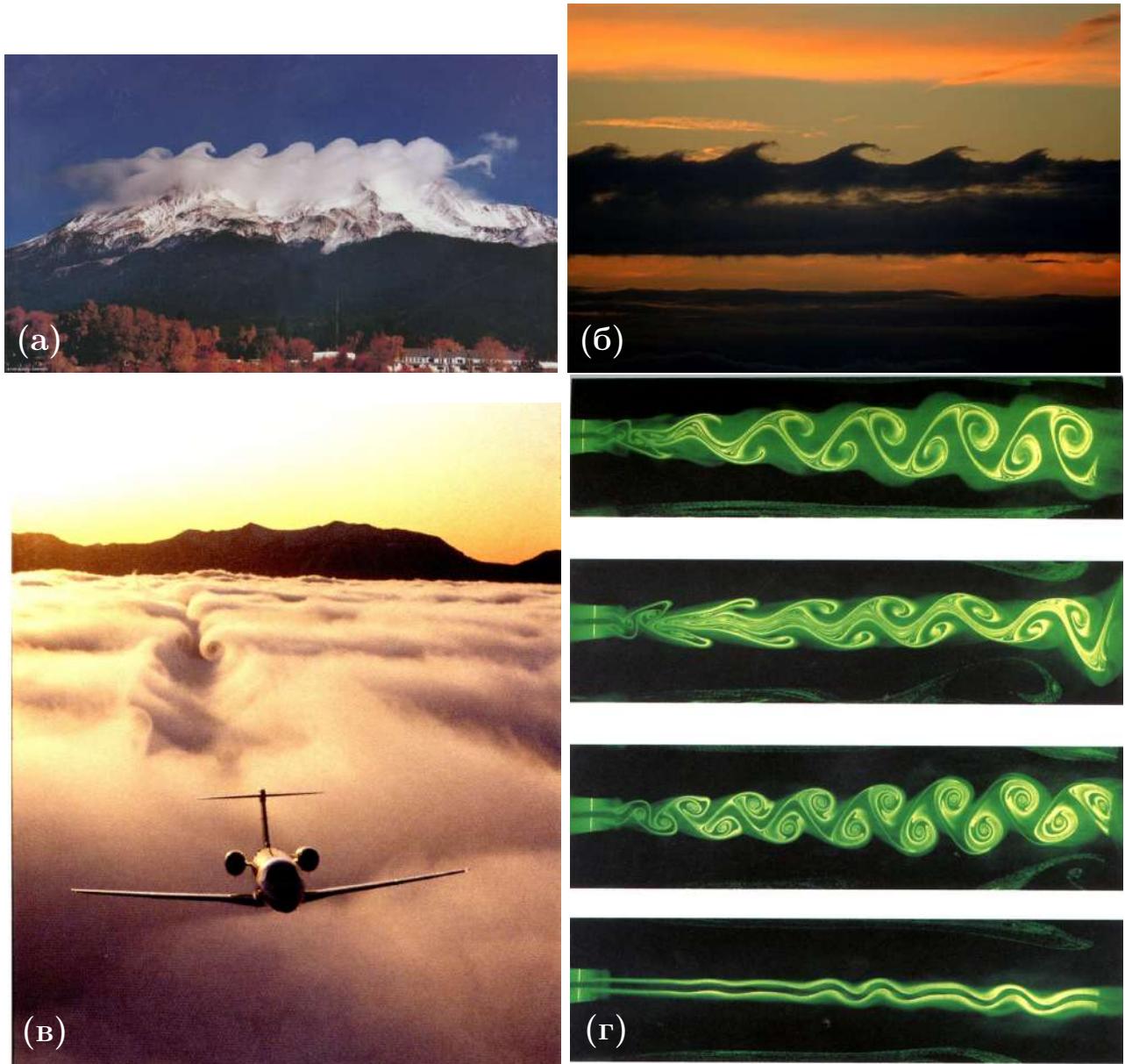


Рис. 1.1. Примеры неустойчивых течений, встречаемых в природе:

(а) и (б) - неустойчивость Кельвина-Гельмгольца; (в) - неустойчивость течения около крыльев, вызванная концевым эффектом; (г) - неустойчивость плоской затопленной струи. Изображения заимствованы из литературных источников [4, 7]

Неустойчивость течений изучается разными способами в рамках следующих направлений:

1. Наблюдение природных явлений, что представляет собой предварительный этап изучения. Последующие теоретические исследования, как правило, направлены на объяснение, интерпретацию и количественное описание этих явлений.

2. Численные эксперименты, которые стали играть одну из ключевых ролей в исследовании гидродинамической устойчивости после достижения вычислительной техникой достаточного уровня производительности. В настоящее время вычислительная гидродинамика (Computational Fluid Dynamics - CFD) находится на такой стадии, что может конкурировать с лабораторными исследованиями по точности получаемых данных. Однако это справедливо только в очень узком диапазоне временных и пространственных масштабов задач.
3. Линейная и слабо нелинейная теория - это один из первых подходов к изучению явления гидродинамической устойчивости. В рамках данного подхода течение жидкости раскладывается на две составляющие, первая из которых является полностью детерминированной и неизменной во времени (так называемое, базовое течение), а вторая вносит бесконечно малые возмущения. В том случае, если амплитуда бесконечно малых возмущений со временем растет, течение считают потерявшим устойчивость. Главное преимущество данного подхода состоит в том, что дифференциальные уравнения, определяющие эволюцию возмущения во времени, т.е. уравнения Рэлея и Оппа-Зоммерфельда [8, 9, 10], являются линейными и интегрируемыми для ряда случаев.
4. Сильно нелинейная теория, которая рассматривает произвольно большие (конечные) возмущения. В данном случае используется теорема Серрина (Serrin) и прямой метод Ляпунова [4] для специфических весьма ограниченных случаев.
5. Теория детерминированного хаоса, которая показывает, что неустойчивые течения могут развиваться по мере роста некоторых безразмерных параметров (критериев). Такое развитие происходит через последовательность бифуркаций от одного режима течения к другому. Причем, конкретный путь системы через последовательность бифуркаций в значительной степени зависит от бесконечно малых отклонений в ее на-

чальном состоянии, что в конечном счете может выглядеть как хаос.

Странный аттрактор Лоренца принято считать простейшим прообразом зарождения детерминированного хаоса через бифуркационные переходы от одного центра равновесия к другому [2, 3].

Одним из первых явление хаоса в течениях жидкости в круглой цилиндрической трубе изучал О. Рейнольдс [11]. Им был введен безразмерный критерий, впоследствии названный его именем, т.е. число Рейнольдса

$$Re = \frac{VL}{\nu}, \quad (1.1)$$

которое определяется отношением произведения осредненной скорости течения  $V$  и пространственного масштаба течения  $L$  (например, диаметр трубы) к кинематической вязкости жидкости  $\nu$ . Рейнольдс экспериментально установил, что течение в трубе является устойчивым в том случае, если критерий  $Re$  ниже его критического значения  $Re_{\text{кр}}$ , причем критическое значение не зависит от масштаба (размера) течения или типа жидкости. Образующееся устойчивое течение было названо ламинарным.

Увеличение числа Рейнольдса выше критического значения приводит к потери течением устойчивости, выражющейся видимым искажением траекторий жидких частиц в результате роста случайных бесконечно малых возмущений до конечных величин. Что еще более важно, дальнейшее повышение числа  $Re$  приводит к эволюции неустойчивого переходного течения в фундаментально новое состояние движения, называемое турбулентностью [4, 5]. В турбулентном течении бифуркации следуют непрерывно одна за другой формируя хаотическое, неупорядоченное и фактически непредсказуемое движение жидких частиц. Тэйлор и Карман дают следующее определение турбулентности [12, 13]: “Турбулентностью называется неупорядоченное движение, которое в общем случае возникает в жидкостях, когда они обтекают непроницаемые поверхности или же когда соседние друг с другом потоки одной и

той же жидкости следуют рядом или проникают один в другой”.

Детали процесса перехода от ламинарного течения к турбулентному являются не только очень сложными, но и сильно меняются от течения к течению. Физическая причина перехода неустойчивого ламинарного (или переходного) течения к турбулентному именно при достижении числом Рейнольдса его критического значения  $Re$  является открытым вопросом и предметом проводимых в настоящее время исследований. Как считал сам Рейнольдс, величина  $Re_{kp}$  вряд ли может быть получена теоретически вследствие чрезвычайной сложности физических процессов. Несмотря на это, имеется ряд единообразных фактов в теории турбулентности, характерных большому количеству типов течений.

Основной факт заключается в том, что увеличение  $Re$  приводит к последовательному временному и пространственному усложнению течения в результате последовательности бифуркаций вплоть до возникновения турбулентности. Каждая бифуркация возникает в результате неустойчивости одного течения и приводит к формированию другого течения, которое является устойчивым в течение некоторого интервала времени [14, 15]. Устойчивое течение, образующееся в результате первой бифуркации основного течения при увеличении числа  $Re$ , принято называть вторичным течением, а его неустойчивость при второй бифуркации с увеличением числа  $Re$  – вторичной неустойчивостью. Обычно первичная неустойчивость двумерного течения приводит к возникновению квазистационарной устойчивой двумерной волны, а трехмерность формируется в результате вторичной неустойчивости, когда нарушается двумерная симметрия [4].

Последующие бифуркации происходят одна за другой при уменьшающихся приращениях числа  $Re$ , и в лабораторных условиях они не различимы. Двумерные волны, сформированные в результате первичной потери течением неустойчивости, можно рассматривать в качестве гармоник частотного спектра. С ростом амплитуды, возникают нелинейные взаимодействия меж-

ду такими гармониками с образованием субгармоник (side bands), которые еще больше усложняют спектр. Образования новых неустойчивых гармоник, а также субгармоник, фактически означает расширение диапазона характерных масштабов течения. Таким образом, рост числа  $Re$  существенным образом усложняет движение жидкости.

В бесконечном наборе бифуркаций ряд исследователей усматривают некоторый порядок и выделяют следующие пути перехода от ламинарного к турбулентному течению:

1. Через докритическую неустойчивость [4]. На этом пути устойчивое стационарное течение становится неустойчивым при медленном увеличении числа  $Re$  и его переходе через критическое значение. В этом случае ламинарное течение быстро переходит в турбулентное, которое не является непрерывным продолжением устойчивого течения.
2. Путь Рюэля-Такенса-Ньюхауза [16, 17]. Вдоль этого пути наблюдается последовательность бифуркаций при увеличении  $Re$ , в результате которых формируются некоторые квази-стационарные и периодические во времени течения с двумя, тремя или четырьмя характерными частотами. Затем следует переход к хаотическому течению.
3. Удвоение периода. Здесь в результате последовательности бифуркаций возникают периодические во времени течения с периодом равным удвоенному периоду предыдущего течения. Подобные явления были описаны, например, в работах [18, 19].
4. Скачкообразный переход [20]. В этом случае ламинарное течение сохраняет свою устойчивость до того момента как в него вносится случайное малое, но конечное возмущение. С ростом числа  $Re$  течение становится неустойчивым по отношению к возмущениям все меньшей и меньшей конечной амплитуды. Неустойчивость проявляется в виде пространственно локализованной “вспышки” (puff), которая сохраняется на очень больших временных масштабах. С увеличением числа  $Re$ ,

“вспышки” образуются все с большей частотой, однако их энергия не изменяется значительно. В настоящее время считается, что эта теоретическая концепция может объяснить турбулентные пятна и нарушения ламинарности, которые наблюдал в своих опытах Рейнольдс [11].

В настоящее время процесс зарождения турбулентности в цилиндрической трубе является предметом активного исследования [21, 22, 23, 24]. В результате лабораторных экспериментов и прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation - DNS) было установлено, что при окологритических числах  $Re$  ламинарное течение является устойчивым, а переход к турбулентности происходит по последнему сценарию. Внесение малого локального возмущения приводит к образованию “вспышки” (puff), форма которой показана на рис. 1.2(а). После образования вспышки турбулентная энергия быстро нарастает в строго ограниченном узком пространстве до определенного предела, после которого возможны несколько путей. Первый путь заключается в том, что вспышка распространяется по потоку без искажений формы, размеров и энергии. Такую ситуацию можно наблюдать при числах  $Re$  несколько ниже критического.

Согласно [22, 23, 24], приближение числа Рейнольдса к критическому значению,  $Re \sim Re_{kp} \approx 2300$ , может вызвать явление “деления вспышек” (“puff splitting”). При этом родительская вспышка после деления остается неизменной, а новая вспышка формируется ниже по течению за родительской. Процесс деления вспышки, полученный в результате прямого численного моделирования (DNS), показан на рис. 1.2(а)-(д) [23]. Прямое численное моделирование также показывает, что до момента первого деления вспышки проходит существенный интервал времени, а интервал между вспышками никогда не восстанавливается до развитого ламинарного течения.

Увеличение числа Рейнольдса до  $Re > 2300$  приводит к пространственному разрастанию локализованных вспышек (puff spreading) так, что все течение в трубопроводе постепенно вовлекается в стохастические пульсации

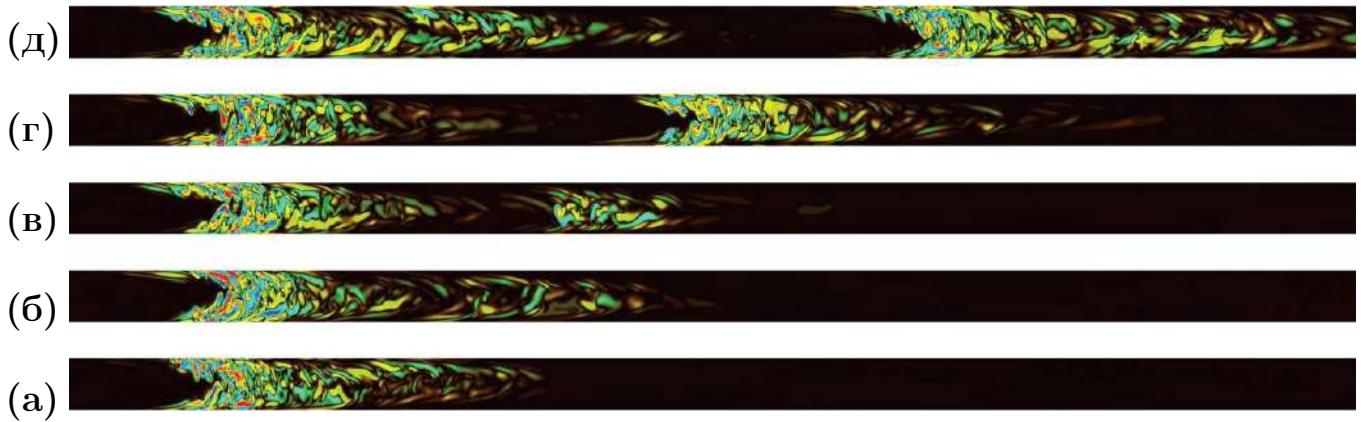


Рис. 1.2. Прямое численное моделирование (DNS) процесса “деления вспышки” в прямой цилиндрической трубе с гладкими стенками. Изображение показано в работе [23]. (а)-(д) развитие процесса деления в продольном сечении прямой цилиндрической трубы с гладкими стенками. Красным цветом показаны положительные, а синим отрицательные значения завихренности. Использована линейная цветовая шкала. Система координат движется со средней скоростью потока  $\bar{U}$ .

и турбулизируется. Рис. 1.3 показывает результаты прямого численного моделирования течения в прямой цилиндрической трубе при  $Re = 4000$  [22]. Видно, что вспышка, изначально расположенная в центре координат, увеличивается в размерах и в конечном счете захватывает практически все пространство трубы. Таким образом, исследования показывают, что низкорейнольдсовые неустойчивые течения, как правило, представляют собой набор отдельных вспышек пространственно отделенных друг от друга, в то время как в более высокорейнольдсовых течениях отдельные вспышки сливаются друг с другом и образуют единую стохастическую систему.

Рисунок 1.4 показывает пространственно-временные диаграммы развития турбулентных вспышек при разных числах Рейнольдса. Видно, что при числе  $Re = 2300$  наблюдается многократное деление единственной вспышки. Каждая из вновь образованных вспышек отчетливо отделяется пространственно от соседних. С другой стороны, при числе  $Re = 2450$  деление вспышек происходит значительно быстрее. Более того, отдельные вспышки более не различимы и, в конечном счете, сливаются друг с другом. Для более детального исследования различных режимов турбулизации течения в трубопроводе, были разработаны упрощенные модельные задачи, отражающие основные за-

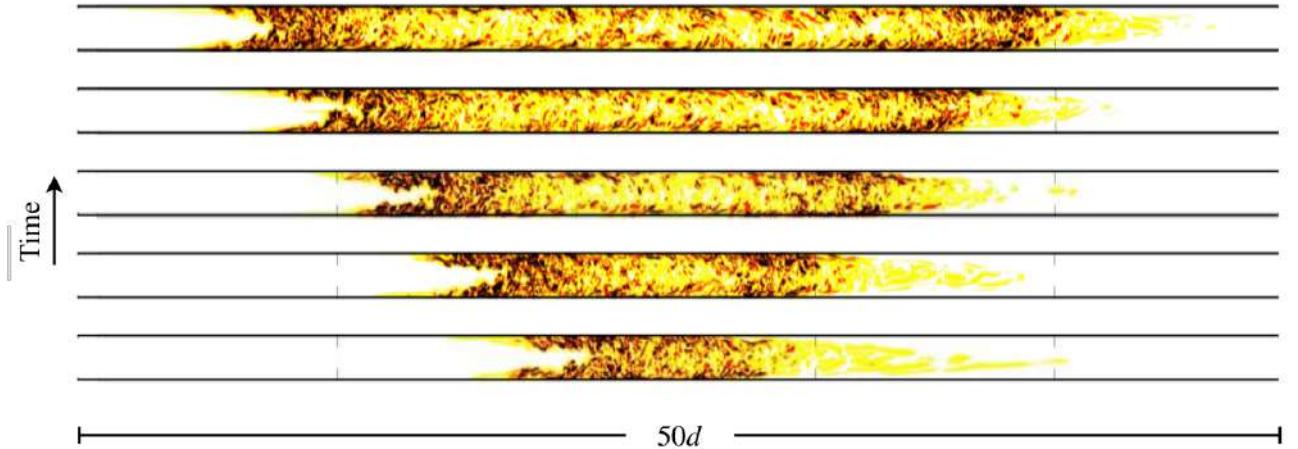


Рис. 1.3. Прямое численное моделирование (DNS) процесса разрастания вспышки в прямой цилиндрической трубе с гладкими стенками. Изображение показано в работе [22].

Число Рейнольдса в расчетах составляло  $Re = 4000$ . Цветом показана кинетическая энергия течения за вычетом энергии устойчивого ламинарного потока. Таким образом, устойчивое ламинарное течения отображается белым цветом. Система координат на рисунке также движется со средней скоростью потока  $\bar{U}$ .

кономерности на качественном уровне [21, 24]. Баркли использовал данные упрощения для детального исследования процесса формирования и развития вспышек. Следует отметить, что исследования в данной области далеки от завершения.

### 1.1.2. Развитая изотропная турбулентность

С ростом числа  $Re$  происходит формирование развитого турбулентного течения, которое можно отнести к новой форме устойчивости. Впервые упоминание о турбулентном движении (*tumultuous* - шумный) встречается в работах лорда Кельвина [25, 26], который формирует терминологию и главные вопросы предстоящих исследований. Также Кельвин впервые формулирует концепцию перехода энергии турбулентности от больших масштабов к меньшим, позже названную прямым каскадом энергии [27]. Одни из первых теоретических и экспериментальных исследований развитой турбулентности были проведены Сен-Венаном и его учеником Буссинеском [28, 29], которые независимо пришли к идеи вихревой вязкости.

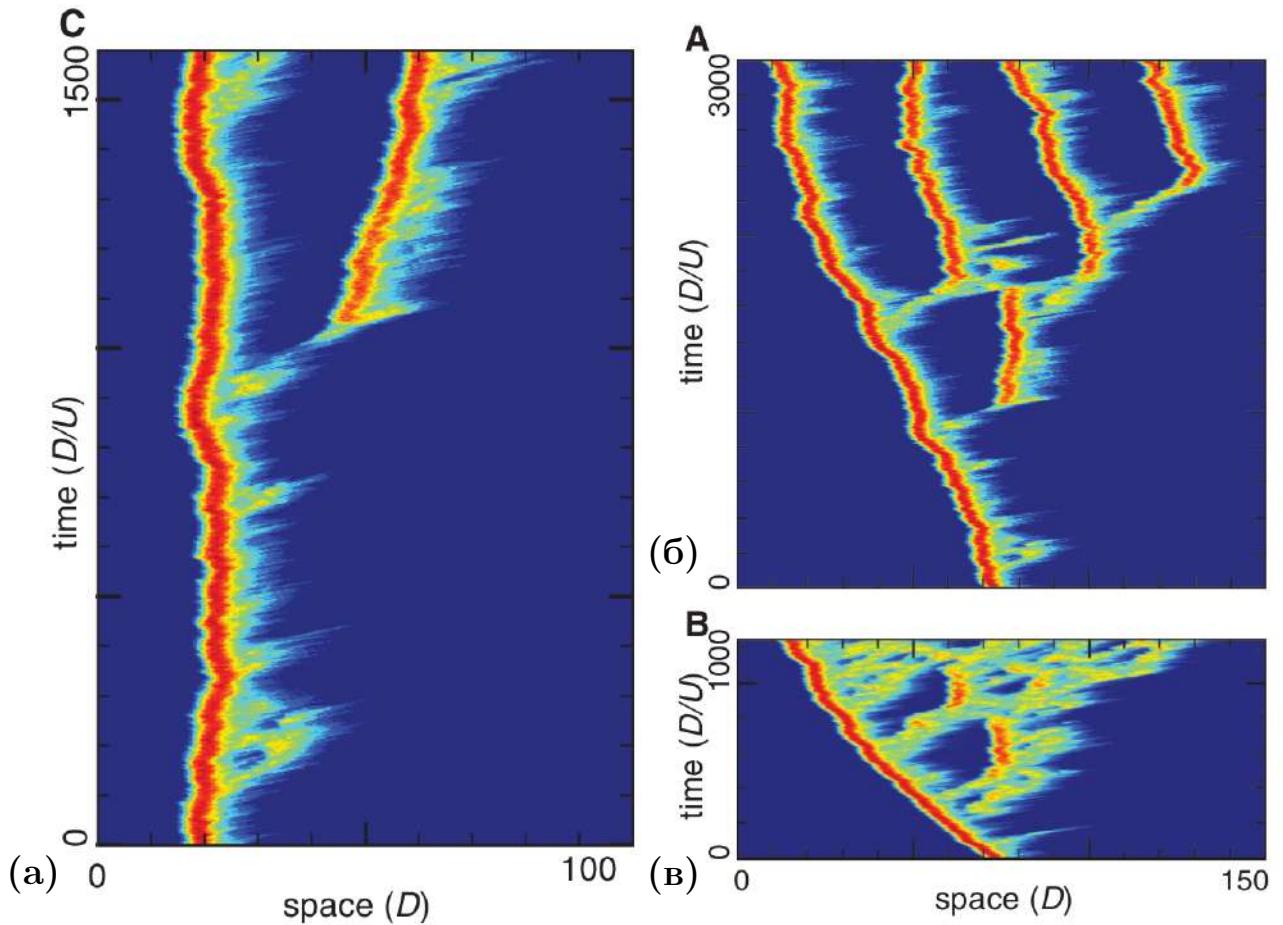


Рис. 1.4. Пространственно-временные диаграммы развития турбулентных вспышек, полученные в прямом численном моделировании с использованием гибридного спектрального и конечно-разностного метода [23] для (а),(б)  $Re = 2300$  и (в)  $Re = 2450$ . Цветом показан квадрат завихренности в логарифмической шкале. Система координат на диаграммах движется вместе с течением со скоростью (а)  $0.929\bar{U}$ , (б)  $0.947\bar{U}$ , (в)  $0.94\bar{U}$ , где  $\bar{U}$  - средняя скорость потока. После деления новые вспышки располагаются ниже по течению с примерно равным расстоянием между ними.

При всей сложности развитой турбулентности принято считать, что при достаточно больших числах  $Re$  существует единственное статистически устойчивое турбулентное течение, независимое от начальных условий [4]. Это дает основания полагать, что взаимодействие огромного количества бифуркаций и соответствующих им течений жидкости дают единственное статистически усредненное решение для любого турбулентного течения. Этим дается обоснование применимости статистического подхода к турбулентным движениям. Кроме того, любые формы симметрии течения нарушаются в результате потери им устойчивости. Но при дальнейшем увеличении числа  $Re$  и

переходе к турбулентному движению, все формы симметрии восстанавливаются для усредненного течения [30].

Опираясь на это допущение, Рейнольдс [31] предложил рассматривать турбулентное движение состоящим из двух компонент: медленно меняющейся во времени и, соответственно, быстро меняющейся (пульсационной). Пусть  $V$  есть вектор скорости течения. Тогда, в соответствии с подходом Рейнольдса, можно ввести следующее осреднение по времени [32]:

$$\langle V \rangle (x, y, z, t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} V(x, y, z, \tau) d\tau, \quad (1.2)$$

где  $T$  - некоторый характерный масштаб времени, период осреднения. Тогда мгновенное значение  $V$  запишется в следующем виде:

$$V(x, y, z, t) = \langle V \rangle (x, y, z, t) + V'(x, y, z, t) \quad (1.3)$$

Средняя компонента  $\langle V \rangle$  остается постоянной на интервале времени  $T$ , в то время как пульсационная часть  $V'$  меняется быстро, а следовательно характеризует турбулентность течения. На основании разложения Рейнольдса вводятся тензор турбулентных напряжений (напряжений Рейнольдса):

$$\Pi = \pi_{i,j} = -\langle v'_i v'_j \rangle = \begin{bmatrix} -\langle v'_1 v'_1 \rangle & -\langle v'_1 v'_2 \rangle & -\langle v'_1 v'_3 \rangle \\ -\langle v'_1 v'_2 \rangle & -\langle v'_2 v'_2 \rangle & -\langle v'_2 v'_3 \rangle \\ -\langle v'_1 v'_3 \rangle & -\langle v'_2 v'_3 \rangle & -\langle v'_3 v'_3 \rangle \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Здесь  $\{v_1, v_2, v_3\}$  - компоненты вектора скорости  $V$ , а оператор осреднения  $\langle \cdot \rangle$  задан выражением (1.2). Более подробно тензор  $\Pi$  обсуждается далее по тексту.

Все развитые турбулентные течения можно грубо разделить на несколько групп [12, 33, 34]:

1. Изотропная турбулентность с инерционной областью и вязким обре-

занием. Это один из простейших случаев, в котором характеристики турбулентности не зависят от выбранного направления. В терминах рейнольдсовых напряжений это означает, что диагональные элементы  $\Pi$  равны между собой, а не диагональные равны нулю:  $\langle v'_1 v'_1 \rangle = \langle v'_2 v'_2 \rangle = \langle v'_3 v'_3 \rangle$ ;  $\langle v'_i v'_j \rangle_{i \neq j} = 0$ .

2. Гомогенная изотропная турбулентность дополняет предыдущий случай тем, что напряжения Рейнольдса сохраняются постоянными по пространству.
3. Анизотропная турбулентность в свободных течениях. Это наиболее общий случай значений компонентов тензора  $\Pi$ . Они не равны между собой и не равны нулю.
4. Анизотропная пристеночная турбулентность наблюдается в турбулентном пограничном слое.
5. Турбулентность сдвигового течения, содержащая когерентные структуры.

Первая и вторая группы турбулентных течений значительно проще остальных в физическом и математическом смысле, что привело к ощутимому прогрессу в их изучении. Считается, что выделение изотропной турбулентности в отдельное направление исследований было сделано Тейлором [35, 26]. Пример изотропной турбулентности, полученной в лабораторных условиях, показан на рис. 1.5.

Ричардсон [36] предложил считать, что турбулентные флуктуации  $V'$  состоят из вихрей разного размера (масштаба). Крупномасштабные вихри относятся к макро-турбулентности и имеют характерный размер  $L$ , сопоставимый по величине с масштабом течения, входящим в выражение для числа Рейнольдса (1.1). Крупномасштабные вихри являются неустойчивыми, что приводит к их распаду на более мелкие вихри, которые, в свою очередь, теряют устойчивость и распадаются на еще более мелкие вихри. Это процесс перехода турбулентной энергии из крупномасштабных движений в мелкомасштаб-

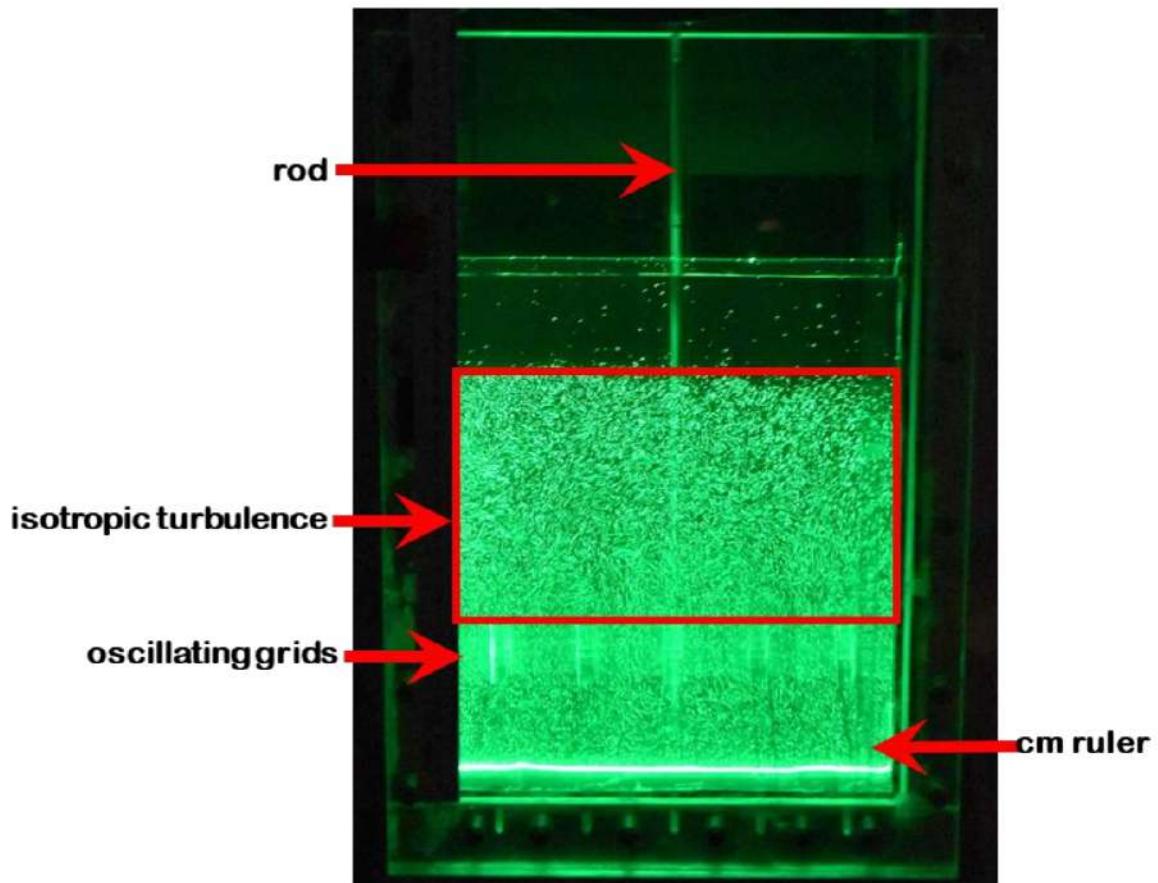


Рис. 1.5. На фото изображен процесс генерации изотропной турбулентности при помощи осциллирующей сетки размером 5x5 см. Установка расположена в лаборатории Бэтчелора в отделе прикладной математики и теоретической физики Кембриджского университета (Англия). Фото сделано Д. Ши в 2019 [26]. Область изотропной турбулентности выделена красным прямоугольником.

ные называют прямым каскадом энергии, впервые упомянутом Кельвином [27]. Силы вязкого трения на самых мелких масштабах, называемых микротурбулентностью, становятся сопоставимы с силами инерции. При этом их действие, в конечном счете, переводит энергию турбулентности в тепловую энергию. Таким образом, прямой каскад заканчивается диссипацией турбулентной энергии. Схематично прямой каскад турбулентной энергии изображен на рис. 1.6 [37].

Крупномасштабная турбулентность, как правило, является анизотропной и чрезвычайно сложной, что фактически исключает возможность разработки ее строгой теории. Колмогоров и Обухов [37, 38, 39] предположили, что для достаточно больших чисел Рейнольдса, мелкомасштабные турбулентные

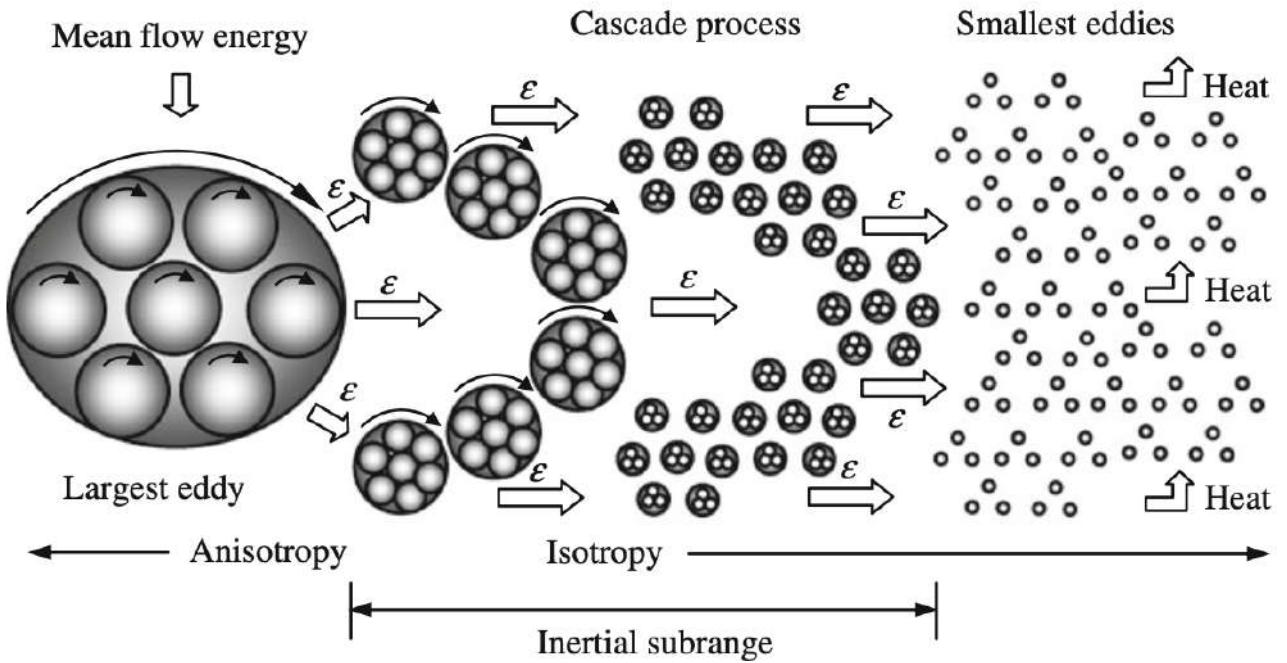


Рис. 1.6. Схема прямого каскада турбулентной энергии, заимствованная из [37]

вихри являются статистически изотропными. Такое предположение сводит тензор напряжений Рейнольдса (1.4) к скаляру  $\langle v'_1 v'_1 \rangle = \langle v'_2 v'_2 \rangle = \langle v'_3 v'_3 \rangle$  и, соответственно, значительно упрощает физику течения. Таким образом вводится понятие локальной изотропии турбулентности, выполняющейся для мелкомасштабных движений, в то время как крупномасштабная турбулентность остается анизотропной, см. рис. 1.6.

В том случае, если прямой каскад энергии находится в динамическом равновесии, можно допустить, что поток турбулентной энергии, поступающей в диапазон изотропной турбулентности из крупномасштабного диапазона, равен скорости вязкой диссипации этой энергии. Поскольку речь идет о чрезвычайно малом размере турбулентных вихрей, гидродинамические процессы на этом масштабе происходят намного быстрее по сравнению с крупномасштабной частью турбулентности. Таким образом, динамическое равновесие достигается быстро, со скоростью потока турбулентной энергии в прямом каскаде. Из этого Колмогоров делает вывод, что статистические свойства мелкомасштабной изотропной турбулентности имеют универсальную форму, которая полностью определяется средней скоростью диссипации турбулент-

ной энергии  $\varepsilon$ , а также кинематической вязкостью жидкости.

Пусть размер турбулентных вихрей  $l$  характеризуется волновым числом  $\zeta = 2\pi/l$ . Тогда коллекция всех масштабов турбулентности будет описываться спектром энергии турбулентности  $E(\zeta)$ , определяющим количество энергии, содержащейся в турбулентных вихрях размера  $l$ . Суммарная турбулентная энергия всех масштабов запишется [37]:

$$k = \frac{3 \langle v'_i v'_i \rangle}{2} = \int_0^\infty E(\zeta) d\zeta \quad (1.5)$$

Пользуясь гипотезой об универсальности формы  $E(\zeta)$  и её зависимости только от скорости диссипации турбулентной энергии  $\varepsilon$ , Колмогоров получает эмпирическую зависимость для спектра турбулентности в изотропном диапазоне масштабов [38]:

$$E(\zeta) = C \varepsilon^{\frac{2}{3}} \zeta^{-\frac{5}{3}} \quad (1.6)$$

Причем, показатели степеней в уравнении выше были получены Колмогоровым на основании анализа размерностей. Независимо от Колмогорова, Обухов [39] получил ту же зависимость в результате более глубокого теоретического анализа полуэмпирического уравнения баланса турбулентной энергии, полученного им для спектра изотропной турбулентности.

Уравнение (1.6) позволило впервые получить теоретические оценки прямого каскада турбулентной энергии и соответствующего ему спектра изотропной турбулентности. Несмотря на эмпирическую основу и значительные допущения, уравнение (1.6) нашло широкое экспериментальное подтверждение. Так, рис. 1.7(а), опубликованный Мониным и Ягломом [40], показывает очень хорошее совпадение экспериментальных измерений с уравнением (1.6) для больших волновых чисел  $\zeta$ , т.е. малых масштабов  $l$ . Рис. 1.7(б) схематично демонстрирует теоретическую форму спектра изотропной турбулентности Колмогорова.

Несмотря на то, что вклад Колмогорова считается одним из наиболее су-

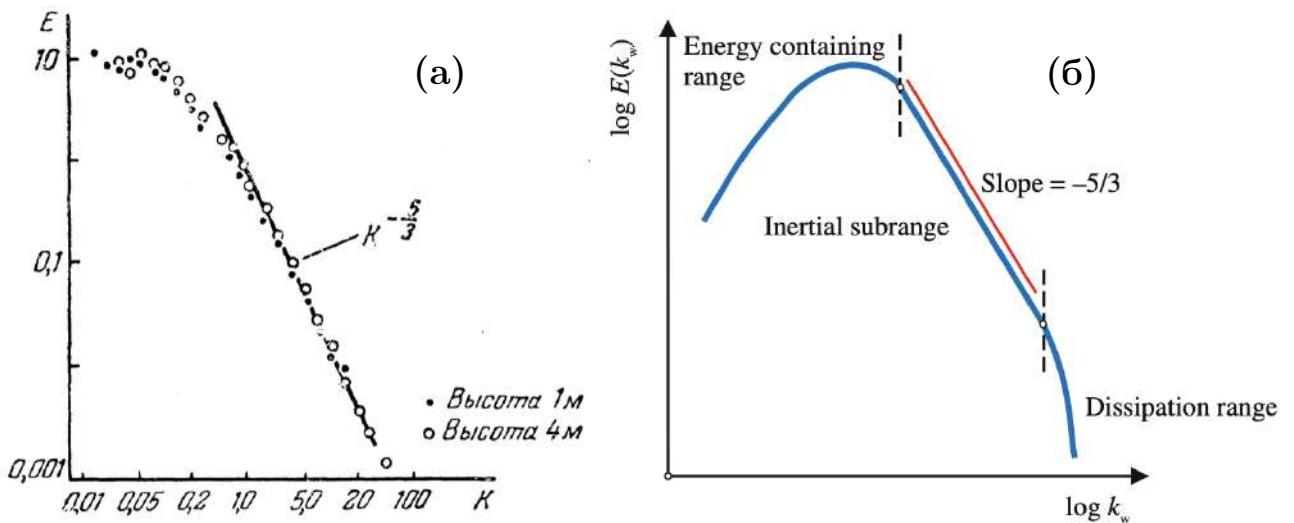


Рис. 1.7. (а) Пространственный спектр турбулентной энергии  $E(k)$  по данным наблюдений в приземном слое атмосферы [40]. (б) Схема теоретической формы спектра изотропной турбулентности Колмогорова  $E(k)$  в логарифмических координатах [37]

щественных в области теоретических исследований турбулентности, он касается только небольшой наиболее простой (изотропной) части спектра турбулентной энергии. Основная часть турбулентной энергии содержится в левой части спектра, показанного на рис. 1.7(б), т.е. в области малых волновых чисел  $k$ . Турбулентность в этом диапазоне масштабов является анизотропной, что существенно усложняет ее исследование. Несмотря на большое количество исследований, все попытки построения теории анизотропной турбулентности не привели к каким-либо результатам, применимым в инженерной практике [32, 41, 42]. В связи с невозможностью построения полной теории турбулентности, практические расчеты турбулентных течений базируются на полуэмпирических моделях турбулентности, которые кратко обсуждаются далее по тексту.

## 1.2. Уравнения турбулентного течения сжимаемой жидкости

### 1.2.1. Уравнения Рейнольдса

Векторное уравнение Навье-Стокса (классический закон сохранения импульса) для общего случая динамики сжимаемой жидкости запишется в сле-

дующем виде [32]:

$$\rho \frac{dV}{dt} = \rho g + \nabla \cdot \tau, \quad (1.7)$$

где  $t$  - время;  $V = \{v_1, v_2, v_3\}$  - вектор скорости;  $\rho$  - плотность жидкости;  $\rho g$  - вектор объемных сил, которые обычно появляются вследствие действия ускорения свободного падения  $g$ ;  $\tau$  - тензор всех поверхностных сил, который включает в себя как нормальные, так и касательные компоненты. Уравнение (1.7) имеет очень простой вид, однако содержит несколько особенностей, определяющие его физическую и математическую сложность:

- В Эйлеровой формулировке полная производная скорости распадается на частную производную и конвективную компоненту:  $dV/dt = \partial V/\partial t + (V \cdot \nabla) V$ . Причем, конвективная компонента вносит нелинейность в уравнение и приводит к невозможности его прямого аналитического решения.
- Тензор поверхностных сил  $\tau$  является неизвестным и требует привлечения эмпирических закономерностей для его определения - реологического закона.

Для Ньютоновских жидкостей реологический закон определяется линейной связью между тензором напряжений  $\tau$  и тензором скоростей деформаций  $\dot{S}$ , которая записывается следующим образом:

$$\tau = 2\mu \dot{S} - I \left[ p + \left( \frac{2}{3}\mu - \kappa \right) (\nabla \cdot V) \right], \quad (1.8)$$

где  $\mu$  - коэффициент динамической вязкости,  $p$  - термодинамическое давление,  $I$  - единичная матрица. Второй (объемной) вязкостью в (1.8) обычно пренебрегают, т.е.  $\kappa = 0$ . Тензор скоростей деформаций можно получить следующим образом:

$$\dot{S} = \frac{1}{2} (\nabla V + (\nabla V)^T) \quad (1.9)$$

Надстрочный индекс  $T$  означает транспонирование матрицы. Подстановка

(1.8) в (1.7) и разделение сил давления и вязкого трения приводит к стандартной форме уравнения Навье-Стокса для сжимаемой жидкости (газа):

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho (V \cdot \nabla) V = \rho g - \nabla p + \nabla \cdot \left[ \mu \left( \nabla V + (\nabla V)^T - I \frac{2}{3} \nabla \cdot V \right) \right] \quad (1.10)$$

Для уравнения (1.10) можно найти прямое численное решение только для ограниченного количества относительно простых (геометрически и физически) течений с ламинарным и переходным режимом движения. С увеличением числа  $Re$  и переходом к развитой турбулентности диапазон масштабов турбулентных структур растет. В потоке возникают все более мелкие вихри, численное моделирование которых требует огромных вычислительных мощностей, недоступных в настоящее время, а также в обозримом будущем. С другой стороны, отсутствие какой-либо теории турбулентности (см. раздел 1.1.) не позволяет упростить задачу математически. Единственно применимый на практике метод приближенного решения уравнения (1.10) для развитого турбулентного течения основывается на осреднении Рейнольдса (1.2) и соответствующем разложении (1.3).

После подстановки разложения (1.3) требуется выполнить осреднение полученного уравнения (1.10) еще раз. После упрощения и группировки слагаемых нового уравнения, а также учитывая [43], что

$$\langle v'_i \rangle = 0$$

$$\langle \langle v_i \rangle \rangle = \langle v_i \rangle$$

$$\langle v_i + v_j \rangle = \langle v_i \rangle + \langle v_j \rangle$$

$$\langle v_i v_j \rangle = \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle + \langle v'_i v'_j \rangle$$

$$\langle \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle \rangle = \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle$$

$$\langle \langle v_i \rangle v'_i \rangle = 0$$

$$\langle v_i^2 \rangle = \langle v_i \rangle^2 + \langle (v'_i)^2 \rangle$$

можно записать уравнение Навье-Стокса, осредненное по методу Рейнольдса (Reynolds Averaged Navier-Stokes - RANS) [32, 33, 44]:

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho (V \cdot \nabla) V = \rho g - \nabla p + \nabla \cdot \left[ \mu \left( \nabla V + (\nabla V)^T - I \frac{2}{3} \nabla \cdot V \right) \right] + \nabla \cdot (\rho \Pi) \quad (1.11)$$

Уравнение (1.11) записано для вектора осредненной скорости  $\langle V \rangle$ ; круглые скобки опущены для сокращения записи. Выполненная операция позволила скомпоновать все члены, содержащие пульсационные компоненты скорости, в тензор напряжений Рейнольдса  $\Pi = -\langle v'_i v'_j \rangle$  (1.4). С учетом того, что уравнение Рейнольдса (1.11) записано для медленно меняющегося среднего течения, оно может быть решено численно для турбулентных течений с любым числом  $Re$ . Однако для этого требуется найти тензор  $\Pi$ , то есть выполнить так называемое замыкание математической модели. Эта проблема не получила рационального решения вплоть до настоящего времени [32].

Для замыкания уравнения (1.11) также требуется выполнение закона сохранения массы, который после осреднения Рейнольдса (1.2) запишется в виде уравнения неразрывности для осредненного течения [45, 46]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (1.12)$$

Последнее уравнение определяет изменение плотности сжимаемой жидкости через локальный баланс массовых расходов. В том случае, если изменение плотности мало (несжимаемая жидкость), уравнение (1.12) упрощается, но при этом утрачивает свою применимость для численных расчетов. Эта проблема решается специальными хорошо разработанными методами, основанными на уравнении Пуассона. Например, методом PISO [47, 48].

В течениях сжимаемой жидкости (газа) большую роль играют тепловые и термодинамические процессы, подчиняющиеся закону сохранения энергии. Пусть  $h$  - статическая энталпия газа, а  $H = h + |V|^2/2$  - энталпия тор-

можения (полная) газа. Тогда уравнение сохранения полной энталпии для осредненного течения запишется [32, 45, 49]:

$$\rho \frac{\partial H}{\partial t} + \rho (V \cdot \nabla) H = q + \frac{\partial p}{\partial t} + Q_\tau \quad (1.13)$$

Вектор теплового потока  $q$  учитывает механическую работу газа (или внешнюю работу над газом), изотропный или анизотропный перенос тепловой энергии, а также генерацию энергии вследствие внутренних источников при их наличии. Учитывая, что внутренняя энергия газа является составной частью энталпии, т.е.  $h = e + p/\rho$ , возможна альтернативная форма записи закона сохранения энергии через полную внутреннюю энергию  $E = e + |V|^2/2$ :

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho (V \cdot \nabla) E = q - (V \cdot \nabla) p + Q_\tau \quad (1.14)$$

Величина  $Q_\tau$  в уравнениях (1.13) и (1.14) называется диссипативной функцией и отражает нагрев жидкости вследствие вязкого трения. Поскольку точное выражение для  $Q_\tau$  невозможно получить, обычно пользуются феноменологической закономерностью [45]:

$$Q_\tau = \mu \left| \dot{S} \right|^2 - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot V)^2, \quad (1.15)$$

где  $\dot{S}$  - тензор скоростей деформаций (1.9), а его модуль определяется следующим выражением [45]:

$$\left| \dot{S} \right| = \sqrt{2 \dot{S} \cdot \dot{S}} \equiv \sqrt{(\nabla V + (\nabla V)^T) : (\nabla V)^T} \quad (1.16)$$

Тензорные произведения заданы следующим образом:  $A \cdot \cdot B = \sum_{i,j} A_{i,j} B_{j,i}$ ;  $A : B = \sum_{i,j} A_{i,j} B_{i,j}$ . Для большинства течений, вклад  $Q_\tau$  незначителен, что позволяет пренебречь вязким нагревом.

Связь между давлением, плотностью и температурой газа устанавливает-

ся уравнением термодинамического состояния [50, 51]. Для умеренных температур и давлений можно воспользоваться простейшим уравнением совершенного газа Менделеева-Клапейрона [52, 53]:

$$p = \rho \mathfrak{R} T, \quad (1.17)$$

где  $\mathfrak{R}$  - газовая постоянная, а  $T$  - абсолютная температура газа. Энталпия и внутренняя энергия связаны с температурой через изобарную и изохорную теплоемкости, соответственно:  $h = c_p T$ ;  $e = c_v T$ . В случае совершенного газа, величины  $c_p$  и  $c_v$  являются постоянными и не зависят от давления и температуры. Также они связаны с газовой постоянной:  $\mathfrak{R} = c_p - c_v$ .

### 1.2.2. Уравнения переноса рейнольдсовых напряжений

Замыкание уравнения Рейнольдса (1.11) посредством определения тензора рейнольдсовых напряжений является ключевой проблемой численного расчета турбулентных течений. Пользуясь подходом Лойцянского [32], разложение (1.3) подставляется в уравнение Навье-Стокса (1.10), но на этот раз осреднение результирующего уравнения не осуществляется. После вычитания уравнения Рейнольдса из полученного уравнения, а также после некоторых алгебраических манипуляций, подробно описанных в [32], можно записать уравнение для “двойной одноточечной корреляции” - тензора напряжений

Рейнольдса  $\Pi = \pi_{i,j}$ :

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial \pi_{i,n}}{\partial t} + \underbrace{\rho \langle v_j \rangle \frac{\partial \pi_{i,n}}{\partial x_j}}_{\text{конвекция турбулентции}} &= - \underbrace{\left( \rho \pi_{i,j} \frac{\partial \langle v_n \rangle}{\partial x_j} + \rho \pi_{n,j} \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} \right)}_{P_\pi - \text{порождение турбулентции}} - \\
 &\quad \underbrace{-2\mu \left\langle \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_n}{\partial x_j} \right\rangle}_{E_\pi - \text{скорость диссипации}} + \underbrace{\left\langle p' \left( \frac{\partial v'_n}{\partial x_i} + \frac{\partial v'_i}{\partial x_n} \right) \right\rangle}_{\Phi_\pi - \text{тензор корреляций}} - \\
 &\quad \underbrace{- \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho \langle v'_i v'_n v'_j \rangle + \delta_{i,j} \langle v'_n p' \rangle + \delta_{n,j} \langle v'_i p' \rangle - \mu \frac{\partial \pi_{i,n}}{\partial x_j} \right)}_{D_\pi - \text{диффузия турбулентции}} \quad (1.18)
 \end{aligned}$$

Данное уравнение записано в прямоугольной системе координат  $\{x_1, x_2, x_3\}$  в индексной форме. Оно является фундаментальным аналитически строгим законом эволюции рейнольдсовых напряжений [54, 55, 56, 57].

Интересным является факт, что генерация (порождение) турбулентции  $P_\pi$  в уравнении (1.18) аналитически строго определяется только компонентами осредненного течения  $\langle v_n \rangle$  и рейнольдсовыми напряжениями  $\pi_{i,j}$ . В отличие от этого, остальные члены уравнения (1.18) зависят от пульсационных компонент скорости и давления, а также от их корреляций. Так, например, скорость диссипации турбулентции  $E_\pi$  определяется вторым моментом тензора пульсационных скоростей деформаций. Более того, диффузия турбулентции  $D_\pi$  впервые вводит в рассмотрение тройную одноточечную корреляцию (третий момент) пульсационных скоростей  $\langle v'_i v'_n v'_j \rangle$ . Таким образом, вместо замыкания первоначального уравнения Рейнольдса (1.11), полученное уравнение эволюции (1.18) только усложняет проблему описания турбулентных течений. Дальнейшие попытки замыканий системы уравнений через, например, вывод уравнения эволюции третьих моментов  $\langle v'_i v'_n v'_j \rangle$  приводят к возникновению новых корреляций все более высокого порядка.

Особенную сложность уравнению (1.18) придает слагаемое  $\Phi_\pi$ , включающее корреляции турбулентных пульсаций давления с тензором скоростей

деформаций поля пульсационных скоростей. В дополнение к отсутствию физической наглядности, величину  $\Phi_\pi$  трудно (фактически невозможно) измерить экспериментально.

Очевидно, что предположение об изотропии турбулентции может значительно упростить проблему математически. С одной стороны, для изотропной турбулентции не диагональные элементы тензора  $\Pi$  исчезают, т.е.  $\pi_{i,j,i \neq j} = 0$ . С другой стороны, диагональные элементы равны между собой. Последнее позволяет ввести в рассмотрение скалярную величину кинетической энергии турбулентции  $k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \langle v'_i v'_i \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \pi_{i,i}$ , аналогично подходу Колмогорова (1.5). Тогда тензорное уравнение (1.18) сводится к скалярному уравнению эволюции турбулентной энергии  $k$ :

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \langle v_j \rangle \frac{\partial k}{\partial x_j} = \underbrace{-\rho \pi_{i,j} \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j}}_{P_k - \text{порождение турбулентции}} - \underbrace{-\mu \left\langle \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right\rangle}_{E_k - \text{скорость диссиpации}} - \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho \left\langle v'_j \left( \frac{v'_i v'_i}{2} + \frac{p'}{\rho} \right) \right\rangle - \mu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]}_{D_k - \text{диффузия турбулентции}} \quad (1.19)$$

В отличие от (1.18), полученное уравнение (1.19) для эволюции  $k$  не содержит корреляционного вклада  $\Phi$ , что упрощает его физически. Также новое уравнение является скалярным в противовес тензорному уравнению (1.18), что дает математическое упрощение задачи. Тем не менее, скорость диссиpации  $E_k$  и диффузия турбулентции  $D_k$  по прежнему выражены через пульсационные компоненты скорости и давления, тем самым не позволяя замкнуть математическую модель турбулентного течения.

В настоящее время проблема замыкания уравнений Рейнольдса не имеет аналитически точного решения. Вместо этого, требуется привлечение эмпирических зависимостей для выражения  $D$ ,  $E$  и  $\Phi$  через поля осредненного течения вместо полей пульсационных величин. Совокупность таких подходов принято называть полуэмпирическими моделями турбулентности [58, 59, 60].

Важно подчеркнуть, что использование полуэмпирических моделей для замыкания уравнений Рейнольдса является единственным практически применимым методом математического описания турбулентных течений.

### 1.2.3. Полуэмпирические модели турбулентности

#### Анизотропные модели реинольдсовых напряжений

Очевидным способом полуэмпирического замыкания уравнений Рейнольдса (1.11) является использование точного уравнения транспорта турбулентных напряжений (1.18) в качестве основы. Модели турбулентности, полученные таким образом, называются моделями реинольдсовых напряжений (Reynolds Stress Models - RSM), а отличия между ними заключаются в эмпирических выражениях для  $D_\pi$ ,  $E_\pi$  и  $\Phi_\pi$  [54, 55, 56, 57]. Очевидное преимущество моделей RSM заключается в учете анизотропии турбулентции, что является решающим для некоторых типов течений. С другой стороны, модели RSM являются вычислительно тяжелыми, поскольку решают тензорное дифференциальное уравнение (1.18), т.е., фактически, 6 уравнений для компонент тензора  $\Pi \equiv \pi_{i,j}$ . Также отмечается значительная вычислительная неустойчивость моделей RSM, приводящая к сложности их применения на практике.

Launder, Reece и Rodi [56] предложили одну из наиболее простых и широко используемых на практике моделей, обозначаемую RSM-LRR. В этой модели порождение турбулентции вычисляется на базе аналитически строгого выражения, полученного ранее:

$$\begin{aligned} P_\pi &= - \left( \rho \pi_{i,j} \frac{\partial \langle v_n \rangle}{\partial x_j} + \rho \pi_{n,j} \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} \right) = \\ &= - \left( \Pi \cdot (\nabla V)^T \right) - \left( \Pi \cdot (\nabla V)^T \right)^T = -2 \operatorname{symm} \left( \Pi \cdot (\nabla V)^T \right) \quad (1.20) \end{aligned}$$

где  $\Pi \equiv \pi_{i,j}$  - тензор реинольдсовых напряжений,  $V$  - вектор осредненно-

го поля скоростей, оператор  $\text{symm}(\cdot)$  преобразует несимметричный тензор в симметричный путем дополнения транспонированным тензором (“symmetry operator”). Для вычисления остальных членов уравнения переноса  $\Pi$  в модели RSM-LRR требуется привлечение эмпирических выражений.

Существует две возможности выразить диффузию турбулентности  $D_\pi$ , первая из которых допускает существование только изотропной диффузии со скалярным коэффициентом диффузии, меняющимся как в пространстве, так и во времени:

$$D_\pi = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{2}{3} C_s \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \nabla \Pi \right] \quad (1.21)$$

Анизотропная версия диффузионного члена уравнения рейнольдсовых напряжений предполагает задание коэффициента диффузии в виде матрицы, выраженной через тензор рейнольдсовых напряжений:

$$D_\pi = \nabla \cdot \left[ \left( I\mu + C_s \rho \frac{k}{\varepsilon} \Pi \right) \nabla \Pi \right] \quad (1.22)$$

При этом, калибрационный коэффициент  $C_s$  выбирается одинаковым как для изотропной, так и для анизотропной диффузии. Кинетическая энергия турбулентции в (1.21) и (1.22) выражается аналогично (1.5):

$$k = \frac{1}{2} \text{tr} (\Pi), \quad (1.23)$$

где оператор следа матрицы  $\text{tr}(\cdot)$  возвращает сумму диагональных элементов.

Скорость диссипации турбулентции  $E_\pi$  в RSM-LRR выражается через скалярную величину  $\varepsilon$ , являющейся стандартной мерой диссипации энергии для большинства моделей турбулентности:

$$E_\pi = -\frac{2}{3} I \rho \varepsilon \quad (1.24)$$

Величина  $\varepsilon$  находится из дополнительного уравнения переноса. Аналогично

предыдущим выкладкам, анизотропная диффузия  $\varepsilon$  приводит к следующему полуэмпирическому уравнению:

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \underbrace{\rho (V \cdot \nabla) \varepsilon}_{\text{конвекция}} = \underbrace{C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k}_{\text{порождение}} - \underbrace{C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}}_{\text{диссипация}} + \underbrace{\nabla \cdot \left[ \left( I\mu + C_{\varepsilon} \rho \frac{k}{\varepsilon} \Pi \right) \nabla \varepsilon \right]}_{\text{диффузия}} - \underbrace{\left[ \left( \frac{2}{3} C_{\varepsilon 1} - C_{\varepsilon 3} \right) \rho \varepsilon (\nabla \cdot V) \right]}_{\text{поправка на сжимаемость}} \quad (1.25)$$

Важно заметить, что теоретически строгое выражение для порождения турбулентной энергии (1.23) можно получить как след от тензора порождения рейнольдсовых напряжений (1.20):

$$P_k = \frac{1}{2} |\operatorname{tr}(P_\pi)| = \left| \operatorname{tr} \left( \operatorname{symm} \left( \Pi \cdot (\nabla V)^T \right) \right) \right| \quad (1.26)$$

В соответствии с уравнением (1.25) порождение величины  $\varepsilon$  можно выразить через  $P_k$  с использованием калибрационной константы  $C_{\varepsilon 1}$ :

$$P_\varepsilon = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \left| \operatorname{tr} \left( \operatorname{symm} \left( \Pi \cdot (\nabla V)^T \right) \right) \right| \quad (1.27)$$

Корреляционный член  $\Phi_\pi$  в уравнении переноса рейнольдсовых напряжений (1.18) является самым сложным для эмпирической аппроксимации. Launder, Reece и Rodi [56] предложили разбить его на две компоненты  $\Phi_{\pi,1}$  и  $\Phi_{\pi,2}$ , первая из которой пытается вернуть турбулентность к состоянию изотропии. В противоположность этому, вторая компонента  $\Phi_{\pi,2}$  отвечает за анизотропизацию турбулентности. Итоговое эмпирическое выражение для модели RSM-LRR записывается следующим образом:

$$\Phi_\pi = \Phi_{\pi,1} + \Phi_{\pi,2} = -C_1 \rho \frac{\varepsilon}{k} \operatorname{dev}(\Pi) - C_2 \rho \operatorname{dev}(P_\pi) \quad (1.28)$$

Девиатор тензоров  $\Pi$  и  $P_\pi$  в выражении выше вычисляется как

$$\text{dev}(\cdot) \equiv (\cdot) - \frac{1}{3} \text{tr}(\cdot) I, \quad (1.29)$$

где  $I$  - единичная матрица.

Собирая вместе все записанные выше эмпирические аппроксимации, можно записать уравнения RSM-LRR модели турбулентности. Рассматривается только случай анизотропной диффузии:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \rho (V \cdot \nabla) \Pi &= \underbrace{-2 \text{symm} \left( \Pi \cdot (\nabla V)^T \right)}_{\text{порождение турбулентции}} - \underbrace{\frac{2}{3} I \rho \varepsilon}_{\text{диссипация}} + \\ &+ \underbrace{\nabla \cdot \left[ \left( I\mu + C_s \rho \frac{k}{\varepsilon} \Pi \right) \nabla \Pi \right]}_{\text{диффузия турбулентции}} - C_1 \rho \frac{\varepsilon}{k} \text{dev}(\Pi) + \\ &+ C_2 \rho \text{dev} \left( 2 \text{symm} \left( \Pi \cdot (\nabla V)^T \right) \right) \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho (V \cdot \nabla) \varepsilon &= \underbrace{C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \left| \text{tr} \left( \text{symm} \left( \Pi \cdot (\nabla V)^T \right) \right) \right|}_{\text{порождение } \varepsilon} - \underbrace{C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}}_{\text{диссипация } \varepsilon} + \\ &+ \underbrace{\nabla \cdot \left[ \left( I\mu + C_{\varepsilon} \rho \frac{k}{\varepsilon} \Pi \right) \nabla \varepsilon \right]}_{\text{диффузия } \varepsilon} - \underbrace{\left[ \left( \frac{2}{3} C_{\varepsilon 1} - C_{\varepsilon 3} \right) \rho \varepsilon (\nabla \cdot V) \right]}_{\text{поправка на сжимаемость}} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Стандартные значения эмпирических констант приведенной модели турбулентности сведены в таблицу 1.1.

Важно отметить существования множества моделей, относящихся к классу RSM, помимо RSM-LRR. Например, модель RSM-SSG, полученная Speziale, Sarkar и Gatski [57]. Основное отличие RSM-SSG от RSM-LRR состоит в использовании значительно более сложной эмпирической аппроксимации корреляционного члена  $\Phi_\pi$ . В настоящей диссертации рассматривается только наиболее стандартная модель RSM-LRR.

Таблица 1.1

Стандартные значения эмпирических констант RSM-LRR модели турбулентности.

$C_s$	$C_1$	$C_2$	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$C_{\varepsilon 3}$	$C_{\varepsilon}$
0.22	1.8	0.6	1.45	1.9	-0.33	0.18

### Изотропные модели на основе гипотезы Буссинеска

Как было отмечено выше, основным недостатком рейнольдсовых моделей турбулентности RSM является их физическая, математическая и вычислительная сложность. Упрощение моделей возможно на основании гипотезы Буссинеска [28, 29], который допустил существование линейной связи между тензором рейнольдсовых напряжений  $\Pi$  и тензором скоростей деформаций  $\dot{S}$ , по аналогии с реологическим законом Ньютона (1.8). Исходя из этого, можно записать:

$$\Pi = - \langle v'_i v'_j \rangle \sim \dot{S}$$

В соответствии с (1.8) и (1.9), данная эмпирическая зависимость принимает вид:

$$\Pi = \mu_t \left( \nabla V + (\nabla V)^T - I \frac{2}{3} \nabla \cdot V \right), \quad (1.32)$$

где  $\mu_t$  - турбулентная вязкость - эмпирическая величина, изменяющаяся в пространстве и времени. В отличие от динамической (молекулярной) вязкости  $\mu$ , величина  $\mu_t$  не зависит от типа жидкости, а определяется только локальными характеристиками турбулентности течения. Суть всех моделей турбулентности, построенных на основе гипотезы Буссинеска, заключается в поиске распределения  $\mu_t$  в пространстве и времени.

Подстановка выражения гипотезы Буссинеска (1.32) в уравнение Рейнольдса (RANS) дает:

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho (V \cdot \nabla) V = \rho g - \nabla p + \nabla \cdot \left[ \mu_{\text{eff}} \left( \nabla V + (\nabla V)^T - I \frac{2}{3} \nabla \cdot V \right) \right] \quad (1.33)$$

Следует отметить, что записанное выше уравнение Рейнольдса с учетом гипотезы Буссинеска в точности совпадает с уравнением Навье-Стокса (1.10) за исключением замены коэффициента молекулярной вязкости на коэффициент эффективной вязкости, включающий в себя две компоненты:

$$\mu_{\text{eff}}(x, y, z, t) = \mu + \mu_t(x, y, z, t) \quad (1.34)$$

На основании гипотезы Буссинеска, Прандтлем была предложена одна из первых моделей турбулентности - модель “пути смешения” [61]. На основании рассуждений о процессах зарождения, переноса и распада импульса пульсационной (турбулентной) компоненты скорости, Прандтль предположил, что в сдвиговом течении величина  $\mu_t$  должна зависеть от модуля скоростей деформаций:

$$\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| \quad (1.35)$$

Таким образом, увеличение модуля сдвига скорости  $\partial v_i / \partial x_j$  должно приводить к большей турбулизации течения. Эмпирическая величина  $l$ , названная “путем смешения”, отражает расстояние, которое проходит отдельно выделенный турбулентный вихрь от момента его зарождения до полного распада (диссипации).

Несмотря на прочную физическую основу, модель Прандтля имеет существенный недостаток, который очевиден при рассмотрении течения жидкости в цилиндрической трубе. При таком типе течения, профиль осредненной скорости имеет свой максимум в центре трубы, а его производная в той же точке исчезает, т.е.  $\partial v_i / \partial x_j = 0$ , а следовательно и  $\mu_t = 0$  в центре трубы. Это наблюдение резко противоречит экспериментальным измерениям, в соответствии с которыми турбулентность максимальна в центре трубопровода [32, 44]. В настоящее время, модель Прандтля не используется для практических расчетов. Однако она была положена в основу более сложных моделей, практическая применимость которых является значительно более широкой.

## Двухпараметрические модели на основе гипотезы Буссинеска

Связка Прандтля-Колмогорова [32] дает следующее выражение для турбулентной вязкости:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (1.36)$$

Видно, что в соответствии с данной эмпирической параметризацией турбулентная вязкость зависит не только от кинетической энергии турбулентции  $k$ , но и от скорости ее диссипации  $\varepsilon$ . Важно подчеркнуть, что энергия турбулентции  $k$  определяется уравнением (1.23), справедливым только для случая изотропной турбулентции. Таким образом, модели турбулентности, основанные на связке Прандтля-Колмогорова (1.36), строго справедливы только для изотропной турбулентции. Несмотря на это, их практическая применимость была продемонстрирована для гораздо более широкого класса задач.

Удобство формулы (1.36) состоит в том, что форма уравнений переноса  $k$  и  $\varepsilon$  была уже получена ранее, см. (1.19) и (1.25). Таким образом, настоящий подход имеет строгую физическую и математическую основу. Однако для использования уравнений (1.19) и (1.25) на практике требуется их эмпирическое замыкание по аналогии с моделями рейнольдсовых напряжений RSM, рассмотренных выше.

Подставляя гипотезу Буссинеска (1.32) в уравнения (1.20) и (1.26) можно получить аналитически строгое выражение для порождения турбулентной энергии  $k$ :

$$\begin{aligned} P_k &= -\Pi \cdot (\nabla V)^T = \mu_t \left( \nabla V + (\nabla V)^T - I \frac{2}{3} \nabla \cdot V \right) : (\nabla V)^T = \\ &= \mu_t \left( \nabla V + (\nabla V)^T - I \frac{1}{3} \operatorname{tr} (\nabla V + (\nabla V)^T) \right) : (\nabla V)^T = \\ &= \mu_t \operatorname{dev} (\nabla V + (\nabla V)^T) : (\nabla V)^T, \end{aligned} \quad (1.37)$$

где тензорное произведение  $A : B = \sum_{i,j} A_{i,j} B_{i,j}$ ; а девиатор  $\operatorname{dev}(\cdot)$  задан выражением (1.29). Эмпирические выражения для остальных членов уравнений

$k$  и  $\varepsilon$  заимствуются из уравнений RSM модели турбулентности (1.30) и (1.31) с соответствующими адаптациями для случая изотропной турбулентности.

В окончательном виде двухпараметрическая модель турбулентности  $k - \varepsilon$  была получена Лаундером и Сполдингом [62], а ее вариация для течения сжимаемых жидкостей предложена позже S.H. El Tahry [63]:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho (V \cdot \nabla) k = \underbrace{\mu_t \operatorname{dev} (\nabla V + (\nabla V)^T) : (\nabla V)^T}_{\text{порождение турбулентности}} - \underbrace{\rho \varepsilon}_{\text{диссипация}} + \\ + \underbrace{\nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right]}_{\text{диффузия турбулентности}} - \underbrace{\frac{2}{3} \rho k (\nabla \cdot V)}_{\text{поправка на сжимаемость}} \quad (1.38)$$

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho (V \cdot \nabla) \varepsilon = \underbrace{C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \mu_t \operatorname{dev} (\nabla V + (\nabla V)^T) : (\nabla V)^T}_{\text{порождение } \varepsilon} - \underbrace{C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}}_{\text{диссипация } \varepsilon} + \\ + \underbrace{\nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \nabla \varepsilon \right]}_{\text{диффузия } \varepsilon} - \underbrace{\left( \frac{2}{3} C_{\varepsilon 1} - C_{\varepsilon 3} \right) \rho \varepsilon (\nabla \cdot V)}_{\text{поправка на сжимаемость}} \quad (1.39)$$

Стандартная  $k - \varepsilon$  модель турбулентности показала хорошие результаты при расчете трехмерных высокорейнольдсовских течений с развитой турбулентностью, в которых анизотропия турбулентности играет второстепенную роль. Значения эмпирических постоянных  $k - \varepsilon$  модели турбулентности сведены в таблицу 1.2.

Таблица 1.2  
Стандартные значения эмпирических констант  $k - \varepsilon$  модели турбулентности.

$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$C_{\varepsilon 3}$	$C_{\mu}$	$\sigma_k$	$\sigma_{\varepsilon}$
1.44	1.92	-0.33	0.09	1.0	1.3

Несмотря на положительные качества,  $k - \varepsilon$  модель турбулентности показала количественно или даже качественно неверные результаты при расчете довольно широкого ряда течений. Одним из проблематичных случаев является течение в турбулентном пограничном слое, при котором число Рейнольдса

существенно уменьшается при приближении к стенке, вплоть до возникновения ламинарного пограничного слоя в непосредственной близости от твердой границы. Наиболее значительные ошибки проявляются в том случае, если возникает отрыв пограничного слоя от твердой стенки. Именно для таких типов течений позже Виллоксом [58] была разработана вариация двухпараметрических моделей турбулентности, а именно низкорейнольдсовая модель  $k - \omega$ .

Особенно широкое распространение нашла модель SST (Shear Stress Transport), разработанная Ментером [64, 65] и представляющая собой комбинацию  $k - \varepsilon$  и  $k - \omega$  моделей. Первая из моделей работает в высокорейнольдсовых областях течения, удаленных от твердых границ, в то время как вторая модель включается при приближении к твердой стенке для учета отрыва пограничного слоя в том случае, если он возникает. Также следует отметить существование большого количества других двухпараметрических моделей турбулентности, но все они так или иначе являются разновидностями  $k - \varepsilon$  или  $k - \omega$  моделей.

### **Модели крупных вихрей**

Очевидно, что использование достаточно мелких расчетных ячеек позволяет смоделировать напрямую некоторые крупные турбулентные вихри. То есть, некоторую часть спектра турбулентности в области малых волновых чисел  $\zeta$ , см. рис. 1.7, находится напрямую из решения уравнений Навье-Стокса без привлечения каких-либо моделей турбулентности. В этом случае, так называемая “подсеточная” модель турбулентности (subgrid-scale model) должна учесть только неучтенную часть спектра турбулентности в области высоких волновых чисел  $\zeta$ . Из этого следует, что величина турбулентной вязкости  $\mu_t$  в моделях крупных вихрей (Large Eddy Simulation - LES) должна быть ниже по сравнению с двухпараметрическими моделями  $k - \varepsilon$  и  $k - \omega$ .

Первая модель данного класса была предложена Смагоринским [66] для изучения атмосферных течений и погодных явлений. В качестве простран-

ственного фильтра, делящего спектр турбулентной энергии на две указанные выше части, было предложено использовать локальный размер ячеек расчетной сетки:

$$\Delta = \sqrt[3]{\Omega}, \quad (1.40)$$

где  $\Omega$  - объем выделенной ячейки расчетной сетки. Эмпирическое выражение для турбулентной вязкости в модели Смагоринского записывается следующим образом:

$$\mu_t = C_s \rho \Delta^2 |\dot{S}| = C_s \rho \Delta^2 \sqrt{(\nabla V + (\nabla V)^T) : (\nabla V)^T} \quad (1.41)$$

Аналогично другим моделям турбулентности на основе гипотезы Буссинеска, величина  $\mu_t$  подставляется в уравнение Рейнольдса (1.33). Эмпирическая константа в модели Смагоринского выбирается равной  $C_s = 0.1$ .

Очевидно, что LES модель Смагоринского значительно проще двухпараметрических моделей  $k - \varepsilon$  и  $k - \omega$ . С другой стороны, данная модель может быть использована только на очень мелких расчетных сетках, обеспечивающих низкую величину пространственного фильтра  $\Delta$ . Это, в свою очередь, обуславливает ее высокие требования к вычислительным ресурсам. Несмотря на это, для большого количества течений, модель LES не дает выигрыша в точности, по сравнению с моделями  $k - \varepsilon$  и  $k - \omega$ .

Следует также подчеркнуть, что модели реинольдсовых напряжений RSM и двухпараметрические модели  $k - \varepsilon$  и  $k - \omega$  дают решение только для осредненной части поля скоростей. Характеристики турбулентности сконцентрированы в реинольдсовых напряжениях или в величине турбулентной вязкости. С другой стороны, модели крупных вихрей LES разрешают некоторую часть спектра турбулентности напрямую. То есть, поле скоростей, определяемое моделями LES, включает в себя как осредненную компоненту скорости, так и некоторую часть пульсационной компоненты скорости. Полученные пульсационные компоненты скорости, в свою очередь, формируют турбулентные

вихри крупных размеров. Данная особенность моделей LES выделяет их из большого количества других моделей турбулентности.

### Метод пристеночных функций

Высокорейнольдсовые модели турбулентности, такие как  $k - \varepsilon$ , не позволяют описать области течения, в которых наблюдается ламинаризация потока. К таким случаям относится, например, пограничный слой. Как известно, в развитых турбулентных течениях пограничный слой состоит из трех областей: вязкого, буферного и турбулентного подслоя [37, 67]. Для описания всего пограничного слоя требуется определить границы каждого из его подслоёв.

В теории пограничного слоя [37, 59, 67] вводится величина динамической скорости (friction velocity):

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad (1.42)$$

где  $\tau_w$  - касательные напряжения, возникающие непосредственно на твердой стенке. Следует отметить, что скорость течения вблизи стенки стремится к нулю, а напряжения Рейнольдса исчезают. Также величину  $\tau_w$ , а следовательно и  $u^*$ , можно довольно легко измерить экспериментально. Опираясь на величину динамической скорости вводится безразмерная скорость течения в пограничном слое  $u^+$ , а также безразмерная координата в пределах пограничного слоя  $y^+$ , т.е. безразмерное расстояние до твердой стенки:

$$u^+ = \frac{u}{u^*} = \frac{u}{\sqrt{\tau_w/\rho}}, \quad (1.43)$$

$$y^+ = \frac{\sqrt{\tau_w/\rho}}{\nu} y = \frac{u^*}{\nu} y, \quad (1.44)$$

где  $y$  - физическая координата (расстояние до твердой стенки), а  $\nu$  - кинематическая вязкость жидкости.

До настоящего времени не удалось найти аналитическое решение для скорости течения в пределах турбулентного пограничного слоя  $u^+ = u^+(y^+)$ .

Количественная оценка данной скорости возможна только эмпирическим путем. Одна из возможных эмпирических аппроксимаций выглядит следующим образом:

$$u^+ = \begin{cases} y^+ ; & 0 \leq y^+ \leq 5 ; \text{ вязкий подслой} \\ 5.0 \ln y^+ - 3.0 ; & 5 < y^+ \leq 30 ; \text{ буферный подслой} \\ \frac{1}{\kappa} \ln (E y^+) ; & 30 < y^+ \leq 400 ; \text{ турбулентный подслой} \end{cases} \quad (1.45)$$

Постоянные турбулентного (логарифмического) слоя обычно выбираются следующим образом [59]: постоянная Кармана  $\kappa = 0.41$ ; постоянная шероховатости  $E = 8.8$  для гладкой поверхности. Следует отметить, что для большинства оценок буферным подслоем пренебрегают.

При использовании  $k - \varepsilon$  модели турбулентности, размер первого слоя ячеек расчетной сетки, расположенных непосредственно на твердой стенке, нужно выбирать исходя из того, чтобы вязкий подслой полностью накрывался данными пристеночными ячейками. На практике это означает, что координаты центров пристеночных ячеек должны лежать в диапазоне  $30 \leq y^+ \leq 300$ . В этом случае теория пограничного слоя (1.45) дает следующие эмпирические оценки турбулентной вязкости (1.36) в пристеночных ячейках сетки [59]:

$$y^+ = C_\mu^{\frac{1}{4}} \rho \frac{\sqrt{k}}{\mu} y, \quad (1.46)$$

$$\mu_t = \frac{\mu \kappa y^+}{\ln (E y^+)}, \quad (1.47)$$

где  $C_\mu$  - постоянная  $k - \varepsilon$  модели турбулентности, см. таблицу 1.2.

Описанный эмпирический метод аппроксимации турбулентной вязкости в пределах пограничного слоя носит названия метода пристеночных функций. Поскольку этот метод опирается на чересчур упрощенное представление о течении в пограничном слое (1.45), он не позволяет рассчитать ряд важных

физических явлений, например, отрыв пограничного слоя. Однако в том случае, если отрыв пограничного слоя невозможен в той или иной задаче, метод пристеночных функций является способом упрощения задачи и ускорения вычислений. Кроме того, метод пристеночных функций - это, фактически, единственный способ учесть ламинаризацию течения в пограничном слое в рамках высокорейнольдсовых моделей турбулентности.

### **1.3. Слабая и гидродинамическая турбулентность в поверхностных волнах**

Некоторые явления в ламинарных течениях проявляют схожесть с турбулентностью. Подобные явления возникают, например, в поверхностных волнах на воде, а наблюдаемые нелинейные процессы при распространении данных волн принято называть “слабой турбулентностью”. Кроме того, обрушение волн или воздействие ветра может приводить к турбулизации объема жидкости, по поверхности которой распространяются волны. В этом случае эффекты слабой и сильной турбулентности сосуществуют.

#### **1.3.1. Потенциальные поверхностные волны**

Волны на поверхности воды могут иметь разную природу в зависимости от возбуждающей силы. В настоящей диссертации будут рассматриваться только гравитационные волны, в которых восстанавливающей силой является гравитация. Для простоты можно считать, что большая часть морских волн относятся к гравитационным. Волна, бегущая по поверхности воды, возбуждает соответствующее периодическое течение, которое может занимать как всю толщу воды, так и некоторую ее часть, расположенную вблизи свободной поверхности. По аналогии с пограничным слоем, эта область толщи воды называется слоем смешения (Mixing Layer). Задача о динамике распространения поверхностной волны сводится к поиску течения жидкости.

В том случае, если высота волны невелика, скорости течения, вызванного данной волной, обычно невысокие. Даже с учетом того, что пространственный масштаб (длина волны  $\lambda$ ) может составлять несколько метров или даже десятков метров, число Рейнольдса обычно лежит в ламинарном или переходном диапазоне [68]:

$$Re = \frac{\rho g^{1/2} \lambda^{3/2}}{\mu} \lesssim \mathcal{O}(10^4) \quad (1.48)$$

Здесь  $\rho$  и  $\mu$  - плотность и динамическая вязкость воды, соответственно;  $g$  - ускорение свободного падения;  $\lambda$  - длина волны. Также принято допускать потенциальность течения:

$$\nabla \times V = 0, \quad (1.49)$$

$$V = -\nabla \varphi, \quad (1.50)$$

где  $\varphi$  - функция потенциала. Подставляя определение скорости (1.50) в уравнение неразрывности (1.12), а также полагая постоянство плотности ( $\rho = \text{const}$ ), можно записать уравнение Лапласа для потенциала:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (1.51)$$

Полученное уравнение (1.51) существенным образом упрощает задачу, поскольку оно допускает разделение переменных [69]. Для волны, распространяющейся в направлении оси  $x$  можно записать:

$$\varphi(x, z, t) = X(x) Z(z) T(t) \quad (1.52)$$

Данное выражение раскладывает задачу на две:

1. Первая задача заключается в поиске функции  $T(t)$ , определяющей динамику распространения волны. Эта часть является наиболее сложной.
2. Вторая задача заключается в поиске функций  $X(x)$  и  $Z(z)$ , определя-

ющих пространственную форму течения в заданный момент времени. Причем, решение уравнения Лапласа ищется в форме тригонометрической функции  $X(x)$  и экспоненциальной функции  $Z(z)$ .

Для поиска функции  $T(t)$  рассматривается краевая задача, схема которой представлена на рис. 1.8. Свободная поверхность (поверхность раздела фаз) в невозмущенном состоянии расположена на высоте  $z = 0$ , в то время как возмущение в форме бегущей волны распространяется в положительном направлении оси  $x$ . Границное условие (ГУ) непроницаемости на дне  $\Gamma_b$  имеет простую форму, а именно  $\partial\varphi/\partial z|_{\Gamma_b} = 0$ . С другой стороны, на свободной поверхности возникают два граничных условия, первое из которых также задает условие непроницаемости, а второе представляет из себя закон сохранения импульса. Их принято называть кинематическим и динамическим граничным условием (КГУ и ДГУ), соответственно.

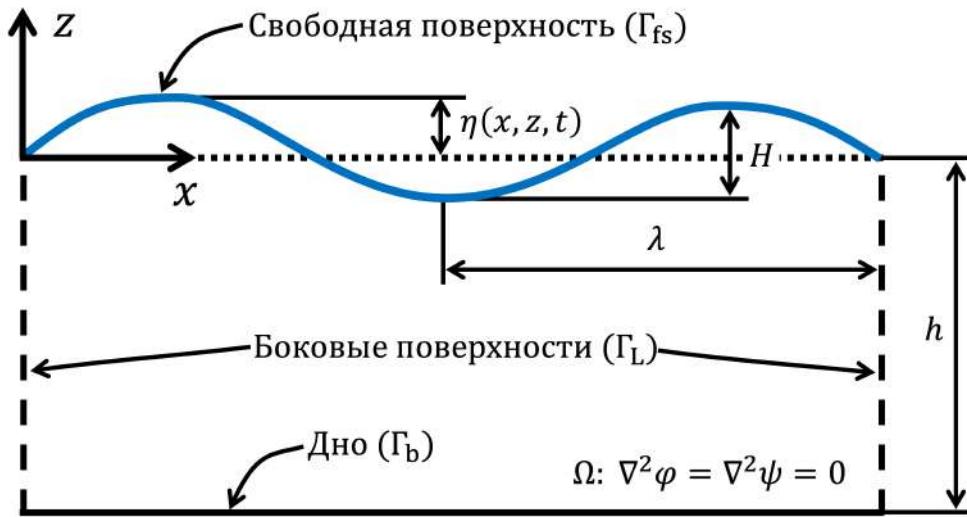


Рис. 1.8. Схема краевой задачи об одномерной волне на поверхности воды.

На рисунке схематично показана монохроматическая волна:  $\lambda$  - длина волны;  $H$  - высота волны;  $h$  - средняя глубина воды;  $\eta(x, z, t)$  - локальный подъем свободной поверхности, изменяющийся в пространстве и времени.  $\Gamma_{fs}$ ,  $\Gamma_b$ ,  $\Gamma_L$  - поверхности домена, на которых задаются соответствующие граничные условия (ГУ).

В соответствии с [69], ДГУ можно получить из уравнения Навье-Стокса (1.10) после исключений из него вязких сил ( $\mu = 0$ ). После подстановки (1.50)

в (1.10), ДГУ приобретает вид нестационарного уравнения Бернулли. Полная система уравнений, описывающих динамику бегущей поверхностной волны, приходит к следующему виду:

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \text{в пределах домена } \Omega \quad (1.53)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = g\eta + \underbrace{\frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2}_{I} + \frac{p}{\rho}, \quad \text{на границе } \Gamma_{fs} \quad (1.54)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \underbrace{(\nabla_{x,y} \varphi) \cdot (\nabla_{x,y} \eta)}_{II} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \text{на границе } \Gamma_{fs} \quad (1.55)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \text{на границе } \Gamma_b \quad (1.56)$$

условие периодичности на  $\Gamma_L$

Здесь  $\eta(x, z, t)$  - локальный подъем свободной поверхности, как показано на рис. 1.8. Заметим, что оператор градиента  $\nabla_{x,y} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$  берется только в горизонтальных направлениях  $x$  и  $y$ . Также,  $|\nabla \varphi|^2 = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2$ . В случае распространения волны только в направлении  $x$  как показано на рис. 1.8, координата  $y$  исключается из уравнений:  $\nabla_{x,y} \rightarrow \nabla_x$ .

Несмотря на то, что течение в пределах домена  $\Omega$  определяется линейным уравнением Лапласа (1.53), граничные условия (1.54) и (1.55) вносят в задачу нелинейность из-за наличия конвективных слагаемых  $I$  и  $II$ . Первый подход заключается в пренебрежении членами  $I$  и  $II$ , что дает аналитическое решение линейной проблемы. С другой стороны, имеются способы частичного или полного учета нелинейностей  $I$  и  $II$ , дающие приближенное решение полной системы уравнений.

Линейная задача имеет смысл, если максимальная крутизна волны  $\epsilon \ll 1$ :

$$\epsilon = \max \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \kappa a, \quad (1.57)$$

где  $a$  - амплитуды волны;  $\kappa$  - ее волновое число. Для практических расчетов

малая крутизна волны означает, что  $\epsilon < 0.05$ . При этом, волны могут сохранять свою устойчивость вплоть до  $\epsilon \sim 0.3\dots 0.4$ . Таким образом, линейная задача применима в очень ограниченном количестве случаев. Тем не менее, она используется в качестве отправной точки в более сложных моделях.

Решение линейной задачи для монохроматической волны можно записать следующим образом [69, 70, 71]:

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2} A e^{i(\kappa x - \omega t)} + \text{к.с.} \quad (1.58)$$

$$\varphi(x, z, t) = iA \frac{g}{2\omega} \frac{\cosh(\kappa(h+z))}{\cosh(\kappa h)} e^{i(\kappa x - \omega t)} + \text{к.с.} \quad (1.59)$$

Здесь “к.с.” - комплексное сопряжение;  $\kappa = 2\pi/\lambda$  - волновое число;  $\omega = 2\pi/T$  - круговая частота;  $T$  - период волны;  $h$  - средняя глубина воды (см. рис. 1.8);  $i = \sqrt{-1}$  - комплексная единица. Комплексная амплитуда  $A$  включает в себя как абсолютную величину амплитуды  $a$ , так и начальную фазу волны  $\phi_0$ :

$$A = a e^{i\phi_0} \quad (1.60)$$

Также следует отметить, что волновое число и круговая частота должны удовлетворять дисперсионному соотношению линейной теории волн [69, 70, 71]:

$$\omega^2 = g\kappa \tanh(\kappa h) \quad (1.61)$$

Поскольку полученные выражения (1.58) и (1.59) удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям, то их линейная суперпозиция также будет удовлетворять этим уравнениям. Поэтому, следующее выражение также является решением линейной задачи:

$$\eta(x, t) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} A_j (\omega_j, \kappa_j) e^{i(\kappa_j x - \omega_j t)} + \text{к.с.} \quad (1.62)$$

Выражение (1.62) позволяет задать сложную форму свободной поверхности однонаправленной поверхностной волны, состоящей из  $N$  гармоник, каждая из которых характеризуется частотой  $\omega_j$  и волновым числом  $\kappa_j$ . Функция  $A^2(\kappa, \omega)$  представляет собой энергетический спектр поверхностной волны. Представленный в данном случае спектр является дискретным, в то время как можно задать также и непрерывный спектр волн устремив  $N \rightarrow \infty$ .

### 1.3.2. Теория Захарова, слабая турбулентность

Основная проблема линейной теории поверхностных волн заключается в полном пренебрежении нелинейных эффектов, которые начинают оказывать существенное влияние с ростом крутизны волн  $\epsilon > 0.05$ . Начало развития теории слабо-нелинейных волн было положено Стоксом, впервые применившим метод разложения по малому параметру  $\epsilon$  [72, 73]. Согласно этому методу, решение полной системы уравнений (1.53)-(1.56) для монохроматической волны ищется в виде бесконечного ряда [70, 73]:

$$\eta = \epsilon \eta^{(1)} + \epsilon^2 \eta^{(2)} + \dots \quad (1.63)$$

$$\varphi = \epsilon \varphi^{(1)} + \epsilon^2 \varphi^{(2)} + \dots \quad (1.64)$$

Следует отметить, что первые компоненты ряда  $\eta^{(1)}$  и  $\varphi^{(1)}$  полностью совпадают с решением линейной задачи (1.58) (1.59). Эти компоненты дают свободные волны. Добавочные члены второго порядка по  $\epsilon$ , т.е.  $\eta^{(2)}$   $\varphi^{(2)}$ , опираются на решения первого порядка  $\eta^{(1)}$  и  $\varphi^{(1)}$  и поэтому формируют связанные волны. Особенностью связанных волн является то, что они движутся со скоростью основной (несущей) свободной волны. Также они возникают на частотах и волновых числах кратных несущей волне. То есть, если свободная волна  $\eta^{(1)}$  имеет частоту  $\omega^{(1)}$  и волновое число  $\kappa^{(1)}$ , то связанная волна второго порядка будет распространяться на частоте  $\omega^{(2)} = 2\omega^{(1)}$  и иметь волновое число  $\kappa^{(2)} = 2\kappa^{(1)}$ . Если продолжить ряды (1.63) и (1.64) до 3-го и последу-

ящего порядков, то будем иметь связанные волны  $\omega^{(3)} = 3\omega^{(1)}$ ,  $\kappa^{(3)} = 3\kappa^{(1)}$  и т.д. Решение для волны Стокса вплоть до 5-го порядка было получено в [74].

Описанная ситуация относится только к монохроматической волне, имеющей одну несущую частоту (частоту свободной волны). В том случае, если возникает несколько свободных волн на разной частоте, т.е. речь идет о спектре (1.62), ситуация усложняется. Для примера рассмотрим случай двух свободных волн, имеющих частоты  $\omega_1^{(1)}$  и  $\omega_2^{(1)}$ . Эти две свободные волны порождают четыре связанные волны на 2-ом порядке [75]:  $2\omega_1^{(1)}$ ,  $2\omega_2^{(1)}$ ,  $\omega_1^{(1)} + \omega_2^{(1)}$ ,  $\omega_1^{(1)} - \omega_2^{(1)}$ . На 3-ем порядке возникает еще несколько связанных волн на частотах  $\omega^{(3)} = \pm\omega_1^{(1)} \pm \omega_2^{(1)} \pm \omega_3^{(1)}$ . Аналогичным образом вычисляются волновые числа на 2-ом и 3-ем порядке.

Кроме того, было обнаружено, что свободные волны 1-го порядка в спектре являются неустойчивыми. Рассмотрим тот же случай двух свободных гармоник  $\kappa_1^{(1)}$  и  $\kappa_2^{(1)}$ . Нелинейное взаимодействие этих гармоник приводит к внезапному росту третьей гармоники с резонансным волновым числом  $\kappa_3^{(1)}$ , удовлетворяющем следующему соотношению:  $2\kappa_3^{(1)} = \kappa_1^{(1)} + \kappa_2^{(1)}$ . Таким образом, часть энергии 1-ой и 2-ой свободной волны “перетекает” на другую резонансную частоту спектра, что приводит к появлению новой волны, изначально полностью отсутствовавшей в спектре. Следует подчеркнуть, что новая волна  $\kappa_3^{(1)}$  является свободной, а не связанной.

Нелинейный процесс переноса энергии между свободными волнами был обнаружен Филлипсом в 1960 году [75, 76]. Позже Захаров [77] построил аналитическую теорию нелинейных процессов, протекающих в поверхностных волнах. Пользуясь гамильтоновым формализмом, им было получено интегро-дифференциальное уравнение Захарова, представляющее собой компактную форму записи задачи (1.53)-(1.56) в Фурье пространстве. Позже это уравнение было получено в рамках классического разложения по малому параметру [78, 79, 80, 81], а также была получена уточненная гамильтонова формулировка [82].

Для вывода уравнения Захарова для одномерной волны вводятся канонические переменные  $\eta(x, t)$  и  $\varphi^s = \varphi(x, z = \eta(x, t), t)$ . Далее задача (1.53)–(1.56) формулируется в этих переменных [75, 78, 79]. Применяя преобразование Фурье вида

$$\hat{\eta}(\kappa, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x, t) \exp(i\kappa x) dx \quad (1.65)$$

задача сводится к поиску комплексных амплитуд  $B^{(1)}$ , которые относятся к амплитудам  $A^{(1)}$  (1.60), (1.62) следующим образом:

$$B^{(1)}(\kappa) = \sqrt{\frac{2g}{\omega(\kappa)}} A^{(1)}(\kappa) \quad (1.66)$$

В результате, уравнение эволюции свободных волн (переноса энергии между гармониками спектра) запишется [75, 77, 78, 79]:

$$i \frac{\partial B^{(1)}}{\partial t} = I^{(3)}(\kappa, t) + I^{(4)}(\kappa, t) + \dots \quad (1.67)$$

Здесь вклад 3-го порядка  $I^{(3)}$  описывает квартетные нелинейные взаимодействия гармоник: перенос энергии из трех независимых гармоник  $\kappa_1^{(1)}, \kappa_2^{(1)}$  и  $\kappa_3^{(1)}$  в четвертую резонансную гармонику  $\kappa^{(1)}$ . Условие резонанса выглядит следующим образом:  $\kappa^{(1)} + \kappa_1^{(1)} = \kappa_2^{(1)} + \kappa_3^{(1)}$ . По аналогии, вклад 4-го порядка  $I^{(4)}$  описывает квинтетные взаимодействия между пятью свободными волнами.

Пренебрегая вкладом 4-го ( $I^{(4)}$ ) и более высоких порядков нелинейности в (1.67), можно окончательно записать уравнение Захарова 3-го порядка:

$$i \frac{\partial B^{(1)}}{\partial t} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} T_{0,1,2,3}^{<2>} B_1^{(1)*} B_2^{(1)} B_3^{(1)} \delta_{01}^{23} e^{i\Delta_{01}^{23} t} d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3 \quad (1.68)$$

В этом уравнении  $*$  означает комплексное сопряжение;  $T_{0,1,2,3}^{<2>}$  – сложная

функция, называемая ядром. Записанное уравнение описывает нелинейный процесс переноса энергии из гармоник  $B_1^{(1)}(\omega_1^{(1)}, \kappa_1^{(1)})$ ,  $B_2^{(1)}(\omega_2^{(1)}, \kappa_2^{(1)})$  и  $B_3^{(1)}(\omega_3^{(1)}, \kappa_3^{(1)})$  в гармонику  $B^{(1)}(\omega^{(1)}, \kappa^{(1)})$ . Однако такой перенос возникает только при выполнении точного резонанса

$$\delta_{01}^{23} = \kappa^{(1)} + \kappa_1^{(1)} - \kappa_2^{(1)} - \kappa_3^{(1)} = 0 \quad (1.69)$$

и околорезонансного условия

$$\Delta_{01}^{23} = \omega^{(1)} + \omega_1^{(1)} - \omega_2^{(1)} - \omega_3^{(1)} \sim \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (1.70)$$

Подробный анализ этих условий можно найти, например, в [75, 78, 79].

Наряду с нелинейным взаимодействием свободных волн, описываемым уравнением (1.68), на 2-ом и 3-ем порядке нелинейности возникает два набора связанных волн, а именно  $B^{(2)}$  и  $B^{(3)}$ . Согласно теории Захарова, комплексные амплитуды этих волн определяются следующим образом:

$$B^{(2)} = - \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ V_{0,1,2}^{<1>} B_1^{(1)} B_2^{(1)} \delta_0^{12} \frac{e^{i\Delta_0^{12}t}}{\Delta_0^{12}} + V_{0,1,2}^{<2>} B_1^{(1)*} B_2^{(1)} \delta_{01}^2 \frac{e^{i\Delta_{01}^2 t}}{\Delta_{01}^2} + V_{0,1,2}^{<3>} B_1^{(1)*} B_2^{(1)*} \delta_{012} \frac{e^{i\Delta_{012} t}}{\Delta_{012}} \right\} d\kappa_1 d\kappa_2 \quad (1.71)$$

$$B^{(3)} = - \iiint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \tilde{T}_{0,1,2,3}^{<1>} B_1^{(1)} B_2^{(1)} B_3^{(1)} \delta_0^{123} \frac{e^{i\Delta_0^{123} t}}{\Delta_0^{123}} + (\tilde{T}_{0,1,2,3}^{<2>} - T_{0,1,2,3}^{<2>}) B_1^{(1)*} B_2^{(1)} B_3^{(1)} \delta_{01}^{23} \frac{e^{i\Delta_{01}^{23} t}}{\Delta_{01}^{23}} + \tilde{T}_{0,1,2,3}^{<3>} B_1^{(1)*} B_2^{(1)*} B_3^{(1)} \delta_{012}^3 \frac{e^{i\Delta_{012}^3 t}}{\Delta_{012}^3} + \tilde{T}_{0,1,2,3}^{<4>} B_1^{(1)*} B_2^{(1)*} B_3^{(1)*} \delta_{0123} \frac{e^{i\Delta_{0123} t}}{\Delta_{0123}} \right\} d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3 \quad (1.72)$$

Выражения для ядер  $V$ ,  $T$  и  $\tilde{T}$  являются чрезмерно сложными и громоздкими, в связи с чем они приведены в приложении 1.

Уравнение (1.68) определяет детерминированную задачу, для решения которой необходимо знать точные начальные условия, включая мгновенные фазы всех гармоник  $\phi_0$  (1.60). Провести столь точные измерения в условиях океана невозможно, в связи с чем для описания крупномасштабных волновых процессов часто используют статистическое описание с помощью кинетического уравнения, впервые полученного Хассельманном [83, 84, 85]. Предполагается, что система волн является статистически однородной, а фазы отдельных колебаний полностью хаотизированы. Также предполагается слабая нелинейность процессов при малой крутизне волн  $\epsilon$ , что дает незначительное отклонение статистических свойств от линейных волн (1.62), для которых справедливо распределение Гаусса.

Кинетическое уравнением можно получить из уравнения (1.68), домножив его на  $B^{(1)*}$  с двух сторон [86, 87, 88]. После осреднения по времени аналогично (1.4), записывается уравнение для коррелятора 2-го порядка  $\langle B^{(1)*} B_1^{(1)} \rangle = \langle B^2 \rangle \delta_0^1$ . Полученное таким образом кинетическое уравнение для средних квадратов амплитуд волн  $\langle B^2 \rangle$  описывает процесс переноса энергии в спектре нелинейных волн [87, 88, 89].

Было обнаружено [86, 90, 91, 92], что точное решение кинетического уравнения показывает перетекание энергии в спектре волн между гармониками, вызванное нелинейными процессами в уравнении Захарова (1.68). При этом, в области достаточно больших волновых чисел  $\kappa$  устанавливается универсальный спектр, определяемый только потоком энергии вдоль области этих волновых чисел  $\kappa$ . Примечательно то, что форма данного универсального спектра аналогична спектру Колмогорова (1.6) (см. рис. 1.6), а процесс переноса энергии схож с каскадом Колмогорова. Точное решение кинетического уравнения для спектра поверхностных волн показало [86, 92]:

$$E(\kappa) \sim \langle B^2 \rangle \sim \kappa^{-\frac{7}{3}}. \quad (1.73)$$

Таким образом, процессы в стохастических нелинейных поверхностных волнах математически схожи с процессами, наблюдаемыми в гидродинамической турбулентности. Поэтому, перенос энергии в спектре нелинейных волн принято называть слабой турбулентностью. При этом следует подчеркнуть, что на физическом уровне слабая турбулентность не имеет отношения к гидродинамической турбулентности [86].

Математически строгая теория слабой турбулентности достаточно хорошо разработана (в отличие от гидродинамической турбулентности) и широко применяется на практике. Однако она описывает только некоторую часть процессов в океане и ограничивается волнами умеренной крутизны  $\epsilon$  (умеренной высоты). С ростом  $\epsilon$  усиливаются нелинейные процессы, и уравнение Захарова (1.68) начинает давать все нарастающую погрешность [93, 94]. Это связано с разными процессами, но в первую очередь с ростом числа Рейнольдса (1.48) и соответствующей турбулизации течения [95]. Это приводит к неверности допущения о потенциальности течения (1.49) и (1.50).

Более того, чрезмерный рост высоты волн приводит к потере устойчивости гребней и, впоследствии, к их обрушению [69, 96, 97]. Было установлено [98, 99], что предельная крутизна волны не может превышать  $\epsilon \lesssim 0.44$ . Во время обрушения, свободная поверхность перестает быть гладкой и непрерывной, а газовая и жидккая фазы взаимно проникают друг в друга, образуя пузыри и водянной спрей [100, 101, 102]. При этом, значительная часть энергии поверхностных волн переходит в энергию гидродинамической турбулентности [103, 104], что окончательно делает теорию Захарова (1.68) неприменимой. С учетом того, что обрушение волн - это очень частое явление в океане [105], требуется разработка методов учета этого явления и корректировки уравнений (1.53)-(1.56).

Дополнительно к описанным процессам, в океане существуют сдвиговые течения [106, 107, 108], которые также не являются потенциальными и не могут быть учтены в (1.53)-(1.56). Кроме того, действие ветра формирует новые

сдвиговые течения в верхнем слое океана (в слое смешения) и турбулизирует толщу воды. Пример развития турбулентности в верхнем слое смешения океана под воздействием ветра показан рис. 1.9, заимствованном из [104]. В момент времени  $t = 18.1$  сек (а и б на рис. 1.9) возникает неустойчивость; при  $t = 19.3$  сек (в и г) образуются грибообразные структуры, направленные в толщу воды. В момент  $t = 20.0$  сек и  $t = 20.7$  сек (д, е, ж, з) структуры становятся трехмерными и происходит турбулизация толщи воды. При  $t = 21.7$  сек (и, к) очевидна развитая турбулентность.

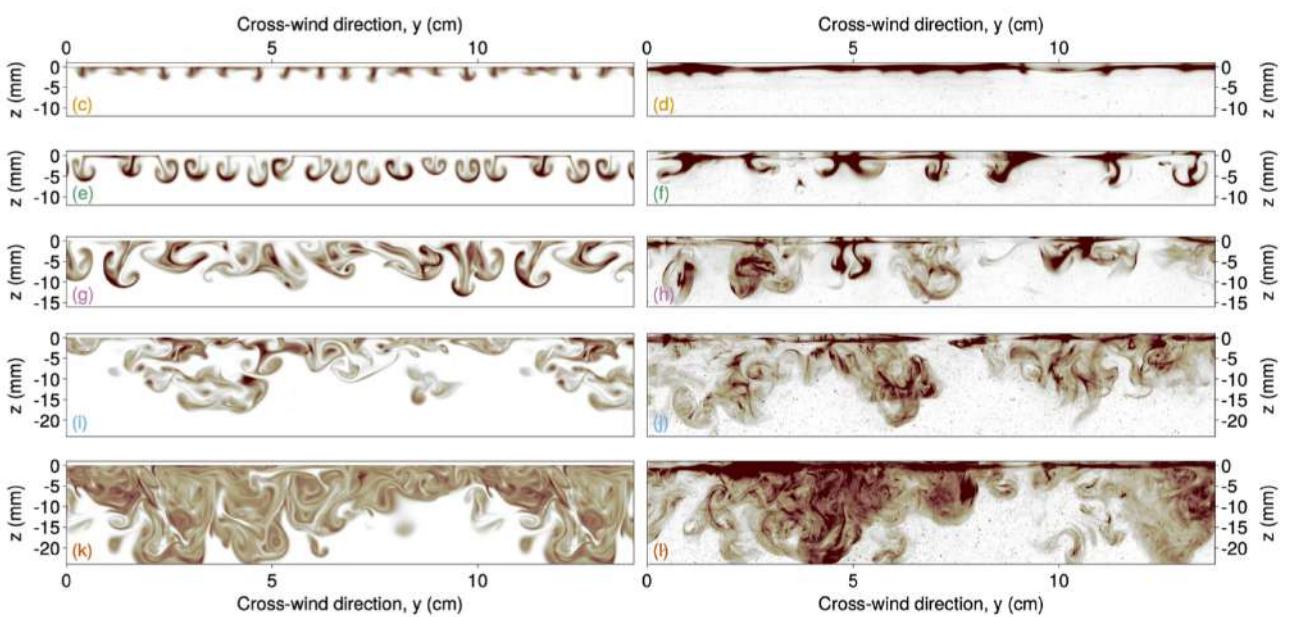


Рис. 1.9. Развитие турбулентности в толще воды под воздействием ветра. Рисунок заимствован из [104].

Свободная поверхность расположена на отметке  $z = 0$ , а ось  $y$  направлена поперек ветра.

На рисунках (б), (г), (е), (з), (к) показано распределение чернил в толще воды, зафиксированное в лаборатории. Рисунки (а), (в), (д), (ж), (и) соответствуют прямому численному счету с применением уравнений Крейка-Лейбовича (модифицированные уравнения Навье-Стокса). Рисунки (а) и (б) соответствуют  $t = 18.1$  сек; (в) и (г) -  $t = 19.3$  сек; (д) и (е) -  $t = 20.0$  сек; (ж) и (з) -  $t = 20.7$  сек; (и) и (к) -  $t = 21.7$  сек.

Учет указанных явлений, включая рост гидродинамической турбулентности, невозможен в рамках строгой аналитической теории. Аналогично проблемам, рассмотренным в разделе 1.2., требуется привлечение эмпирических поправок и моделей, включая модели турбулентности.

### 1.3.3. Гидродинамическая турбулентность в квазипотенциальных волнах

Как было указано выше, в большинстве случаев слабая волновая турбулентность сосуществует с сильной гидродинамической турбулентностью. При этом, основным источником гидродинамической турбулентности можно считать обрушение волн, возникающее из-за превышения энергии отдельно выделенного гребня определенного порога. В результате, гребень теряет способность переносить столь большую энергию, теряет свою устойчивость и разрушается. Обрушение гребня волны порождает вторичные течения, которые не встречаются в случае потенциальных волн, описываемых системой (1.53)–(1.56). Эти вторичные течения являются вихревыми, то есть в них  $\nabla \times V \neq 0$ . Более того, в них обнаруживается значительная хаотичность, присущая турбулентности [96, 97, 109, 103]. Пример обрушающегося гребня показан на рис. 1.10(а), а вторичное турбулентное течение, порожденное обрушением и измеренное в лаборатории, показано на рис. 1.10(б).

Можно заметить, что модели сильной турбулентности, основанные на гипотезе Буссинеска (см. раздел 1.2.3.) допускают, что процесс диссипации энергии осредненного течения  $\langle V \rangle^2$  в энергию турбулентности  $\langle v'_i v'_j \rangle$  можно параметризовать величиной турбулентной вязкости  $\mu_t$  (1.8). Физически турбулентная вязкость увеличивает силы вязкого трения тормозя течение, а работа этих сил приводит к порождению гидродинамической турбулентности. Аналогичным способом было предложено параметризировать диссипацию волновой энергии в энергию гидродинамической турбулентности в результате обрушения волн. Для этого требуется модифицировать уравнения динамического (1.54) и кинематического (1.55) граничных условий.

Уравнение Рейнольдса (1.11) для двумерного турбулентного течения

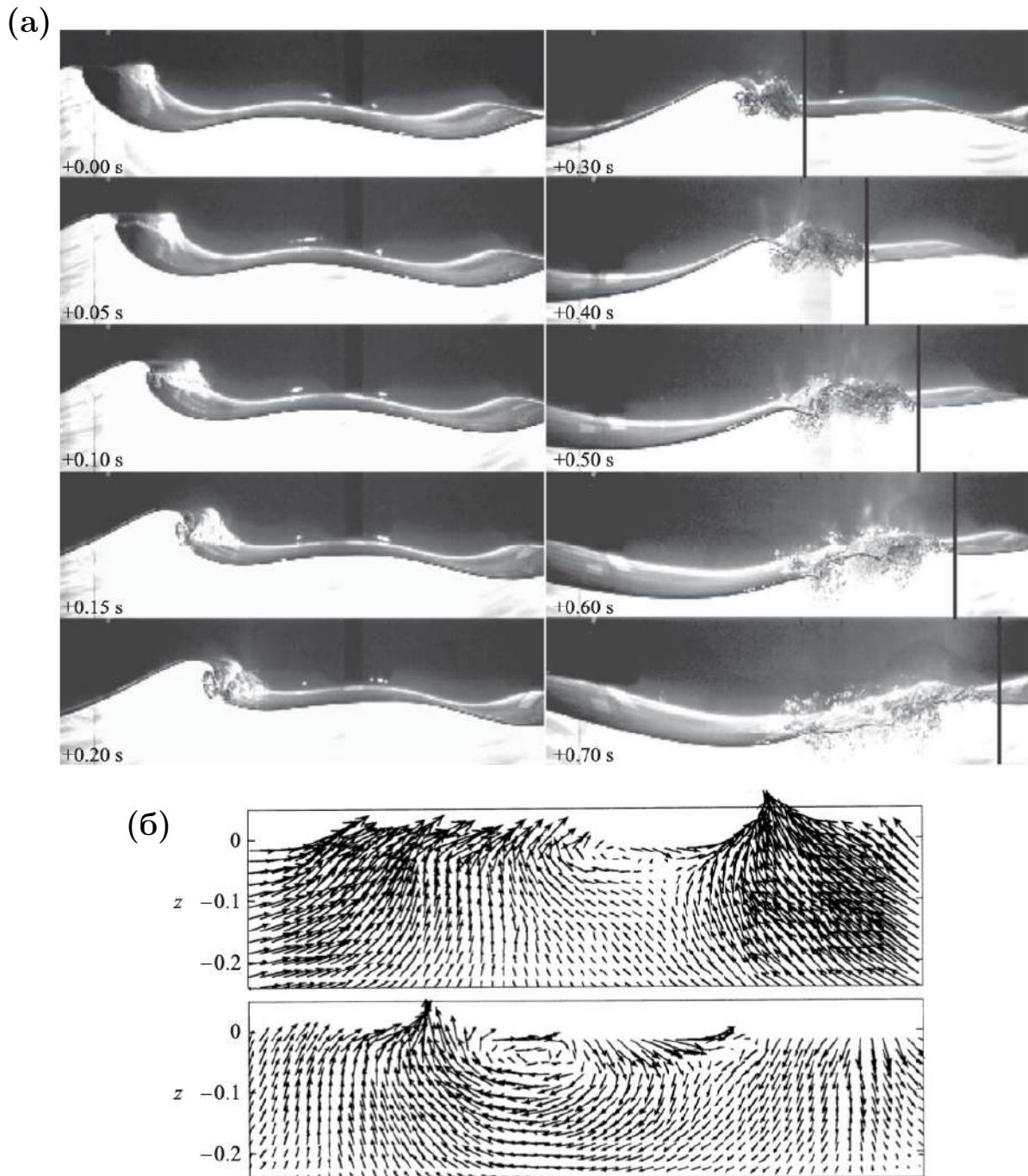


Рис. 1.10. (а) Процесс обрушения поверхности волны, зафиксированный в лаборатории [110]; (б) развитие во времени вторичного турбулентного течения, индуцированного обрушением поверхности волны и измеренного в лаборатории [103]. Ось  $z$  направлена вертикально вверх, а координата  $z = 0$  соответствует положению среднего уровня воды. Горизонтальная ось направлена вдоль направления распространения бегущей волны.

ненесжимаемой жидкости запишется:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \pi}{\partial z}, \quad (1.74)$$

где  $V = \{u, w\}$  - вектор скорости. Пользуясь гипотезой Буссинеска можно записать:

$$\pi = \mu_t \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (1.75)$$

Подставляя (1.75) в (1.74), а также выражая скорость через потенциал согласно (1.50) можно записать модифицированное граничное условие (ДГУ) для квази-потенциального течения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = g\eta - \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{p}{\rho} + 2\nu_t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}, \quad (1.76)$$

где  $s$  - локальная ось координат, направленная вдоль свободной поверхности;  $\nu_t$  - турбулентная (вихревая) вязкость.

Для модификации кинематического граничного условия (КГУ) предположим, что вектор скорости состоит из потенциальной компоненты и флюктуационной, соответствующей турбулентной части течения:

$$V = -\nabla \varphi - V', \quad (1.77)$$

где флюктуационная скорость имеет две компоненты:  $V' = \{u', w'\}$ . Также предполагается, что турбулентность является слабой, а именно  $|V'| \ll |\nabla \varphi|$ . Также полагается, что горизонтальная компонента флюктуационной скорости доминирует  $w' \ll u'$ . Условие отсутствия вязкой силы (1.75) на свободной поверхности запишется:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z} + \cancel{\frac{\partial w'}{\partial x}}^0 = 0 \quad (1.78)$$

Подставляя (1.77) в записанное уравнение можно получить:

$$\frac{\partial u'}{\partial z} = 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \quad (1.79)$$

Далее записывается линеаризованное уравнение Навье-Стокса для флюктуационной компоненты скорости  $u'$ :

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = \nu_t \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u'}{\partial z} + \cancel{\frac{\partial w'}{\partial x}} \right) \quad (1.80)$$

Дифференцируя (1.80) по  $x$ , а также замечая, что  $\partial u'/\partial x = -\partial w'/\partial z$  (1.78) можно записать:

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial w'}{\partial t}} = -\nu_t \cancel{\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial z}} \quad (1.81)$$

Подстановка (1.79) в (1.81) дает:

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -2\nu_t \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial z} \quad (1.82)$$

Уравнение (1.82) принято записывать через векторную функцию тока  $\Psi = \{0, 0, \psi\}$ , которая задает флюктуационную скорость  $V' = -\nabla \times \Psi$ . В конечном виде кинематическое граничное условие (КГУ) для квазипотенциального течения выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial x}}_{\nabla \times \Psi}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial s} = 2\nu_t \frac{\partial^3 \varphi}{\partial s^2 \partial n} \end{cases} \quad (1.83)$$

где  $s$  и  $n$  - локальные оси координат, направленная вдоль свободной поверхности и нормально к ней.

Уравнение Лапласа (1.53), а также ДГУ (1.76) и КГУ (1.83) являются основой теории слабо-демптированных квазипотенциальных поверхностных волн, впервые предложенной в работе [111]. В отличие от нелинейной систе-

мы (1.53)-(1.56), модель квазипотенциальных поверхностных волн позволяет учесть диссиацию их энергии в результате обрушения, приводящую к порождению гидродинамической турбулентности [112, 113, 114]. Для этого, аналогично двухпараметрическим моделям турбулентности (см. раздел 1.2.3.), требуется построить полуэмпирическую модель порождения и эволюции турбулентной вязкости  $\nu_t$  в пространстве и во времени.

В литературе предложено несколько подходов к параметризации или моделированию распределения турбулентной вязкости  $\nu_t$  в пространстве. Однако все описанные подходы нельзя считать достаточно разработанными. Имеется ряд проблем с точностью и применимостью моделей на практике. В связи с этим ведутся активные исследования по усовершенствованию моделей турбулентной вязкости и расширению их области применимости [108, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121].

#### **1.4. Выводы по главе**

Большинство течений жидкости, встречающихся в науке и технике, являются турбулентными. В связи с этим, большие усилия прикладываются к исследованию явления турбулентности. Несмотря на это, значимого прогресса удалось достичь только в некоторых специальных разделах, таких как:

- потеря устойчивости ламинарного течения и переход к турбулентности;
- зарождение и развитие турбулентных “вспышек”;
- теория изотропной турбулентности Колмогорова;
- теория слабой турбулентности в поверхностных волнах жидкости.

Общая строгая теория турбулентности в настоящее время отсутствует, а вопросы ее построения относят к наиболее сложным задачам классической механики. Исследователи, как правило, сходятся во мнении, что проблемы в изучении турбулентности связаны с отсутствием требуемых методов математического анализа.

Параллельно с развитием теоретической базы, возникают практические инженерные задачи, связанные с разработкой и расчетом устройств и машин, в которых так или иначе возникают турбулентные течения жидкости. Для решения таких инженерных задач требуется разработка методов обхода имеющихся теоретических пробелов. В качестве примера, можно упомянуть методы расчета гидравлических потерь при турбулентном течении жидкости в трубопроводе. С инженерной точностью, гидравлические потери можно определить решая одномерное уравнение Бернулли с эмпирической поправкой, в качестве которой может выступать формула Блазиуса, Шифринсона, Альтшуля или ряд других эмпирических зависимостей [122]. Подобный подход не позволяет понять физические процессы в турбулентном потоке, но дает инструмент решения инженерных задач.

Развитие науки и техники привело к существенному усложнению машин и агрегатов. Это, в свою очередь, требует более точных методов расчета сложных трехмерных турбулентных течений. В этом случае, математические модели для инженерных расчетов строятся на базе уравнений Рейнольдса (Reynolds-Averaged Navier-Stokes - RANS), а отсутствие теории турбулентности обходится при помощи полуэмпирических моделей турбулентности. Значительная часть подобных моделей основана на гипотезе Буссинеска, в рамках которой диссиpация энергии основного осредненного течения  $\langle V \rangle^2$  эмпирически параметризуется завышением коэффициента вязкости на величину  $\mu_t$ , называемую турбулентной вязкостью. Данная величина меняется как в пространстве, так и во времени. Физически, потеряная часть энергии основного потока  $\langle V \rangle^2$  переходит в энергию вторичных хаотических течений, то есть в энергию турбулентности  $\langle v'_i v'_j \rangle$ .

Схожая ситуация возникает при расчете квази-потенциальных волн на поверхности жидкости (в том числе морских волн). При обрушении таких волн, часть энергии основного течения также переходит (диссиpирует) в энергию вторичного турбулентного течения, сосуществующего с поверхностной вол-

ной. Такой процесс диссипации энергии поверхностной волны также параметризируется при помощи гипотезы Буссинеска и величины турбулентной вязкости  $\mu_t$ . Следует особенно подчеркнуть, что величина  $\mu_t$ , как в первом, так и во втором случае, является эмпирической и требует специальных подходов к ее нахождению.

Проводя аналогию между одномерными и трехмерными турбулентными течениями, можно заметить, что гидравлические потери в одномерных задачах с достаточной точностью вычисляются эмпирически на основании широкого набора измерений [122]. С другой стороны, трехмерные турбулентные течения значительно сложнее с физической стороны. В связи с этим, в настоящее время отсутствует универсальный метод вычисления величины турбулентной вязкости  $\mu_t$ . Существующий ряд полуэмпирических моделей турбулентности ограничен определенным набором типов течений, для которых достигается удовлетворительная точность расчетов. То есть, каждая из полуэмпирических моделей турбулентности имеет строго определенную область применения, выход за пределы которой приводит к резкому падению точности.

Далеко не для всех типов течений разработаны соответствующие им модели турбулентности. В случае отсутствия требуемой модели, решение инженерных задач существенно затрудняется, а иногда становится невозможным.

В настоящей диссертации исследуются течения жидкости и газа в двух гидропневматических устройствах/системах:

- турбулентное течение в вихревых трубах Ранка-Хилша и
- турбулентное течение в гидроволновых лотках, оборудованных волнопротектором.

Как в первом, так и во втором случае, применение существующих моделей турбулентности приводит к недопустимо большим погрешностям расчета. Это требует усовершенствования существующих моделей турбулентности применительно к указанным гидропневматическим системам.

## ГЛАВА 2

# РАЗРАБОТКА МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В ВИХРЕВОЙ ТРУБЕ

### 2.1. Вихревые трубы Ранка-Хилша

Французский инженер Ранк [123] впервые обнаружил аномальное разделение температуры в вихревом потоке воздуха. В дальнейшем, Хилш [124] применил этот эффект для одновременного нагрева и охлаждение воздуха. Впоследствие, обнаруженное разделение температур было названо эффектом Ранка-Хилша, а устройство, разработанное Хилшем, было названо вихревой трубой [125, 126, 127, 128, 129, 130]. Современные вихревые трубы нашли широкое применение в промышленности. В частности, они используются нефтегазовой промышленности для охлаждения попутного газа и его разделения на фракции [131, 132, 133, 134], а также для сжижения природного газа [135]. Вихревые трубы также применяются в холодильных камерах, терmostатах, в системах осушки воздуха, для охлаждения режущих инструментов станков [127, 128, 136, 137]. Исследуется возможность использования вихревых труб для сушки семян и зерна [138], а также для кондиционирования бытовых и промышленных помещений [139, 140, 141]. В режиме теплогенератора, вихревая труба позволяет получать горячий воздух с температурой более  $200^{\circ}\text{C}$  для отогрева технологического оборудования в северных условиях.

Вихревые трубы имеют ряд положительных свойств по отношению к другим способам охлаждения или нагрева (парокомпрессионные машины, детандеры):

1. Отсутствие каких-либо хладагентов и теплоносителей. Этим обеспечивается минимизация ущерба окружающей среде в результате возможных выбросов парниковых газов, к которым относятся хладагенты, такие как фреон и аммиак.

2. Простота конструкции вихревой трубы, а следовательно дешевизна ее изготовления.
3. Отсутствие подвижных частей, что повышает надежность системы.
4. Малая инерция теплообменных процессов в вихревой трубе. Это обстоятельство дает возможность регулирования температуры газа с высокой точностью.

Несмотря на все отмеченные положительные качества вихревых труб и холодильно-нагревательных систем на их основе, современные вихревые трубы имеют один существенный недостаток. А именно, они характеризуются чрезвычайно низкой энергетической эффективностью по сравнению с альтернативными решениями. Именно этот фактор является основным ограничителем расширения областей применения вихревых труб в различных отраслях промышленности. Исходя из этого, исследование эффекта Ранка-Хилша с целью усовершенствования вихревых труб и повышения их энергоэффективности является актуальной задачей.

### **2.1.1. Конструкция и основные характеристики вихревой трубы**

Схематично вихревая труба представлена на рис. 2.1. Сжатый газ подается через несколько тангенциально расположенных сопловых каналов в камеру энергоразделения, где формирует свободный винтовой поток. В результате эффекта Ранка-Хилша, возникающего в камере энергоразделения, центральная часть винтового потока охлаждается, а периферийная часть нагревается. Холодный поток из центра отводится через отверстие диафрагмы и диффузор, а горячий поток выходит с противоположной стороны от диафрагмы вихревой камеры через дроссельные отверстия.

Процесс температурного разделения (энергоразделения) в вихревой трубе принято характеризовать следующими интегральными показателями [126]:

1. Степень понижения температуры газа в вихревой трубе  $\Delta T_c$ , определяемая как разность температуры торможения поступающего сжатого

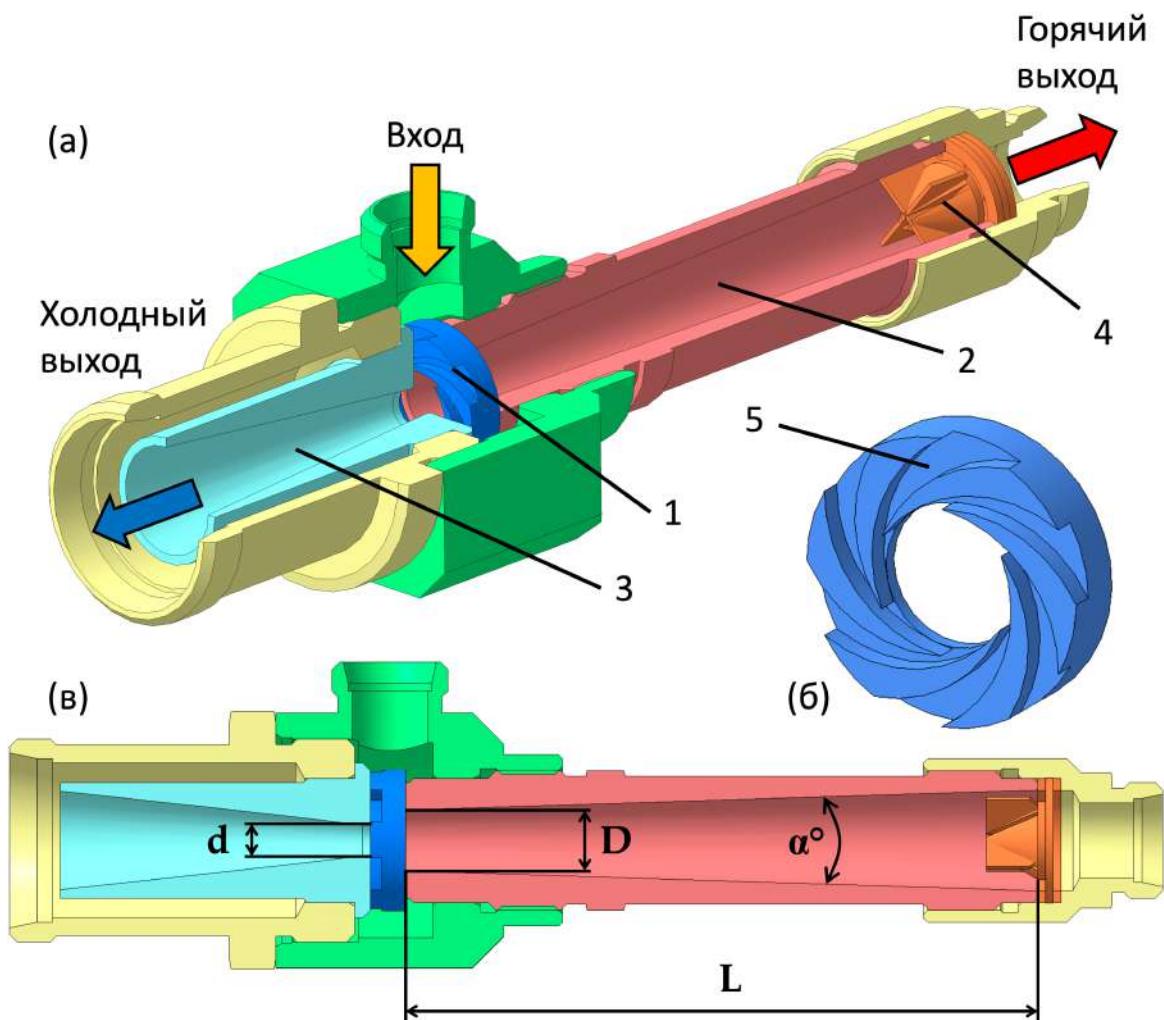


Рис. 2.1. Схема и основные размеры вихревой трубы:  
 а - общий вид вихревой трубы; б - сопловой ввод вихревой трубы; в - основные  
 (принципиальные) размеры камеры энергоразделения

1 - сопловой ввод; 2 - камера энергоразделения; 3 - диффузор холодного потока; 4 -  
 развижитель горячего потока с дроссельными отверстиями; 5 - сопловой сужающийся  
 канал;  $D$  - диаметр камеры энергоразделения;  $d$  - диаметр диафрагмы;  $L$  - длина камеры  
 энергоразделения;  $\alpha$  - угол конусности камеры энергоразделения

газа  $T_{in}^*$  и выходного холодного потока  $T_c^*$  (2.1):

$$\Delta T_c = T_{in}^* - T_c^* \quad (2.1)$$

2. Степень нагрева горячего потока  $\Delta T_h$ , определяемая как разность между температурой торможения горячего потока  $T_h^*$  и температурой поступающего сжатого газа  $T_{in}^*$  (2.2):

$$\Delta T_h = T_h^* - T_{in}^* \quad (2.2)$$

3. Доля массового расхода холодного потока  $\varphi_c$ , равная отношению массового расхода холодного потока  $G_c$  к общему расходу подводимого сжатого газа  $G_{in}$  (2.3):

$$\varphi_c = \frac{G_c}{G_{in}} \quad (2.3)$$

4. Доля массового расхода горячего потока  $\varphi_h$ , равная отношению массового расхода горячего потока  $G_h$  к общему расходу подводимого сжатого газа  $G_{in}$  (2.4):

$$\varphi_h = \frac{G_h}{G_{in}} \quad (2.4)$$

5. Изоэнтропный КПД вихревой трубы  $\eta_s$ , определяемый как отношение разностей энталпий, получаемых в вихревой трубе и при идеальном изоэнтропном расширении газа (2.5). Данный показатель характеризует эффективность вихревой трубы по отношению к идеальному циклу детандера.

$$\eta_s = \frac{h_{in}^* - h_c^*}{h_{in}^* - h_{id}^*} \stackrel{\text{сов. газ}}{=} \frac{T_{in}^* - T_c^*}{T_{in}^* \left( 1 - \left( \frac{p_c^*}{p_{in}^*} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)} \quad (2.5)$$

Здесь  $h_{in}^*$ ,  $h_c^*$  - энталпии торможения газа на входе в вихревую трубу и на выходе холодного потока, соответственно;  $h_{id}^*$  - энталпия торможения газа в конце идеального адиабатического расширения газа от давления торможения входного потока  $p_{in}^*$  до давления торможения холодного потока  $p_c^*$  вихревой трубы. Вторая форма выражения для  $\eta_s$  получена при помощи уравнения совершенного газа (1.17);  $\gamma = c_p/c_v$  - показатель адиабаты.

6. Было установлено, что максимум величины изоэнтропного КПД  $\eta_s$  приходится на очень низкие доли холодного потока  $\varphi_c$ , соответствующие низким массовым расходам холодного газа и, соответственно, низким тепловым потокам. С учетом того, что часто требуется найти режим

наибольшей холодопроизводительности вихревой трубы, вводится ходильный КПД  $\eta_c$  (2.6):

$$\eta_c = \varphi_c \times \eta_s \quad (2.6)$$

Все существующие типы вихревых труб можно разделить на две группы по схеме движения газа в камере энергоразделения: *прямоточные и противоточные*. В первом случае, отвод холодного и горячего потоков осуществляется с одной и той же стороны камеры энергоразделения. Таким образом, центральная и периферийная части винтового течения движутся сонаправлено вдоль оси камеры энергоразделения. В соответствии с литературными данными [128, 142, 143, 144], энергоэффективность *прямоточных вихревых труб* относительно низкая, в связи с чем данный тип труб исследуется и используется редко.

В настоящее время *противоточные (разделительные) вихревые трубы с цилиндрической камерой энергоразделения* нашли широкое распространение. Пример конструкции цилиндрической разделительной вихревой трубы Меркулова [126] представлен на рис. 2.2. Для достижения высоких значений КПД (2.5) цилиндрических вихревых труб требуется значительная длина камеры энергоразделения, которая может достигать 50 калибров. Было установлено, что данная длина может быть уменьшена до 9 калибров за счет установки со стороны дросселя четырехлопастной крестовины (развихрителя).

Попытки сократить длину вихревой трубы привели к созданию *конических противоточных вихревых труб*. В таких трубах проточная часть камеры энергоразделения выполняется в виде усечённого конуса с углом раскрытия в диапазоне  $3 - 6^\circ$  при длине в  $5 - 6$  калибров. Исследования *конических вихревых труб*, проведенные Метениным [126], показали их высокую энергоэффективность. Наряду с цилиндрическими, *конические вихревые трубы* также широко применяются.

Стремление увеличить эффективность вихревой трубы привело к созда-

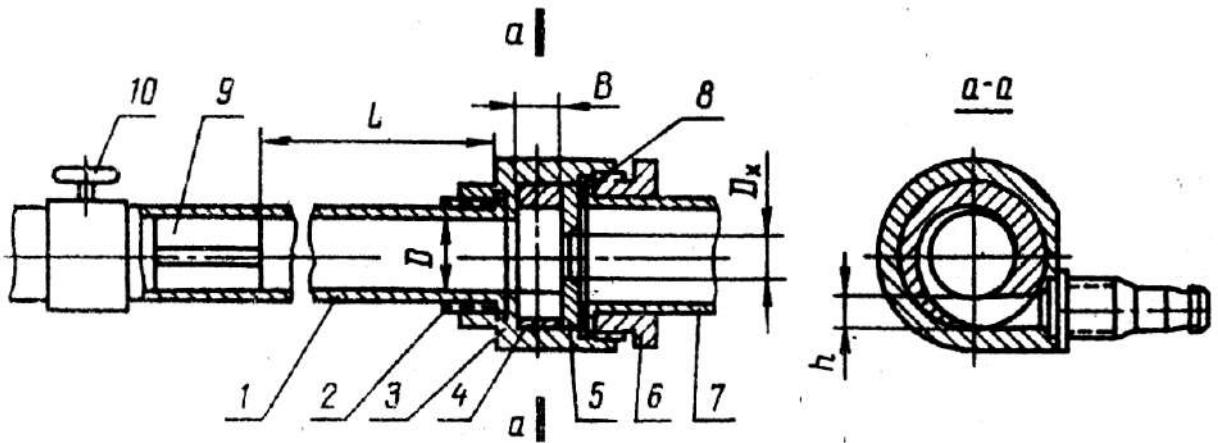


Рис. 2.2. Цилиндрическая вихревая труба Меркулова [126]

1 - цилиндрическая труба; 2 - гайка; 3 - корпус; 4 - улитка соплового ввода; 5 - диафрагма; 6 - гайка; 7 - трубка холодного потока; 8 - прокладка; 9 - четырехлопастная крестовина; 10 - дроссель

нию охлаждаемых вихревых труб, в которых камера энергоразделения охлаждается снаружи при помощи оребрения поверхности [145] или организации водяной рубашки [126]. Схема конической противоточной охлаждаемой вихревой трубы с водяной рубашкой охлаждения показана на рис. 2.3. В охлаждаемых трубах тепловая энергия отводится не только горячим газом, покидающим камеру энергоразделения, но и охлаждающей жидкостью через стенку цилиндрической или конической трубы.

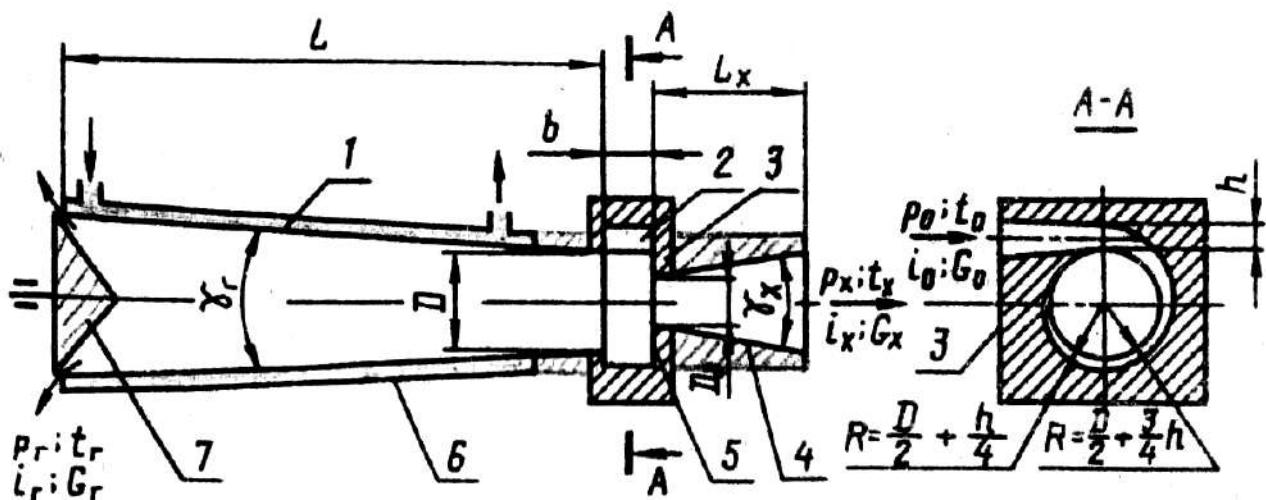


Рис. 2.3. Схема охлаждаемой вихревой трубы [126]

1 - конический корпус; 2 - сопловой ввод; 3 - сопловой блок; 4 - трубка холодного потока; 5 - диафрагма; 6 - рубашка; 7 - вентиль горячего потока

Особенный интерес вызывают *вихревые трубы с дополнительным потоком* или *двухконтурные вихревые трубы*, впервые предложенные Пиралишвили [129]. Отличительной особенностью таких труб является наличие ввода дополнительного потока в приосевую зону камеры энергоразделения со стороны дросселя горячего потока, см. рис. 2.4. По имеющимся литературным данным, двухконтурные вихревые трубы позволяют увеличить массовый расход холодного потока и его долю  $\varphi_c$  при сохранении высокой величины изоэнтропного КПД  $\eta_s$ . Таким образом достигается заметный рост холодильного КПД  $\eta_c$ .

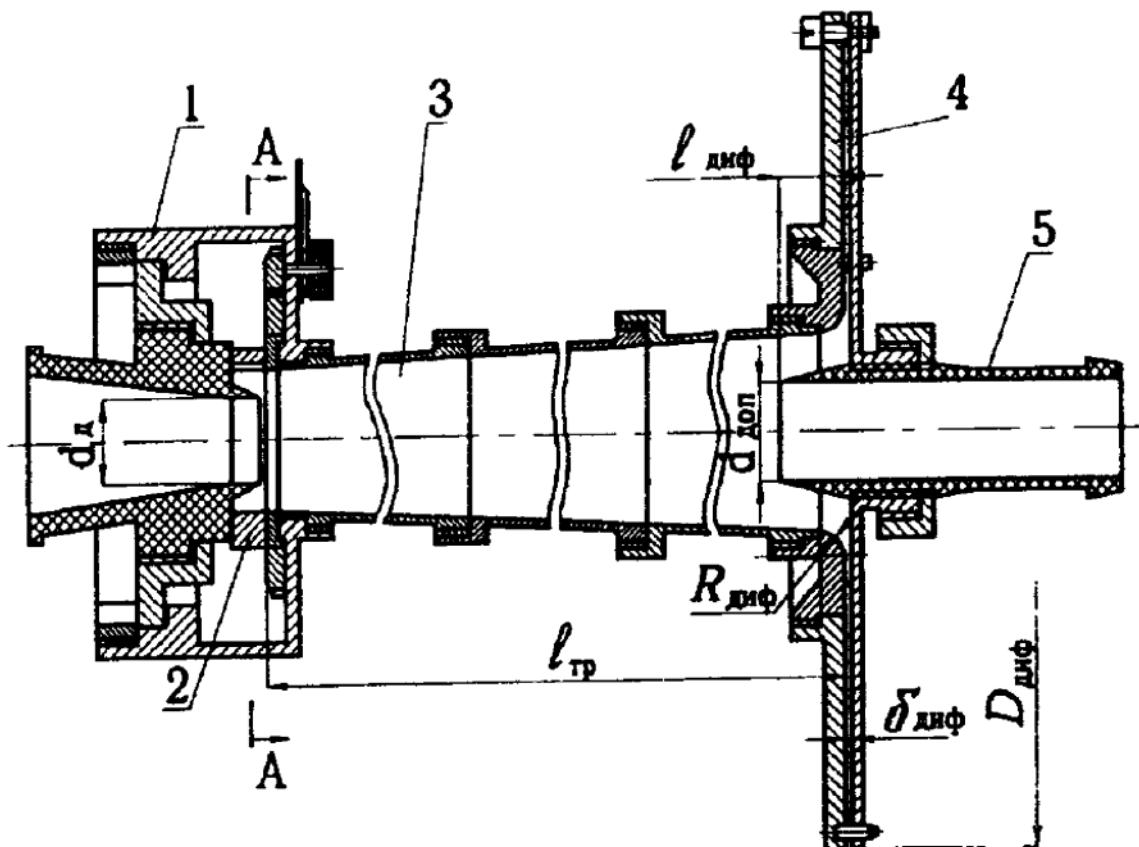


Рис. 2.4. Вихревая труба (двухконтурная) с дополнительным потоком [129]

1 – корпус; 2 – закручивающее устройство; 3 – камера энергоразделения; 4 – щелевой раскруточный диффузор; 5 – трубка подвода дополнительного потока

## 2.1.2. Влияние формы проточной части на характеристики вихревых труб

Выбор формы и размеров проточной части вихревой трубы является одним из основных вопросов при решении инженерных задач на практике. Главная задача состоит в том, чтобы рассчитать и выбрать геометрию проточной части таким образом, чтобы обеспечить наилучшие энергетические показатели вихревой трубы, такие как изоэнтропный  $\eta_s$  или холодильный КПД  $\eta_c$ . Очевидно, что форма проточной части драматическим образом влияет на течение газа, которое, в свою очередь, определяет тепло- и массообмен в камере энергоразделения. В связи с отсутствием полного понимания физических процессов, проводящих к эффекту Ранка-Хилша, выбор геометрии проточной части как правило происходит методом перебора различных вариантов. Сама вихревая труба в таких исследованиях часто выступает в роли “черного ящика”, отклик которого определяется в результате экспериментальных измерений или численного моделирования.

Достаточно подробный общий обзор различных экспериментальных работ приведен в [127, 129, 130, 142, 143, 144, 146, 147, 148, 149, 150]. К ранним исследованиям вихревых труб можно отнести работы [151, 152], в которых исследовалось влияние различных геометрических параметров на работу вихревой трубы. В том числе, было предложено заменить конический дроссель горячего потока вихревой трубы (7 на рис. 2.3) расширяющимся радиальным диффузором, показанным на рис. 2.4 (поз. 4). Была предпринята попытка оптимизации размеров диффузора для получения максимального температурного разделения.

Особое внимание в исследованиях уделялось конфигурации соплового ввода, формирующего винтовое течение в камере энергоразделения [128, 153, 154]. Влияние диаметра каналов соплового ввода и формы регулировочного клапана горячего потока было исследовано в статьях [155, 156]. Работа вих-

ревой трубы исследовалась на различных газах, таких как воздух, кислород и азот. Влияние количества каналов соплового ввода, диаметра диафрагмы, а также теплоизоляции корпуса трубы на эффективность ее работы исследовалось в [157]. Также количество проходов соплового ввода изучалось в [158, 159, 160, 161]. Дополнительно к перечисленному, влияние материала соплового ввода рассматривалось в работе [162]. В результате, все перечисленные работы показали, что форма, размер, материал и другие параметры соплового ввода играют огромную роль в эффективности процесса температурного разделения.

Влияние конфигурации дросселя горячего потока (7 на рис. 2.3) на энергоэффективность подробно изучалось в работах [163, 164]. Было изготовлено значительное количество конических дросселей различной длины, а также различной формы. Экспериментальные и численные исследования показали, что конфигурация дросселя горячего потока также оказывает влияние на характеристики вихревой трубы.

Вопрос сокращения длины вихревой трубы путем замены цилиндрической камеры энергоразделения на коническую исследовался в работах [165, 166, 167, 168]. Вихревая труба Парулейкара [165] состояла из двух конических и одного цилиндрического участков, сопловой ввод имеет коническую спиральную поверхность. Игольчатый регулирующий вентиль горячего конца установлен таким образом, чтобы обеспечить отвод горячего потока перпендикулярно к оси трубы. Такая вихревая труба показала достаточно высокий изоэнтропный КПД  $\eta_s \approx 0.7$ , но при низких долях холодного потока  $\varphi_c \approx 0.2$ . Таким образом, холодильный КПД вихревой трубы Парулейкара для указанного режима составляет  $\eta_c = 0.14$ .

Результаты исследований конических вихревых труб, представленные в работах [169, 170], позволяют определять оптимальные геометрические размеры, соответствующие максимальному эффекту охлаждения для данного типа вихревых труб. Сообщается, что угол конусности камеры энергоразде-

ления рекомендуется держать в диапазоне  $3 - 6^\circ$  при ее длине в диапазоне 3–9 калибров. Вихревая труба Метенина [170], выполненная в соответствии с данными рекомендациями, создавала более значительный эффект охлаждения по сравнению с аналогичной цилиндрической вихревой трубой.

Исследования больших конических вихревых труб [171] показали повышение их эффективности при установке перфорированных пластин, распрямляющих поток на горячем выходе. Аналогичные пластины также были установлены в вихревой трубе Меркулова [126], см. поз. 9 на рис. 2.2. Охлаждаемые вихревые трубы рассматривались в работах [172, 173].

Методы планирования эксперимента были применены для более точной оптимизации размеров и формы проточной части цилиндрических вихревых труб в работах [174, 175]. На основании поверхностей отклика, полученных в результате многофакторных экспериментов, были сделаны выводы относительно рекомендованных размеров исследованных вихревых труб. Методы аппроксимации на основе “искусственной нейронной сети” были применены в работе [176] взамен более простого метода поверхности отклика [175].

Так называемая искривленная вихревая труба, в которой ось цилиндрической камеры энергоразделения не является прямой, а имеет искривление заданного радиуса, была исследована в работах [177, 178]. Наилучшие энергетические показатели были зафиксированы для прямой цилиндрической формы камеры энергоразделения.

Значительное количество исследований было проведено под руководством Жидкова [131, 132, 133, 134, 179], в которых фокус был направлен на практическое применение цилиндрических противоточных вихревых труб в нефтегазовой промышленности. В вихревых трубах Жидкова выполнялась сепарирующая щель в камере энергоразделения недалеко от соплового ввода. Такие трубы обычно называют трехпоточными. Данная щель предназначена для отделения сконденсировавшихся фракций рабочего газа от основного потока. Особое внимание в указанных работах было отведено исследованию

влияния размеров и конструкции узла сепарации конденсата и компонентного состава подводимого газа на интегральные характеристики трехпоточной вихревой трубы.

Отдельно от других стоят работы, выполненные под руководством Целищева [142, 143, 144, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186]. Исследована возможность получения изотермического процесса дросселирования газа с использованием вихревых труб. Выполнены исследования трехпоточных вихревых труб. Установлена возможная эффективность очистки многокомпонентного газа до 92 % по массе.

Особенно следует отметить большой вклад Меркулова [127], который исследовал как цилиндрические, так и конические вихревые трубы. Пиралишвили и Поляев [129, 187, 188] предложили и исследовали новый тип вихревых труб, названных двухконтурными. Полученные экспериментально значения изоэнтропного КПД для наилучшего образца двухконтурной вихревой трубы составили  $\eta_s = 0.34 - 0.36$  при доле холодного потока в диапазоне  $\varphi_c = 0.85 - 1$ . Таким образом, удалось увеличить холодильный КПД вихревой трубы до  $\eta_c = 0.29 - 0.36$ . Двухконтурные вихревые трубы также исследовались в работах [189, 190].

На основании приведенного литературного анализа можно сделать вывод о том, что было выполнено огромное количество исследований по поиску конфигурации проточной части вихревой трубы, обеспечивающей высокую энергоэффективность. Несмотря на это, наилучшие значения холодильного КПД остаются низкими:  $\eta_c \approx 0.20 - 0.22 \text{ max}$  для разделительных вихревых труб, и  $\eta_c \approx 0.29 - 0.36 \text{ max}$  для двухконтурных вихревых труб. Можно предположить, что основная причина состоит в отсутствие полного понимания физических процессов, протекающих в камере энергоразделения. Очевидно, что дальнейшее усовершенствование вихревой трубы требует построения физической и математической теории эффекта Ранка-Хилша, а также соответствующих аналитических или численных моделей.

### 2.1.3. Микроструктура винтового течения

Для построения и валидации теории эффекта Ранка-Хилша требуются точные измерения полей скоростей, давлений и температур внутри камеры энергоразделения вихревой трубы. Течение газа в вихревой трубе обладает следующими особенностями:

- высокая степень турбулентности потока, величина которой может превышать 30%;
- высокое центростремительное ускорение порядка  $6 \times 10^5 g$ ;
- существенная анизотропия: градиенты температур и давлений в радиальном направлении намного выше соответствующих градиентов в осевом направлении;
- нестационарность течения.

Перечисленные особенности вызывают значительные трудности при проведении лабораторных измерений. В связи с этим широкое распространение находят численные трехмерные модели течения газа на основе уравнений Рейнольдса. Ниже представлен краткий обзор некоторых важных экспериментальных и численных результатов.

Давления, скорости и температуры в противоточной вихревой трубе с массовой долей холодного потока  $\varphi_c = 0.23$  были измерены в [191]. Было выдвинуто предположение о том, что основной причиной эффекта Ранка-Хилша является турбулентный перенос. Поле температур в цилиндрической вихревой трубе также исследовалось в [192]. Измерение трехмерного распределения тангенциальных скоростей и температур торможения было предпринято в [193]. Важные результаты измерения статических температур в камере энергоразделения обсуждаются в работах [127, 194, 195, 196]. Ш.А. Пиралишвили и его соавторы изучали микроструктуру винтового потока в двухконтурной вихревой трубе с использованием зонда в виде комбинированной трубы Пито

с установленной на конце термопарой [129, 187, 188, 197]. Обобщение наиболее характерных результатов измерений представлено в книгах [127, 128, 129].

В работах [155, 198, 199] приведены результаты визуализации течения в вихревых трубах различной конструкции. Соответствующие фотоснимки приведены на рис. 2.5, 2.6, 2.7. Во всех работах было установлено существование крупномасштабных вторичных вихревых структур. Обнаружена двойная вихревая спираль (рис. 2.7), которая зарождается на плоской торцевой поверхности около периферийного выхода горячего воздуха, а затем распространяется вдоль продольной оси, многократно перезамыкаясь и разрушаясь. Зафиксировано вращательное движение вихревой спирали.

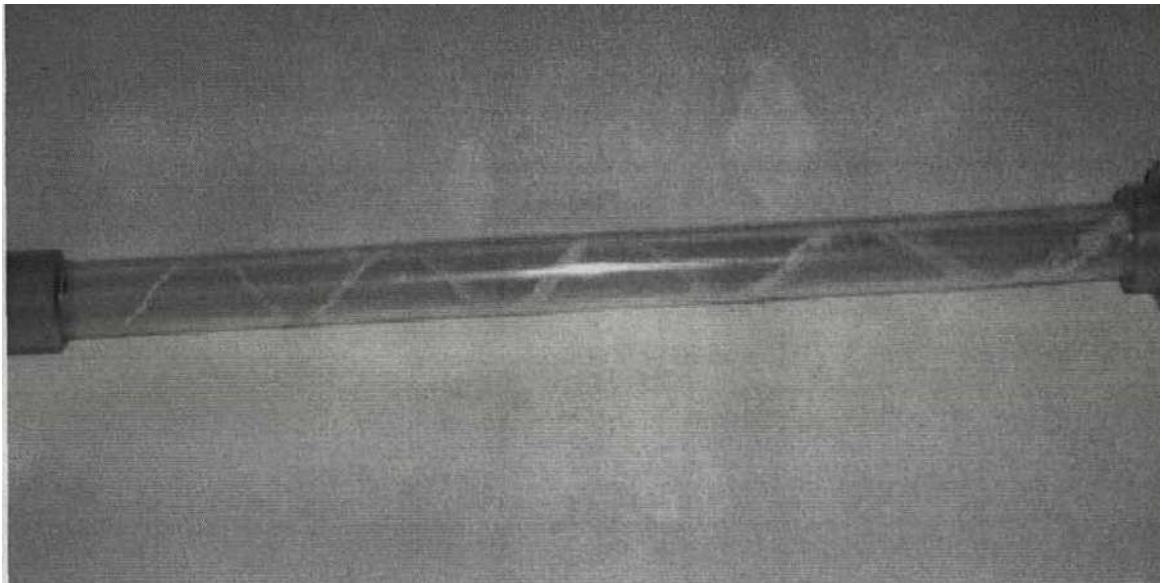


Рис. 2.5. Визуализация течения газа в вихревой трубе [155]

Расчетная картина течения в вихревой трубе, полученная в результате численного моделирования на основе уравнений Рейнольдса, обсуждается в большом количестве работ. Наиболее детальные результаты были получены с привлечением моделей турбулентности крупных вихрей (Large Eddy Simulation - LES) на мелких расчетных сетках [200, 201, 202, 203, 204]. Размер расчетных ячеек в таких расчетах как правило определяется имеющимися вычислительными мощностями. Сравнение результатов, полученных при помощи различных моделей турбулентности, между собой обсуждается в [205].

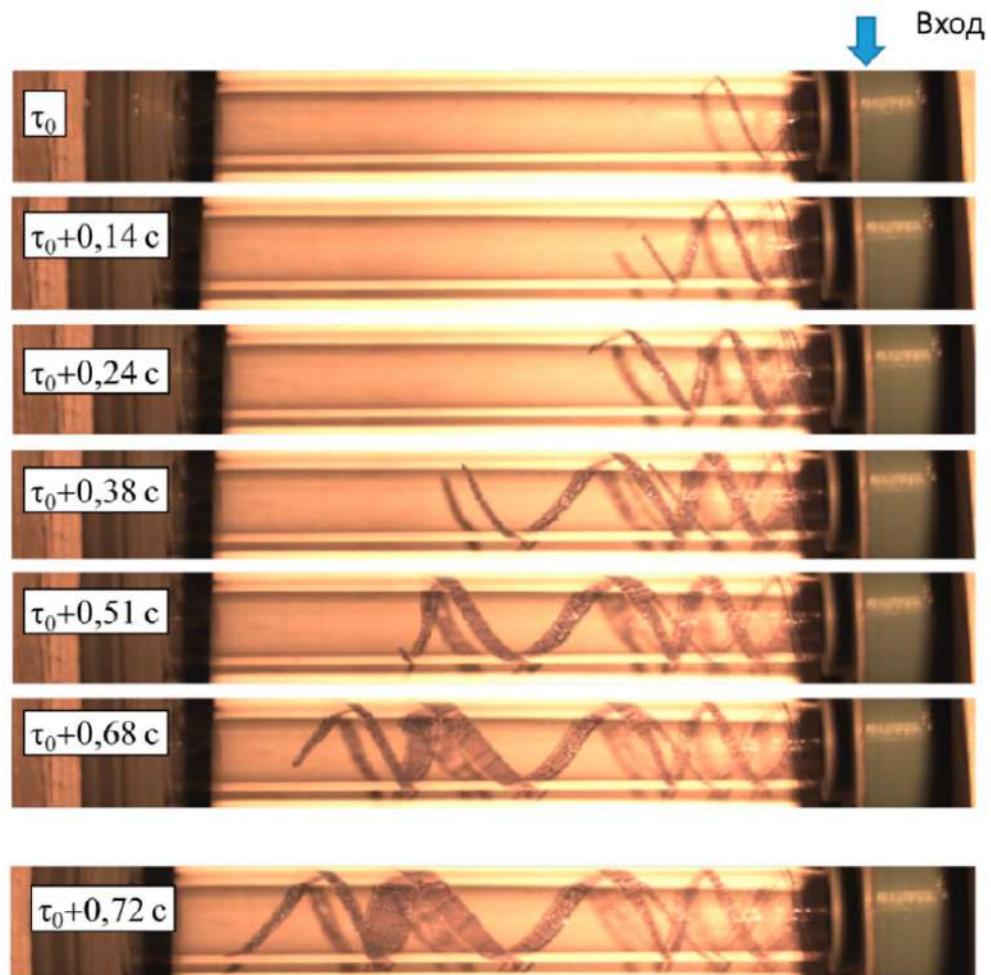


Рис. 2.6. Визуализация структуры течения воды в вихревой трубе путем подкрашивания жидкости через иглу в закручивающем устройстве [198]

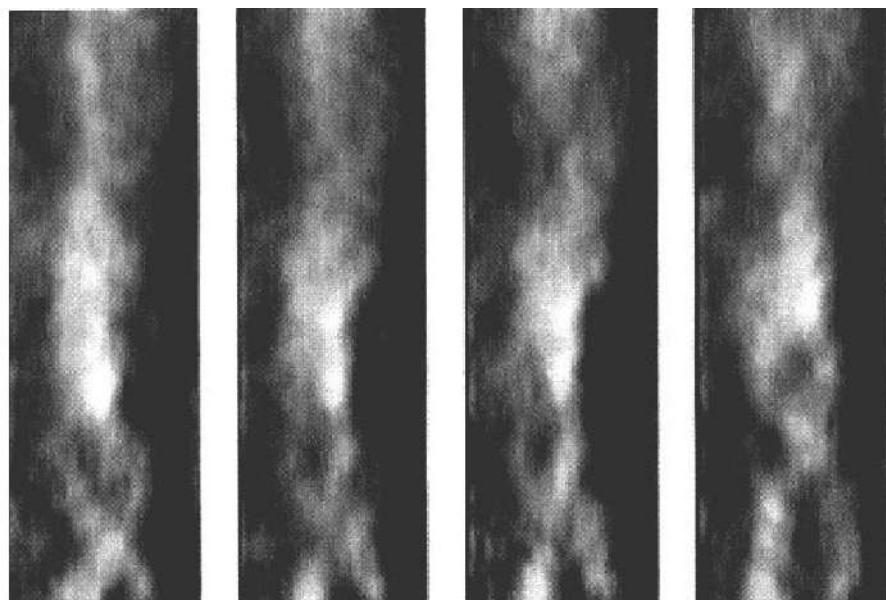


Рис. 2.7. Визуализация крупномасштабных вихревых структур в виде двойной спирали. Визуализован радиальный градиент фазовой оптической плотности [199]

С другой стороны, сравнение численных расчетов с экспериментальными измерениями выполнено в [206]. Визуализация течения, полученная расчетным способом, обсуждается в [207].

Численное моделирования течения в вихревых трубах было также исследовано в диссертациях [142, 143, 144, 146]. Серия численных экспериментов на вихревой трубе с применением собственной модели обсуждается в [208]. Численное исследование течения в вихревой трубе Леонтьева представлено в работе [209].

## 2.2. Физические основы эффекта Ранка-Хилша

Несмотря на простоту конструкции вихревой трубы, возникающее в ней течение оказалось чрезвычайно сложным с физической стороны. Большое количество выполненных экспериментальных и теоретических исследований дало некоторое первичное представление о винтовом течении. Однако причина и механизм возникновения температурной стратификации (эффекта Ранка-Хилша) остается предметом споров и дискуссий [127, 128, 129, 130, 210, 211]. Возможные объяснения эффекта ранжируются от “умозрительных” (схематичных) представлений до математически строгих теорий, дающих числовые оценки. При этом, все существующие физические объяснения эффекта Ранка-Хилша принято называть гипотезами энергоразделения.

Ранк, открывший эффект энергоразделения, был приверженцем центробежной гипотезы энергоразделения. Рассматривая уравнение равновесия элементарного объема газа в поле центробежных сил, уравнение состояния и уравнение адиабаты, он пришел к заключению, что с ростом радиуса градиент давления в поле центробежных сил растет интенсивнее плотности [129]. Тогда, в соответствии с уравнением состояния, с ростом радиуса температура должна возрастать. Однако расчетный градиент температуры по теории Ранка получается в шесть раз меньше опытного.

Гипотеза Эрделаи [129, 130] была построена на анализе силового взаимодействия интенсивного центробежного поля с тепловым. Согласно этой гипотезе, воздействие силового поля на молекулы состоит в том, что при движении в направлении, совпадающем с вектором ускорения, полная энталпия молекул возрастает. Если молекула перемещается в противоположную сторону, полная энталпия убывает. Все это приводит к соответствующему полю температуры. Для плоского вихря при незначительных ускорениях данная гипотеза дает удовлетворительное совпадение с экспериментом. Однако этого совпадения нет, если использовать подход для оценки эффекта энергоразделения в вихревых трубах.

Вебстер [129, 130, 212] считал, что частицы газа, из которых формируется холодный поток, выходящий через диафрагму, движутся к оси трубы по спирали, охлаждаясь в процессе расширения от давления у стенки трубы до давления у ее оси. При этом совершается работа как против сил центробежного поля, так и работа на ускорение соседних частиц газа. Центробежная гипотеза Вебстера также не лишена противоречий. Например, согласно Вебстеру, прямоточная вихревая труба должна быть эффективнее противоточной, что не подтверждается результатами опытов.

Алексеев [213] считал, что под действием центробежных сил периферийные слои сжимаются и, следовательно, нагреваются, тогда как осевые слои расширяются и, поэтому, охлаждаются. Существенным допущением гипотезы Алексеева является адиабатное распределение температур газа по радиусу.

Гипотеза Демона Максвелла делает упор на передислокацию “быстрых” и “медленных” молекул [129, 130]. Полагается, что основой энергетического разделения во вращающемся газовом потоке является неравномерное распределение кинетической энергии между молекулами газа. В данных гипотезах вихревая труба играет роль демона Максвелла. Вращение газа создает градиент давления, направленный от оси к периферии. Поскольку молекулы

обладают различной кинетической энергией, то они обладают и различной возможностью проникновения в зону сжатого газа. Молекулы с большей кинетической энергией движутся к периферии (в зону повышенного давления), молекулы с меньшей кинетической энергией - к оси. Из гипотезы следует, что длина вихревой трубы не играет существенной роли в эффекте Ранка. Количественная оценка температурного разделения не приводится.

В гипотезе радиальных потоков Хилша-Фултона производится анализ потоков энергии в камере энергоразделения. Газовый поток, выходя из соплового ввода с высокой скоростью и пониженней термодинамической температурой, образует свободный вихрь, в центральной области которого имеются большие угловые скорости, а в периферийной области - малые. По мере движения вдоль трубы поток за счет сил трения перестраивается в вынужденный вихрь. В результате внутреннего трения происходит уменьшение угловых скоростей внутренних слоев и увеличение угловых скоростей внешних слоев. Это создает возможность перехода механической энергии от центра к периферии и выравнивает угловые скорости по всему сечению. В то же время, за счет более высоких значений термодинамической температуры у периферии вихря, по сравнению с центральной областью, возникает поток тепла, имеющий направление, противоположное потоку механической энергии. Тепловой поток по своей величине не в состоянии компенсировать потери кинетической энергии у слоев центральной области.

Основываясь на своей модели, Фултон [129, 214] получил теоретическое соотношение между возникающими потоками кинетической  $e$  и тепловой энергии  $q$  (2.7):

$$\frac{e}{q} = 2Pr_t \quad ; \quad Pr_t - \text{турбулентное число Прандтля} \quad (2.7)$$

В соответствии с данной зависимостью, температурное разделение отсутствует при  $Pr_t = 0.5$ . С другой стороны, турбулентное число Прандтля для возду-

ха лежит в диапазоне 0.7...0.9. Следовательно, гипотеза Фултона качественно подтверждает проявление эффекта Ранка-Хилша на воздухе. С другой стороны, она дает величину возможного охлаждения газа, которая в три раза меньше соответствующих измерений.

Авторы работ [215, 216] исследовали течение газа в вихревой трубе численно. Для анализа физических процессов, протекающих в камере энергоразделения, было предложено разделить проточную часть трубы на две области, обменивающиеся между собой энергией. Предполагалось, что в результате такого обмена одна из областей будет нагреваться, а вторая охлаждаться, что и будет характеризовать эффект Ранка-Хилша. Было выдвинуто предположение о наличии трех принципиально разных тепловых потоков между упомянутыми областями.

Акустическая гипотеза энергоразделения предполагает, что температурная стратификация вызвана действием “звукового ветра” [146, 148], который проявляется как громкий “свист” при работе вихревой трубы в различных режимах. Жидков и др. в своих работах [131, 132, 133, 134] экспериментально установили улучшение характеристик противоточной цилиндрической вихревой трубы после продолжительной промышленной эксплуатации. Авторы связывают данный феномен с возникновением дополнительных вибраций и шума, исходящих от втулки, расположенной со стороны горячего выхода. Курасака [217] исследовал воздействие акустического шума на эффект энергоразделения. Им было установлено, что частота звука, генерируемого вихревой трубой, зависит от скорости вращения газа в камере энергоразделения. Также, акустические характеристики вихревой трубы исследовались в работе [218].

Хинце одним из определяющих процессов передачи энергии внутри вихревой трубы считал турбулентность [12, 127, 130]. Им было введено в рассмотрение понятие жидкого моля, под которым понимается достаточно протяженная часть жидкого континуума, состоящая из когерентного конгломер-

рата жидких частиц. Размер жидкого моля сравним с интегральным масштабом турбулентного движения, причем его обмен с окружающей средой определяется влиянием мелкомасштабных турбулентных движений. В процессе перемещения в радиальном направлении, совпадающим с направлением градиента давления, турбулентные моли совершают так называемые микроХолодильные циклы. В рамках формализма Прандтля, Хинце предполагал, что каждый жидкий моль в процессе турбулентного движения представляет собой некоторую индивидуальность, сохраняющую свою субстанцию в течение некоторого характерного промежутка времени.

Ван Деемтер [127, 129, 219] впервые разработал аналитически строгую гипотезу турбулентного теплопереноса в вихревой трубе. Его рассуждения также опирались на формализм Прандтля, однако в дополнение к Хинце, им было получено уравнение радиального равновесия потоков кинетической и тепловой энергии, которое легло в основу гипотезы энергоразделения. Несколько позже, Дайслер и Перлмуттер [220] обозначили данный подход как “Модифицированная Теория Пути Смешения Прандтля” и распространили на любые закрученные течения сжимаемой жидкости. В современной литературе встречается использование Модифицированной Теории Прандтля [221] в качестве аргумента для объяснения физических основ эффекта Ранка-Хилша. Следует подчеркнуть, что аналитическая гипотеза энергоразделения Ван Деемтера позволила количественно верно оценить эффект температурного разделения в вихревой трубе.

Обобщение теории Ван Деемтера и Модифицированной Теории Пути Смешения Прандтля нашло выражение в гипотезе взаимодействия вихрей, сформулированной Меркуловым [125, 127, 210, 222, 223, 224]. В соответствии с данной гипотезой, энергия турбулентности в вихревой трубе используется для осуществления работы охлаждения вынужденного вихря. Кроме того, за счет радиальной составляющей пульсационной скорости элементарные турбулентные моли перемещаются по радиусу в поле высокого радиального градиен-

та статического давления, адиабатно сжимаются и расширяются, передавая тепло от зоны низкого в зону высокого статического давления. Высокая степень турбулентности обеспечивает энергомассоперенос, в процессе которого турбулентные моли, перемещаясь с одной радиальной позиции на другую, совершают микрохолодильные циклы. Схема микрохолодильного цикла приведена в работе [143] и показана на рис. 2.8.

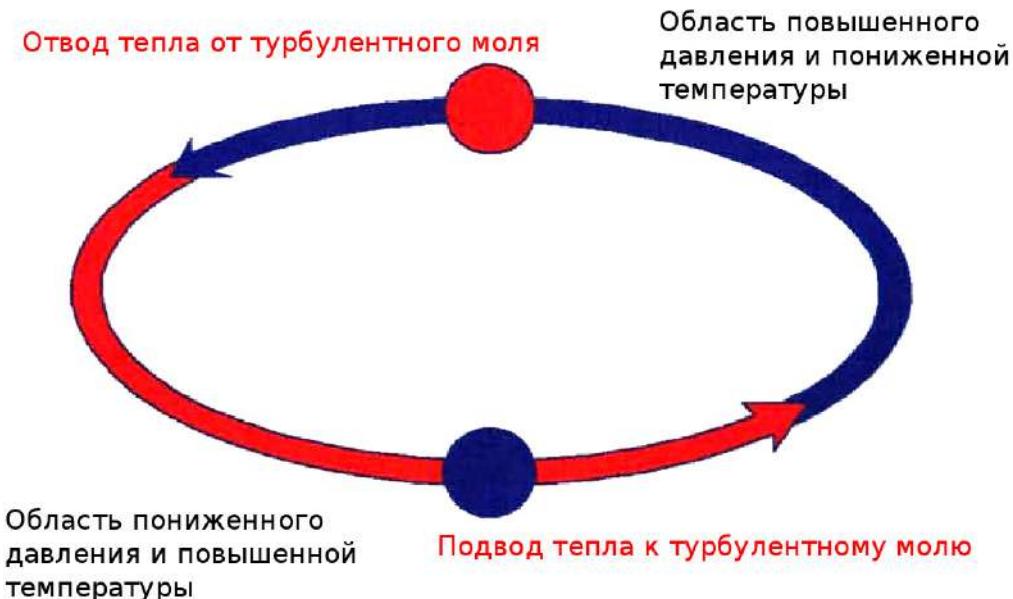


Рис. 2.8. Схема микрохолодильного цикла [143]

Гипотеза взаимодействия вихрей нашла свое развитие в работах Пиралишвили и его соавторов [222, 223, 224], а также в работах Целищева и его соавторов [142, 143, 144, 181, 182, 183, 184, 185, 186]. Несмотря на то, что дискуссии о физической природе эффекта Ранка-Хилша нельзя считать завершенными, на текущий момент времени можно заключить, что гипотеза взаимодействия вихрей является наиболее разработанной и апробированной. Она позволяет не только объяснить физические причины возникновения эффекта Ранка-Хилша, но и дать количественные оценки этого эффекта.

Гипотеза взаимодействия вихрей (теория Ван Деемтера или Модифицированная Теория Пути Смешения Прандтля) вплоть до недавнего времени представляла собой упрощенные теоретические разработки в рамках одно-

мерного или двумерного уравнения радиального переноса тепловой энергии. Это в значительной степени ограничивало применение этих разработок для оптимизации проточной части вихревой трубы и ее рабочих процессов, а также существенно ограничивало возможность проведения других численных расчетов для практических задач.

Одновременно с этим активно исследовалась возможность применения математических моделей на основе уравнений Навье-Стокса для расчета течения в вихревых трубах и прогноза эффекта Ранка-Хилша. Было проведено большое количество исследований полуэмпирических моделей турбулентности, включая стандартную модель  $k - \varepsilon$ ,  $RNG$ ,  $SST$ ,  $SAS - SST$ ,  $RSM$ ,  $LES$  и другие. В существенной части этих работ [225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235] было установлено, что все существующие численные модели показывают эффект температурного разделения, который более чем на **30%** отличается от лабораторных измерений. Таким образом, в некоторых случаях существующие модели турбулентности приводят к недопустимо большой ошибке в расчете эффекта Ранка-Хилша. Это позволило сделать вывод, что гипотеза взаимодействия вихрей (теория Ван Деемтера или Модифицированная Теория Пути Смешения Прандтля) не полностью учитывается в стандартных моделях турбулентности.

Очевидно, что дальнейшее усовершенствование вихревых труб Ранка-Хилша требует разработки модифицированных полуэмпирических моделей турбулентности, опирающихся на гипотезу взаимодействия вихрей. Данная глава диссертации посвящена этой работе, а ее основные результаты опубликованы в статьях [231, 232, 236], см. также [195].

### 2.3. Формулировка анизотропной модификации ВД модели турбулентности на основе гипотезы взаимодействия вихрей

Численная модель трансзвукового течения сжимаемого газа включает в себя уравнения Рейнольдса (1.11), неразрывности (1.12), сохранение энергии (1.14), а также уравнение состояния газа (1.17):

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho (V \cdot \nabla) V = \rho g - \nabla p + \nabla \cdot \left[ \mu \left( \nabla V + (\nabla V)^T - I \frac{2}{3} \nabla \cdot V \right) \right] + \nabla \cdot (\rho \Pi) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (2.9)$$

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho (V \cdot \nabla) E = q - (V \cdot \nabla) p + Q_\tau \quad (2.10)$$

$$p = \rho \mathfrak{R} T \quad (2.11)$$

В уравнениях  $E = e + |V|^2/2$  - полная внутренняя энергия газа;  $e = c_v T$  - внутренняя энергия газа;  $\mathfrak{R} = c_p - c_v$  - газовая постоянная. Диссипативная функция  $Q_\tau$  отражает нагрев газа вследствие потерь энергии (в т.ч., вследствие вязкого трения) и задается уравнением (1.15). Обычно вкладом  $Q_\tau$  пренебрегают.

Вклад турбулентности в закон сохранения импульса движения (2.8) определяется тензором рейнольдсовых напряжений  $\Pi$ , который определяется полуэмпирически с привлечением анизотропной модели турбулентности. Например, при помощи модели рейнольдсовых напряжений RSM-LRR (1.30)-(1.31). Аналогичным образом требуется эмпирически параметризовать конвективный теплоперенос в уравнении (2.10), который возникает в связи с хаотичным характером турбулентного течения. Для этого в уравнение вводятся полуэмпирические тепловые потоки, обозначенные как  $q$ . Их можно разделить на несколько групп в соответствии с таблицей 2.1.

Тепловые потоки  $q_\sigma$  и  $q_\lambda$ , обозначенные в таблице 2.1 номерами 1 и 2,

Таблица 2.1

Классификация тепловых потоков в уравнении сохранения энергии (2.10).

		Ламинарный вклад	Турбулентный вклад
1	Механическая работа газа	$q_{\sigma, lam}$ Механическая работа вязких напряжений	$q_{\sigma, turb}$ Механическая работа реинольдстовых напряжений
2	Теплопроводность	$q_{\lambda, lam}$ Теплопроводность газа	$q_{\lambda, turb}$ Конвективный теплообмен, параметризованный турбулентной теплопроводностью
3	Вклад сжимаемости газа ( <b>отсутствует в стандартных моделях турбулентности</b> )		$q_{\gamma}$ Поправка на сжимаемость в Модифицированной Теории Пути Смешения [219, 220, 221]

являются стандартными для всех существующих моделей турбулентности. В то же время, существование теплового потока  $q_{\gamma}$ , обозначенного номером 3, предписано гипотезой взаимодействия вихрей и впервые обсуждается в работе Ван Деемтера [219]. При этом,  $q_{\gamma}$  отсутствует во всех существующих моделях турбулентности. По всей видимости, это связано с пренебрежимо малым вкладом  $q_{\gamma}$  по сравнению с  $q_{\sigma}$  и  $q_{\lambda}$  для большинства типов течений. Однако в вихревой трубе  $q_{\gamma}$  играет решающую роль, как будет показано далее.

### 2.3.1. Ламинарные тепловые потоки $q_{\sigma, lam}$ и $q_{\lambda, lam}$

Рассматривается слоистое течение газа, при котором два соседних слоя, находящихся в непосредственном контакте, движутся с разными скоростями. В этом случае “быстрый” слой газа будет увлекать за собой “медленный” слой газа из-за наличия вязких напряжений  $\tau$  (1.8), действующих между слоями. При этом сам “быстрый” слой будет терять энергию и замедляться. С точки зрения термодинамики [50, 51, 52, 53], “быстрый” слой будет совершать работу

над “медленный” слоем, что приведет к соответствующему обмеру энергией, обозначаемому  $q_{\sigma, lam}$ .

Работа газа в единицу времени (мощность или тепловой поток) определяется произведением вязкого напряжения (силы), действующей на выделенную площадку, на мгновенную скорость газа в заданной координате. Таким образом, общий вклад всех напряжений действующих на все площадки элементарного контрольного объема запишется следующим образом:

$$q_{\sigma, lam} = \nabla \cdot (\tau \cdot V), \quad (2.12)$$

где тензор вязких напряжений  $\tau$  определяется выражением (1.8), т.е.

$$\tau = \mu \left( \nabla V + (\nabla V)^T - I \frac{2}{3} \nabla \cdot V \right) \quad (2.13)$$

Здесь  $\mu$  - коэффициент динамической вязкости, являющийся физическим свойством газа.

Теплопроводность газа задается законом Фурье:

$$q_{\lambda, lam} \sim \alpha \nabla^2 T,$$

где  $\alpha = \lambda / (\rho c_p)$  - коэффициент температуропроводности газа, а  $\lambda$  - коэффициент молекулярной теплопроводности газа. Домножив правую часть на плотность  $\rho$  и теплоемкость  $c_v$ , чтобы привести выражение в соответствие с уравнением (2.10), можно записать:

$$q_{\lambda, lam} = \frac{\lambda}{c_p} \nabla^2 e \quad (2.14)$$

Можно заметить, что величина коэффициента температуропроводности задается числом Прандтля:  $Pr = \mu / (\rho \alpha)$ . Отсюда можно получить выражение

для коэффициента молекулярной теплопроводности:

$$\lambda = c_p \frac{\mu}{Pr} \quad (2.15)$$

Следует подчеркнуть, что выражения (2.12) и (2.14) являются точными и аналитически строгими. Они были получены без привлечения каких-либо физических или математических упрощений. Однако данные тепловые потоки учитывают только молекулярные эффекты, которые обычно очень слабы в развитых турбулентных течениях. Согласно гипотезе взаимодействия вихрей, в вихревой трубе Ранка-Хилша доминируют турбулентные механизмы теплообмена  $q_{\sigma,turb}$  и  $q_{\lambda,turb}$ .

### 2.3.2. Турбулентные тепловые потоки $q_{\sigma,turb}$ и $q_{\lambda,turb}$

Выражение для механической работы рейнольдсовых напряжений можно сформулировать вернувшись к уравнению (2.12) заменяя в нем тензор вязких напряжений  $\tau$  на тензор напряжений Рейнольдса:

$$q_{\sigma,turb} = \nabla \cdot (\rho \Pi \cdot V) \quad (2.16)$$

Следует помнить, что тензор рейнольдсовых напряжений  $\Pi$  находится путем интегрирования уравнений полуэмпирической модели турбулентности (1.30)-(1.31). Таким образом, его значения не являются точными.

В соответствии со стандартной Теорией Пути Смешения Прандтля, конвективный теплообмен в турбулентном течении аппроксимируется так называемой турбулентной теплопроводностью. Экстраполируя уравнение (2.14) на случай турбулентного течения можно записать:

$$q_{\lambda,turb} = \nabla \cdot \left( \frac{\hat{\lambda}_t}{c_p} \nabla e \right) \quad (2.17)$$

Здесь  $\hat{\lambda}_t$  - турбулентная теплопроводность, которая является эмпирической характеристикой режима течения, а не теплофизическим свойством. Величина  $\hat{\lambda}_t$  варьируется как во времени, так и в пространства, и должна определяться полуэмпирической моделью турбулентности. Для анизотропной модели турбулентности,  $\hat{\lambda}_t$  представляет собой матрицу из девяти компонент:

$$\hat{\lambda}_t = \begin{pmatrix} \lambda_{t,11} & \lambda_{t,12} & \lambda_{t,13} \\ \lambda_{t,21} & \lambda_{t,22} & \lambda_{t,23} \\ \lambda_{t,31} & \lambda_{t,32} & \lambda_{t,33} \end{pmatrix}$$

До настоящего момента времени не найден способ эмпирической параметризации матрицы  $\hat{\lambda}_t$ . Однако можно предложить один из возможных вариантов, опирающихся на уравнение (1.32):

$$\underbrace{c_p \frac{\mu_t}{Pr_t}}_{\hat{\lambda}_t} \left( \nabla V + (\nabla V)^T - I \frac{2}{3} \nabla \cdot V \right) = \frac{c_p}{Pr_t} \Pi$$

Отсюда можно выразить:

$$\hat{\lambda}_t = \left( \nabla V + (\nabla V)^T - I \frac{2}{3} \nabla \cdot V \right)^{-1} \left( \frac{c_p}{Pr_t} \Pi \right) \quad (2.18)$$

Несмотря на то, что представленное выражение дает способ вычисления всех компонентов матрицы турбулентной теплопроводности, такой способ не нашел практического применения. Вместо этого производится изотропизация турбулентных конвективных тепловых потоков  $q_{\lambda,turb}$  даже в случае использования анизотропных RSM моделей турбулентности. Это приводит к появлению скалярной турбулентной теплопроводности  $\hat{\lambda}_t \rightarrow \lambda_t$ , величина которой определяется аналогично (2.15), но с применением турбулентного числа

Прандтля, которое обычно принимается в диапазоне  $Pr_t \in [0.7, 0.9]$ :

$$\lambda_t = c_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \quad (2.19)$$

Величина турбулентной вязкости  $\mu_t$  определяется связкой Прандтля-Колмогорова (1.36), а кинетическая энергия турбулентции  $k$  является следом тензора рейнольдсовых напряжений (1.23).

### 2.3.3. Поправка на сжимаемость газа Ван Деемтера $q_\gamma$ (ВД)

Стандартная Теория Пути Смешения Прандтля [32, 41, 42, 45, 61, 67] предполагает, что турбулентная жидккая частица, совершая хаотическое движение в потоке газа, переносит как момент движения, так и внутреннюю энергию газа. Иллюстрация данному процессу приведена на рис. 2.9, заимствованном из [32]. В рамках стандартного подхода, упомянутый перенос внутренней энергии аппроксимируется турбулентным тепловым потоком (2.17).

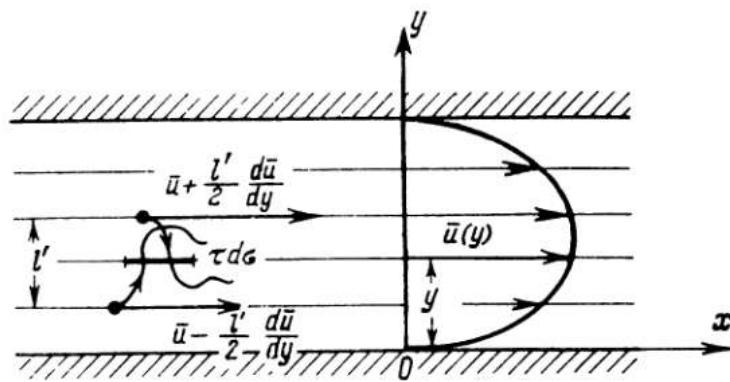


Рис. 2.9. Схема “молярного перемешивания” - турбулентного переноса количества движения и тепла жидкой частицей. Схема заимствована из книги Лойцянского [32]

В дополнение к стандартной теории Прандтля, гипотеза взаимодействия вихрей предполагает, что турбулентная жидккая частица переносится между слоями газа, имеющими в значительной степени разное давление [127, 129]. Большая разность давлений связана, прежде всего, с действием высокого центростремительного ускорения ( $\sim 10^7$  м/с<sup>2</sup>) в трансзвуковом вихревом потоке

газа. В таких условиях, турбулентная жидккая частица участвует не только в переносе момента движения и энергии, но и изменяет свое термодинамическое состояние. А именно, действие переменного внешнего давления приводит к сжатию или расширению жидкой частицы, а также к ее соответствующему нагреву или охлаждению.

После потери исходного турбулентного импульса жидкая частицы смешивается с окружающим ее газом. В том случае, если температура частицы в результате ее сжатия оказалась выше температуры окружающего ее газа, она нагревает его. В обратном процессе жидккая частица охлаждает окружающий газ. Последовательное перемещение турбулентной частицы между слоями высокого и низкого давления, а также сопровождающие это перемещение термодинамические процессы, принято называть “микрохолодильным циклом” [143], см. рис. 2.8.

Термодинамические процессы, связанные с “микрохолодильными циклами”, пренебрегаются в существующих стандартных моделях турбулентности. Это объясняется тем, что высокие градиенты давления, являющиеся отличительной чертой течения в вихревой трубе, обычно отсутствуют в других течениях газа. Для корректного учета “микрохолодильных циклов” предлагается ввести в уравнение энергии (2.10) дополнительный турбулентный тепловой поток, связанный со сжимаемостью газа, а именно  $q_\gamma$ .

В качестве исходной точки предположим, что сжатие и расширение турбулентной частицы происходит адиабатически, что соответствует допущениям гипотезы взаимодействия вихрей [127, 129, 219, 220, 221]. Тогда закон адиабаты для совершенного газа запишется:

$$\frac{T}{T_0} = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad (2.20)$$

где  $\gamma = c_p/c_v$  - показатель адиабаты. Допустим, что давление турбулентной частицы меняется на бесконечно малую величину  $dp$ , т.е.  $p = p_0 + dp$ . Тогда

уравнение преобразуется к следующему виду:

$$T = T_0 \left( \frac{p_0 + dp}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Разложение полученного выражения в ряд Тейлора в окрестности  $dp \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} T = T_0 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T_0}{p_0} dp - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2} \frac{T_0}{p_0^2} dp^2 + \frac{\gamma^2-1}{6\gamma^3} \frac{T_0}{p_0^3} dp^3 - \\ - \frac{(\gamma^2-1)(2\gamma+1)}{24\gamma^4} \frac{T_0}{p_0^4} dp^4 + \frac{(\gamma^2-1)(2\gamma+1)(3\gamma+1)}{120\gamma^5} \frac{T_0}{p_0^5} dp^5 + \mathcal{O}(dp^6) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Отбрасывание всех слагаемых третьей и более высокой степени, а также дифференцирование по радиальной координате  $r$ , приводит к:

$$\frac{dT}{dr} = \underbrace{\left( 1 - \frac{dp}{2\gamma p_0} \right)}_{c_\gamma} \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T_0}{p_0} \frac{dp}{dr} \quad (2.22)$$

Следует подчеркнуть, что коэффициент  $c_\gamma$  имеет аналитическое выражение согласно (2.22). Несмотря на это, возможно использование данного коэффициента в качестве калибровочного значения в модели турбулентности.

Выражение (2.22) было впервые получено Ван Деемтером [219] как основа Модифицированной Теории Пути Смешения Прандтля [220, 221]. Трехмерная форма данной зависимости будет выглядеть следующим образом:

$$(\nabla e)_\gamma = c_\gamma c_v \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T}{p} \nabla p \quad (2.23)$$

Подстановка уравнения адиабаты (2.23) в аппроксимацию Прандтля для конвективного теплового потока (2.17) дает окончательное выражение для искомого теплового потока  $q_\gamma$  (см. таблицу 2.1):

$$q_\gamma = c_\gamma \nabla \cdot \left( \lambda_t \frac{\gamma-1}{\gamma^2} \frac{T}{p} \nabla p \right) \quad (2.24)$$

Здесь  $\lambda_t$  - скалярная турбулентная теплопроводность, определяемая выражением (2.19).

Комбинация уравнений газодинамики (2.8)-(2.11), уравнений полуэмпирической модели турбулентности (1.30)-(1.31), а также выражений для всех тепловых потоков (2.12), (2.14), (2.16), (2.17) и (2.24) приводит к замкнутой модели течения газа в вихревой трубе с частичным учетом анизотропии турбулентности. В то время как стандартную форму данной модели принято обозначать **RSM-LRR** (Reynolds Stress Model - Launder, Reece, Rodi [56]), ее модификацию в рамках подхода Van Deemtera или гипотезы взаимодействия вихрей [127, 129, 219, 220, 221] можно обозначить как **RSM-LRR-VD**.

#### **2.4. Формулировка изотропной модификации ВД модели турбулентности на основе гипотезы взаимодействия вихрей**

Полуэмпирическая модель турбулентности **RSM-LRR-VD**, рассмотренная выше в разделе 2.3., относится к классу анизотропных моделей, поскольку дает решения для полного тензора реинольдсовых напряжений  $\Pi$ . Однако практика показала необходимость изотропизации турбулентных конвективных тепловых потоков  $q_{\lambda,turb}$  (2.17) путем замены матрицы турбулентной теплопроводности  $\hat{\lambda}_t$  скалярной величиной  $\lambda_t$ , задаваемой выражением (2.19). Аналогичная изотропизация также применяется в отношении теплового потока  $q_\gamma$ , см. выражение (2.24). Следует подчеркнуть, что данные тепловые потоки являются определяющими при описании эффекта Ранка-Хилша в вихревой трубе.

Исходя из отмеченного выше, изотропизация теплообменных процессов применительно к течению газа в вихревой трубе при одновременном учете анизотропии турбулентности в уравнении Рейнольдса выглядит нецелесообразно. Наиболее правильный путь в данном случае заключается в вычислении полной матрицы турбулентной теплопроводности, например, согласно

(2.18). Однако этот путь приводит к сложностям и, поэтому, не используется на практике. Другой подход заключается в изотропизации не только конвективных тепловых потоков, но и рейнольдсовых напряжений. Это дает резкое сокращение вычислительных затрат при допустимой потере точности. Незначительность снижения точности связана, прежде всего, с доминирующим вкладом турбулентных тепловых потоков в эффект Ранка-Хилша, в то время как вклад рейнольдсовых напряжений является вторичным.

Изотропизация рейнольдсовых напряжений заключается в допущении того, что не диагональные компоненты тензора  $\Pi$  не играют существенной роли, а кинетическая энергия турбулентции определяется только диагональными компонентами этого тензора, т.е.  $\pi_{1,1}$ ,  $\pi_{2,2}$  и  $\pi_{3,3}$ . Согласно (1.23), кинетическая энергия турбулентности запишется:

$$k = \frac{1}{2} (\pi_{1,1} + \pi_{2,2} + \pi_{3,3}) = \frac{1}{2} \text{tr}(\Pi) \quad (2.25)$$

В рамках того же подхода, использование упрощения в виде гипотезы Буссинеска устанавливает линейную связь между тензором рейнольдсовых напряжений  $\Pi$  и тензором скоростей деформаций  $\dot{S}$ , см. раздел 1.2.3.. Подстановка выражения (1.32) в (2.8) дает формулировку уравнения Рейнольдса для турбулентного течения газа, замкнутого эмпирической величиной турбулентной вязкости  $\mu_t$ . Скалярная величина турбулентной теплопроводности, как и в предыдущем случае, вычисляется при помощи линейной связки (2.19).

Вычисление величины  $\mu_t$  осуществляется с применением одной из изотропных моделей турбулентности, таких как  $k - \varepsilon$ ,  $k - \omega$ , SST, SAS-SST или др. Подробный анализ данных моделей приведен в разделе 1.2.3.. С учетом того, что турбулентность в вихревой трубе является развитой, а течение высокорейнольдсовым, в расчету обычно принимается  $k - \varepsilon$  модель турбулентности [149, 150, 228, 237], см. уравнения (1.38) и (1.39).

Газодинамические уравнения течения газа в вихревой трубе на основе изо-

тропной модели турбулентности  $k - \varepsilon$  запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) &= 0 \\ \rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho (V \cdot \nabla) V &= -\nabla p + \nabla \cdot \left[ (\mu + \mu_t) \left( \nabla V + (\nabla V)^T - I \frac{2}{3} \nabla \cdot V \right) \right] \\ \rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho (V \cdot \nabla) E &= \underbrace{\nabla \cdot \left[ (\mu + \mu_t) \left( \nabla V + (\nabla V)^T - I \frac{2}{3} \nabla \cdot V \right) \cdot V \right]}_{q_\sigma} + \\ &\quad + \underbrace{\nabla \cdot \left( \frac{\lambda + \lambda_t}{c_p} \nabla e \right)}_{q_\lambda} + \underbrace{c_\gamma \nabla \cdot \left( \lambda_t \frac{\gamma - 1}{\gamma^2} \frac{T}{p} \nabla p \right)}_{q_\gamma} - (V \cdot \nabla) p \\ p &= \rho \mathfrak{R} T \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho (V \cdot \nabla) k &= \mu_t \operatorname{dev} (\nabla V + (\nabla V)^T) : (\nabla V)^T + \\ &\quad + \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] - \rho \varepsilon - \frac{2}{3} \rho k (\nabla \cdot V) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho (V \cdot \nabla) \varepsilon &= C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \mu_t \operatorname{dev} (\nabla V + (\nabla V)^T) : (\nabla V)^T + \\ &\quad + \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} - \left( \frac{2}{3} C_{\varepsilon 1} - C_{\varepsilon 3} \right) \rho \varepsilon (\nabla \cdot V) \end{aligned}$$

$$\mu_t = \begin{cases} \frac{\mu \kappa y^+}{\ln(Ey^+)}, & \text{для пограничного слоя: } 30 \leq y^+ \leq 300 \\ C_\mu \rho \frac{y^+}{\varepsilon}, & \text{для всей остальной области: } y^+ > 300 \end{cases}$$

$$\lambda_t = c_p \frac{\mu_t}{Pr_t}; \quad y^+ = C_\mu^{\frac{1}{4}} \rho \frac{\sqrt{k}}{\mu} y$$

$$E = e + \frac{|V|^2}{2}; \quad e = c_v T; \quad \mathfrak{R} = c_p - c_v$$

Стандартные значения замыкающих эмпирических констант модели турбулентности (за исключением новой константы  $c_\gamma$ ) сведены в таблицу 1.2. Согласно разделу 1.2.3.,  $k - \varepsilon$  модель турбулентности не позволяет учесть особенности течения в пограничном слое. Поэтому, для этой области используется эмпирическая аппроксимация на основе теории турбулентного пограничного слоя - метод пристеночных функций. Как указано в системе уравнений (2.26),

метод пристеночных функций справедлив только в околостеночной области, характеризуемой диапазоном безразмерных координат  $30 \leq y^+ \leq 300$ , что требует учета при построении расчетных сеток для численного решения приведенных уравнений.

В том случае, если в системе уравнений (2.26) положить  $q_\gamma = 0$ , она сводится к модели течения газа на основе стандартной  $k - \varepsilon$  модели турбулентности, которую предлагается обозначить как  **$k - \varepsilon$ -std**. С другой стороны, учет вклада  $q_\gamma$  в уравнении сохранения энергии приводит к модели турбулентности, опирающейся на теорию Ван Деемтера (или Модифицированную Теорию Пути Смешения Прандтля) и учитывающей все положения гипотезы взаимодействия вихрей [127, 129, 219, 220, 221]. По аналогии с анизотропной моделью турбулентности **RSM-LRR-VD**, предложенную здесь версию изотропной модели турбулентности предлагается обозначить как  **$k - \varepsilon$ -VD**. Схема предложенных обозначений моделей турбулентности сведена в таблицу 2.2.

Таблица 2.2  
Схема обозначений моделей турбулентности.

	Анизотропная модель	Изотропная модель
Стандартная модель; без учета эффекта сжимаемости; $q_\gamma = 0$	RSM-LRR-std	$k - \varepsilon$ - std
Модифицированная ВД модель; с учетом эффекта сжимаемости; $q_\gamma \neq 0$	RSM-LRR-VD	$k - \varepsilon$ - VD

Следует подчеркнуть, что вклад Ван Деемтера  $q_\gamma \sim \nabla p$  напрямую зависит от величины градиентов давления, возникающих в камере энергоразделения вихревой трубы. При этом, в стандартной параметризации турбулентного конвективного теплового потока  $q_\lambda \sim \nabla T$  участвует только величина градиентов статической температуры. В этом заключается основное отличие

между стандартной и модифицированной моделями турбулентности. Также отметим, что новая эмпирическая постоянная  $c_\gamma$  в систему уравнений (2.26) позволяет сбалансировать вклады трех тепловых потоков:  $q_\sigma$ ,  $q_\lambda$  и  $q_\gamma$ .

Очевидно, что анизотропия турбулентности может играть существенную роль при развитии течения газа в вихревой трубе. Несмотря на это, допущение об изотропии является достаточно распространенным в полуэмпирических моделях турбулентности и может считаться хорошей отправной точкой для исследования вклада поправки Ван Деемтера  $q_\gamma$  в эффект энергоразделения Ранка-Хилша. Исходя из этого, в настоящей диссертации обсуждаются результаты исследования только изотропной  $k - \varepsilon - \text{VD}$  модели турбулентности. При этом, исследование эффектов анизотропии в рамках модели RSM-LRR-VD планируется провести в дальнейшем.

## 2.5. Численные методы

Для решения системы уравнений (2.26) было разработано множество численных методов [238, 239, 240, 241, 242, 243, 244]. Однако особое распространение получил Метод Конечных Объемов [245, 246, 247], в котором гарантируется выполнение законов сохранения массы, момента движения и энергии в потоке жидкости. В связи с этим свойством, данный метод относят к классу консервативных.

В последнее время нашли свое широкое применение коммерческие пакеты программ для гидро- и газодинамических расчетов. К таким пакетам можно отнести FlowVision [248, 249], ANSYS CFX, ANSYS Fluent [247, 250, 251, 252, 253, 254, 255], COMSOL, STAR-CCM+, PHOENICS, FLOW-3D и др. Поскольку в данных пакетах решается система уравнений движения жидкости аналогичная (2.26), они, как правило, основаны на той или иной разновидности Метода Конечных Объемов. Основное преимущество коммерческого программного обеспечения заключается в том, что оно позволяет ин-

женерам и исследователям абстрагироваться от технических проблем решения системы уравнений и сосредоточиться исключительно на физике течения жидкости [256, 257]. С другой стороны, коммерческие пакеты не позволяют изменять исходный код программы и, соответственно, заложенную в нее систему уравнений. Очевидно, что такие пакеты не позволяют добавить поправку на сжимаемость газа  $q_\gamma$  и, соответственно, провести исследования  $k - \varepsilon - VD$  модели турбулентности.

Научным сообществом активно разрабатываются несколько программных продуктов с открытым исходным кодом для численного решения системы уравнений (2.26), которые также основаны на Методе Конечных Объемов. К ним можно отнести OpenFOAM [258, 259, 260], VP2/3 [261, 262], SU2, Gerris, Basilisk, Fluidity, Nektar++. В отличие от коммерческих продуктов, данные исследовательские программы позволяют изменять исходный код, модифицировать систему уравнений и численные алгоритмы.

Исследования течения газа в вихревой трубе, представленные в настоящей диссертации, основаны на использовании как коммерческого пакета ANSYS CFX, так и модифицированной версии решателя rhoCentralFoam, входящего в состав OpenFOAM [263, 264]. При этом, ANSYS CFX используется для исследования стандартных моделей турбулентности, таких как RSM-LRR-std и  $k - \varepsilon - \text{std}$ . С другой стороны, исследование модифицированной модели турбулентности  $k - \varepsilon - VD$  проведено при помощи OpenFOAM.

### **Особенности реализации Метода Конечных Объемов**

Для поиска приближенного численного решения уравнений (2.26), расчетная область разбивается на конечное число небольших по размеру объемов – т.н. ячейки расчетной сетки. При этом точность решения непосредственно зависит от размера и количества ячеек, поэтому данный параметр требует особого внимания. Расчетные сетки можно разделить на две большие группы: структурированные и неструктурные сетки. В первом случае размер и расположение ячеек выбирается особым образом, чтобы минимизировать

неортогональность поля скорости по отношению к сетке [259, 260]. То есть, чтобы приблизить направление скорости в каждой точке расчетной области к направлению нормали к одной из граней соответствующей ячейки. Напротив, в неструктурированных сетках ячейки разбросаны случайным образом по расчетной области.

Алгоритмы построения расчетных сеток и точность численного решения на них является отдельным предметом научных исследований. Тем не менее, можно отметить, что неструктурированные сетки не подходят для расчета высокоскоростных течений сжимаемого газа. Таким образом, для расчета течения газа в вихревой трубе обычно применяют структурированные сетки, как показано в обзорных статьях [149, 150, 237].

Кроме того, ANSYS CFX и OpenFOAM имеют особенности реализации разбиения расчетной области на ячейки. В то время как ANSYS CFX использует расчетную сетку типа “cell-vertex”, в OpenFOAM заложены несколько упрощенные (с геометрической точки зрения) сетки типа “cell-centered”. В сетках типа “cell-centered” значения переменных хранятся в центре масс каждой из ячеек. В то же время, сетки типа “cell-vertex” хранят переменные в узлах, причем вокруг каждого из узлов строятся многогранные ячейки дополнительной сетки. Следует подчеркнуть, что именно дополнительная сетка используется для численного решения уравнений, а основная сетка является лишь основой для ее построения. Таким образом, указанные типы сеток отличаются между собой принципиальным образом, что схематично показано на рис. 2.10, см. также рис. 3.6 в [241].

Главный принцип Метода Конечных Объемов заключается в применении теоремы Гаусса-Остроградского [32] для вычисления конвективных членов каждого из уравнений (2.26). Например, интегрируя конвективное слагаемое в уравнении Рейнольдса по объему ячейки расчетной сетки можно записать:

$$\mathfrak{F} = \iiint_{\Omega} (V \cdot \nabla) V d\Omega = \iint_{\Gamma} V (V \cdot \vec{n}) d\Gamma, \quad (2.27)$$

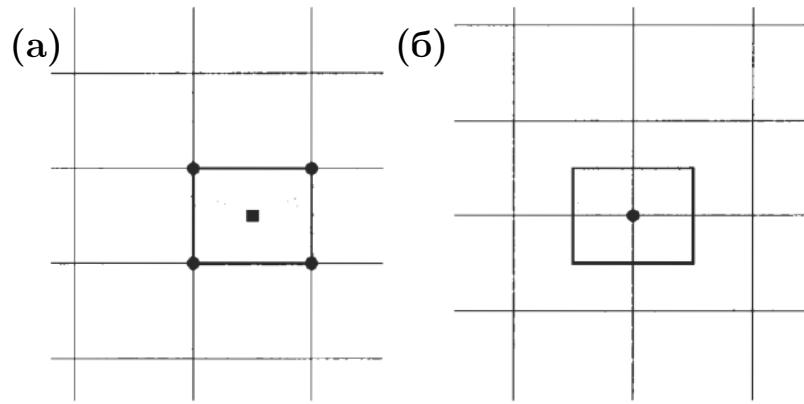


Рис. 2.10. Схематичное изображение конечных объемов типа (а) “cell-centered” и (б) “cell-vertex”. Схема заимствована из [241].

где  $\Omega$  - объем ячейки,  $\Gamma$  - площадь оболочки ячейки, а  $\vec{n}$  - вектор нормали к оболочке ячейки. С учетом того, что каждая из ячеек состоит из  $N$  граней, поверхностный интеграл можно разбить на несколько частей:

$$\mathfrak{F} = \sum_{j=1}^N \iint_{\Gamma_j} V_j (V_j \cdot \vec{n}_j) d\Gamma_j, \quad (2.28)$$

Для численных методов второго порядка точности можно заметить, что среднеинтегральное значение некоторой переменной по поверхности грани ячейки равно значению этой переменной в центре масс выделенной грани. Использование специальных методов интерполяции переменных между центрами масс ячеек и центрами масс граней данных ячеек позволяет упростить выражение (2.28):

$$\mathfrak{F} = \sum_{j=1}^N V_j \Phi_j, \quad (2.29)$$

где  $\Phi_j$  - объемный поток жидкости (газа) через поверхность грани  $j$ ,  $V_j$  - значение скорости течения в центре масс данной грани. Упрощенно можно отметить, что различные версии Метода Конечных Объемов, используемых как в ANSYS CFX, так и в OpenFOAM, отличаются между собой алгоритмами и схемами вычисления потоков  $\Phi$ . Более подробно Метод Конечных Объемов рассмотрен в книгах [239, 241, 242, 259, 260].

## Особенности численные методов

Одна из простейших численных схем нахождения потоков  $\Phi$  используется, например, в Методе Крупных Частиц [239], который по своей сути относится к разновидности Метода Конечных Объемов. Данная схема относится к типу “upwind” и рассматривает ячейку расчетной сетки в виде единой жидкой частицы. Решатель rhoCentralFoam, входящий в состав OpenFOAM и принятый за основу в настоящем исследовании, использует более сложную разновидность центрально-разностной схемы “central-upwind”, разработанную Кургановым и Тадмором [265]. В отличие от Метода Крупных Частиц, данная схема обеспечивают возможность распространения малых возмущений как по потоку, так и против него, что особенно важно при расчете трансзвуковых течений, в т.ч. в вихревой трубе.

Кроме того, rhoCentralFoam использует метод Эйлера первого порядка точности для дискретизации производных по времени, а также методы линейной интерполяции для нахождения величин в центрах масс граней ячеек. Величина шага интегрирования по времени связывается с размером ячеек (т.е. шагом по пространству) при помощи критерия Куранта-Фридрихса-Леви  $CFL$ . В рамках OpenFOAM существуют особенности вычисления данного критерия:

$$CFL = \Delta t \frac{\sum |\Phi|}{2\Omega}, \quad (2.30)$$

где  $\sum |\Phi|$  - сумма абсолютных величин объемных потоков через все грани выделенной ячейки. На каждом шаге интегрирования по времени проверяется рекомендуемое для rhoCentralFoam условие  $CFL \leq 0.2$ , исходя из чего корректируется временной шаг  $\Delta t$ .

Детали численные алгоритмы, заложенных в коммерческий пакет ANSYS CFX, не раскрываются. Однако можно отметить следующие особенности:

- Схема высокого порядка точности используется для дискретизации конвективных слагаемых. Однако при использовании LES модели турбу-

лентности применяется разновидность центрально-разностной схемы.

- Для интегрирования по времени используется метод Эйлера второго порядка точности.
- Интегрирование по времени происходит итерационно с использованием неявных схем. Итерации останавливаются при достижении точности  $10^{-6}$  для давления и  $10^{-4}$  для остальных переменных.
- Шаг интегрирования варьируется автоматическим образом в наперед заданном интервале:  $10^{-7}$  с  $\leq \Delta t \leq 10^{-5}$  с для течения в вихревой трубе. Уменьшение  $\Delta t$  происходит в том случае, если количество итераций, отмеченных в пункте выше, превышает 10. Соответственно,  $\Delta t$  уменьшается если количество итераций падает ниже 2.

## Особенности граничных условий в OpenFOAM

Стандартная версия решателя rhoCentralFoam не содержит некоторых типов граничных условий, которые критически важны для расчета течения газа в вихревой трубе. Исходя из этого, исходный код решателя был дополнен недостающими граничными условиями. Так, граничное условие по массовому расходу  $G_{bc}$ , протекающему через границу  $bc$  было преобразовано к граничному условию по скорости газа:

$$V_{bc} = \frac{G_{bc}}{\iint_{\Gamma} \rho d\Gamma}, \quad (2.31)$$

где  $\Gamma$  - площадь поверхности границы  $bc$ , а  $V_{bc}$  - скорость газа на границе, заданная в нормальном к ней направлении.

На входной границе в сопловой аппарат вихревой трубы, а также на выходе холодного потока (см. рис. 2.1), требуется задать граничное условие по давлению торможения газа. Для этого давление торможения газа пересчитывается в статическое давление используя следующее выражение:

$$p_{bc} = p_{bc}^* - \frac{1}{2} \frac{\iint_{\Gamma,bc} \rho |V|^2 d\Gamma}{\iint_{\Gamma,bc} d\Gamma}, \quad (2.32)$$

где  $p_{bc}^*$  - требуемое давление торможения газа на границе  $bc$ , а  $p_{bc}$  - соответствующее ему статическое давление. Также требуется удостовериться в том, что скорость газа на входе в сопловой аппарат не будет превышать звуковой барьер непосредственно на границе  $bc$ . Для этого требуется использовать граничное условие по скорости следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_{bc} = 0, & \text{если } V_{bc} \leq a \\ V_{bc} = a, & \text{если } V_{bc} > a \end{cases} \quad (2.33)$$

где  $a = \sqrt{\gamma \mathfrak{R} T}$  - локальная скорость звука;  $V_{bc}$  - скорость газа, направленная нормально к входной границе соплового аппарата  $bc$  и полученная используя условие нулевого градиента  $\frac{\partial V}{\partial n} \Big|_{bc} = 0$ .

Граничное условие по температуре торможения устанавливается аналогично (2.32):

$$T_{bc} = T_{bc}^* - \frac{1}{2c_p} \frac{\iint_{\Gamma, bc} |V|^2 d\Gamma}{\iint_{\Gamma, bc} d\Gamma}, \quad (2.34)$$

где  $T_{bc}^*$  - требуемая температура торможение на границе  $bc$ , а  $T_{bc}$  - соответствующая ей статическая температура.

### **Начальные условия и квазистационарное течение**

Во всех расчетах течения газа в вихревой трубе, как в ANSYS CFX, так и в OpenFOAM, в начальный момент времени полагалось, что течение газа в проточной части отсутствует ( $V = 0$ ), а давление и температура газа соответствуют атмосферным, т.е.  $p = 100$  кПа,  $T = 300$  К. После начала расчета возникает нестационарное течение быстро меняющееся в времени. Спустя определенное время, осредненные параметры течения перестают меняться во времени, а само течение достигает квазистационарного режима. Кроме того, во времени перестают изменяться и интегральные характеристики вихревой трубы, такие как изоэнтропный КПД (2.5), холодильный КПД (2.6), доля холодного потока (2.3) и доля горячего потока (2.4). Только после достижения

постоянства во времени этих параметров расчет останавливался и производилась обработка полученных результатов.

## 2.6. Выводы по главе

1. В вихревых трубах используется эффект Ранка-Хилша для разделения входного сжатого газа на холодный и горячий потоки. Вихревые трубы имеют ряд положительных качеств по сравнению с более конвенциональными устройствами охлаждения или нагрева, такими как парокомпрессионные машины, детандеры и др. К основным преимуществам вихревых труб можно отнести: (а) отсутствие хладагентов и теплоносителей, а следовательно и повышенная экологическая безопасность; (б) простота конструкции, а также дешевизна изготовления и эксплуатации; (в) высокая надежность в связи с отсутствием подвижных частей; (г) малая инерционность тепловых процессов.
2. Эффект Ранка-Хилша и вихревые трубы являются предметом активных исследований на протяжении почти 100 лет, которые, прежде всего, направлены на повышение энергетической эффективности. Результатом таких исследования стала конструкция вихревой трубы, позволяющая получить холодильный КПД (2.6) на уровне  $\eta_c \approx 0.20 - 0.22$  в зависимости от типа трубы. Столь низкий показатель энергоэффективности является основным ограничивающим фактором широкого промышленного применения вихревых труб.
3. Можно предположить, что основная причина сложности дальнейшего усовершенствования конструкции вихревых труб состоит в отсутствии полного понимания физических процессов, лежащих в основе эффекта Ранка-Хилша. Вплоть до настоящего времени эффект Ранка-Хилша остается загадкой и является предметом дискуссий. Возможные физические объяснения эффекта ранжируются от “умозрительных” (схема-

тичных) представлений до математически строгих теорий, дающих числовые оценки.

4. Наиболее точное объяснение эффекта Ранка-Хилша носит название “гипотезы взаимодействия вихрей” и было сформулировано Меркуловым [125, 127, 222, 223, 224]. В основе данной гипотезы лежит предположение о существовании т.н. “микрохолодильных циклов”, схематично показанных на рис. 2.8 [143]. В соответствии с данной гипотезой, высокая степень турбулизации течения газа в вихревой трубе приводит к активному тепло- и массообмену между центральным свободным и внешним вынужденным вихрем. Работа, совершенная одним вихрем над другим, а также конвективные потоки тепловой энергии, приводят к наблюдаемой температурной стратификации.
5. Математическое выражение “гипотезы взаимодействия вихрей” нашло в так называемой Модифицированной Теории Пути Смешения Прандтля [220, 221], частью которой является поправка Ван Деемтера [219] на сжимаемость газа. Проведенный анализ показал [195, 231, 232, 236], что поправка Ван Деемтера (Модифицированная Теория Пути Смешения Прандтля) не учтена ни в одной из существующих моделей турбулентности. То есть, другими словами, “гипотеза взаимодействия вихрей” не полностью отражена в современных моделях турбулентного течения газа. Можно предположить, что именно это может приводить к ошибке при моделировании эффекта температурного разделения Ранка-Хилша в современных гидрогазодинамических пакетах. В некоторых работах эффект температурного разделения, полученный в численной модели, отличался от лабораторных измерений более чем на 30% [225, 226, 227, 228, 230, 231, 232, 233, 234, 235].
6. В настоящей главе диссертации рассмотрена формулировка стандартной анизотропной модели турбулентности рейнольдсовых напряжений RSM-LRR-std, а также стандартной изотропной модели турбулентно-

сти  $k$ - $\varepsilon$ -std. Данные модели были дополнены поправкой Ван Деемтера на сжимаемость газа для более полного отражения физических принципов, заложенных в “гипотезу взаимодействия вихрей”. Модифицированные версии анизотропной и изотропной моделей турбулентности были обозначены как RSM-LRR-VD и  $k$ - $\varepsilon$ -VD, см. таблицу 2.2.

7. Дальнейшая работа состоит из нескольких этапов. Прежде всего, в главе 4 проводится детальное исследование предложенных модифицированных моделей турбулентности. В результате данных исследований необходимо определить величину введенной эмпирической константы  $c_\gamma$  через калибровку модели турбулентности по отношению к лабораторным измерениям. Далее, в главе 5 откалиброванная модель турбулентности применяется для внесения усовершенствований в конструкцию вихревой трубы и ее элементов с целью усиления эффекта Ранка-Хилша и, соответственно, повышения энергоэффективности вихревой трубы.

# ГЛАВА 3

## РАЗРАБОТКА МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В ГИДРОВОЛНОВОМ ЛОТКЕ С ВОЛНОПРОДУКТОРОМ

### **3.1. Нелинейные поверхностные волны**

Океан покрывает порядка 70% поверхности Земли. Столь значительный резервуар массы воды и, соответственно, тепловой энергии является неотъемлемым элементом планетарного теплового баланса. Океан определяет влажность, влияет на атмосферные течения, определяет биохимический баланс атмосферы [266]. Океан является одним из наиболее существенных хранилищ углекислоты и других парниковых газов, освобождение которых драматическим образом скажется на экологии и климате [267]. Более того, водяной пар сам по себе является одним из наиболее распространенных парниковых газов.

Клаус Хассельман показал, что климат Земли не является детерминированным строго определенным набором факторов, таких как солнечное излучение или концентрация углекислого газа в атмосфере. Напротив, климат является фундаментально случайной системой, включающей в себя быстрые изменения погоды и медленную реакцию “интеграторов” (накопителей), таких как океан, толща земной поверхности, ледяной покров и др. [267, 268, 269, 270]. Климат естественным образом стремится со временем стать менее предсказуемым, особенно на больших временных масштабах. Остановить изменение климата невозможно простым уменьшением выбросов парниковых газов. Требуется найти способы усиления влияния “интеграторов” (включая океан), смягчающих переменчивость климата. Этот вызов можно считать одним наиболее важных в ближайшем будущем.

### 3.1.1. Роль поверхностных волн в формировании климата

Особую роль в планетарном балансе тепловой энергии играют первые 10 метров толщи воды, которые принято называть слоем смешения (по аналогии с пограничным слоем атмосферы). Совокупная масса воды, сосредоточенная в слое смешения океана, равна массе всего атмосферного воздуха [109, 271]. С учетом того, что теплоемкость воды примерно в четыре раза выше теплоемкости воздуха, верхний слой океана накапливает примерно в четыре раза больше тепловой энергии по сравнению со всей атмосферой. С другой стороны, согласно последним исследованиям [272, 273], поверхностные волны играют определяющую роль в тепло- и массообменных процессах в слое смешения океана и пограничном слое атмосферы. Из этого следует важное значение морских волн при определении погоды и климата [102, 109, 274, 275].



Рис. 3.1. Фотография момента обрушения волны [276]

Процесс образования, эволюции и диссипации поверхностных морских волн до конца не изучен, однако его схематичное описание не вызывает разногласий. Предполагается отсутствие волн в начальный момент времени. В таком случае, течение воздуха в пограничном слое атмосферы (ветер) вызывает неустойчивость поверхности раздела фаз (свободной поверхности). Далее происходит экспоненциальный рост изначально бесконечно малых возмущений и формирование линейных поверхностных волн малой высоты [277, 278]. По мере увеличения высоты волн, возникают эффекты отрыва течения воздуха от гребня волны. В таком режиме распределение давления по свободной поверхности играет основную роль в процессе дальнейшего роста высоты волн [279, 280, 281]. В некоторый момент времени

волны [276]

энергия волны, определяемая ее высотой, достигает предельного значения, после которого волна не в состоянии удерживать свою форму. Происходит опрокидывание верхней части гребня, называемое обрушением волны, пример которого показан на рис. 3.1.

Обрушение волны кардинальным образом меняет состояние системы. Прежде всего, происходит захват пузырей воздуха в толщу воды и выброс жидкой фазы в атмосферу в виде мелкодисперсных капель (спрея), то есть, происходит перемешивание жидкой и газообразной фаз [100, 101, 282]. Также обрушение волны порождает вихревые и сдвиговые течения, что, в свою очередь, турбулизирует слой смешения океана. Все упомянутые процессы скачкообразно усиливают тепло- и массообмен между океаном и атмосферой [102, 274, 275, 283], увеличивая роль океана в общепланетарном балансе и, как следствие, в климате.

Строительство в океане крупномасштабных ветроэлектростанций (ветряных ферм), искусственных плавучих островов, платформ, газовых хранилищ и других сооружений может оказать влияние на высоту морских волн и интенсивность их обрушения [284, 285, 286, 287]. Это, в свою очередь, может как интенсифицировать, так

и погасить тепло- и массообмен, вызывая отрицательное влияние на климат и биохимический баланс атмосферы и океана [266, 267]. В качестве примера, на рис. 3.2, заимствованном из [284], красным цветом показана область “затенения” поверхностных волн, вызванного влиянием ветроэлектростанции.

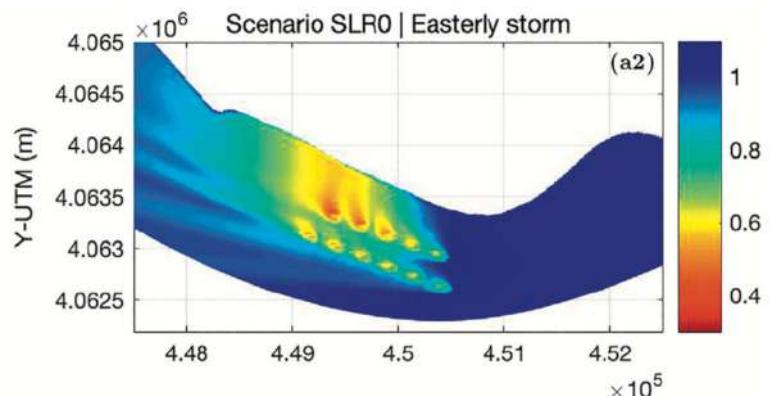


Рис. 3.2. Вид сверху на область залива в месте размещения ветроэлектростанции (ветряной фермы). Красный цвет показывает уменьшение характерной высоты волны вследствие влияния ветрогенераторов.

Изображение заимствовано из исследования [284].

В настоящее время, описанные явления слабо изучены. Требуется внимательно подойти к отмеченным вопросам при строительстве крупных промышленных объектов в открытом море и прибрежной зоне.

### 3.1.2. Морское и прибрежное строительство

Кроме фундаментальных проблем, океан представляет опасность для промышленной и хозяйственной деятельности человека. В океане добываются важные продукты питания, минеральные и ископаемые ресурсы. Примерно 90% товаров перевозится морским транспортом, соединяющим географически отдаленные страны и регионы. Мощные штормы и ураганы представляют угрозу кораблям, морским платформам, прибрежным инженерным сооружениям, береговым линиям и другим природным и техническим объектам. Часто штормы и ураганы вызывают наводнения, унося с собой здания, урожай и жизни людей.

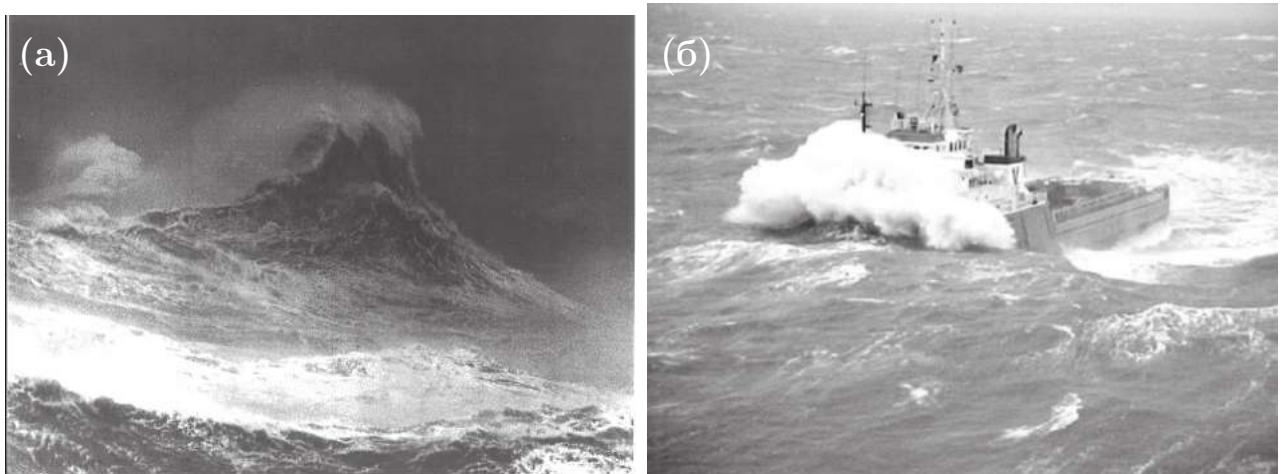


Рис. 3.3. (а) Фотография “пирамидальной” волны-убийцы, сделанная у берегов Японии; (б) встреча корабля с высокой волной в Таганрогском заливе. Фотографии заимствованы из книги [288].

В настоящее время значительные усилия направлены на изучение так называемых волн-убийц (“rogue wave” или “freak wave”), которые представляют собой особенно высокие волны, возникающие совершенно неожиданно. В литературе зафиксированы множественные упоминания капитанов кораблей о

наблюдении огромных волн высотой до 30 метров [288], а позже появились измерения подобных волн [289]. Непредсказуемость появления волн-убийц делает их опасными как для кораблей, так и для морских сооружений [290, 291]. Более того, причины возникновения таких волн до сих пор остаются предметом дискуссий, а соответствующая теория не разработана [288, 292, 293]. Фотография чрезвычайно высокой волны-убийцы представлена на рис. 3.3(а), а момент встречи корабля с волной показан на рис. 3.3(б).

Кроме экстремально высоких силовых нагрузок, воздействие высоких волн может вызывать большие смещения морских судов, в особенности транспортирующих жидкости (танкеры, газовозы). Расплёскивание жидкостей в резервуарах несет дополнительный риск безопасности судна [290, 291, 294].

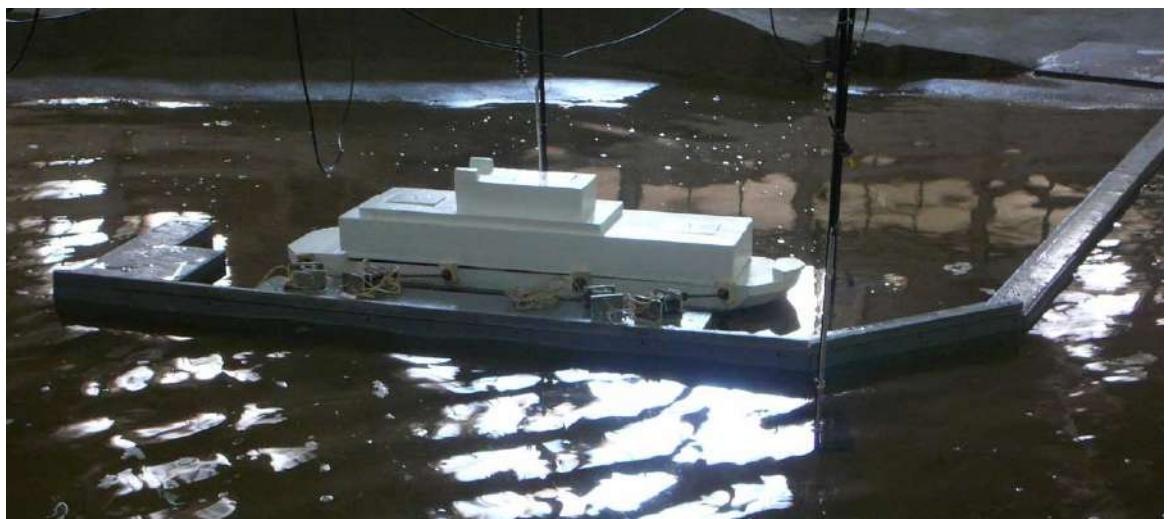


Рис. 3.4. Лабораторные исследования по воздействию волн цунами на модель плавучего энергоблока, выполненную в масштабе 1:100. Фотография заимствована из статьи [295].

Воздействие высоких волн на сооружения береговой защиты могут вызвать их повреждения и даже разрушение. Также высокие волны несут риск наводнений в случае нарушения элементов береговой защиты [296]. Рис. 3.4 [295] показывает момент лабораторных испытаний защитного сооружения от набегающих волн.

Для решения обсужденных прикладных и фундаментальных проблем в настоящее время проводятся лабораторные, численные и теоретические ис-

следования как в России [247, 251, 252], так и по всему миру. Актуальность исследований механики нелинейных обрушающихся волн усиливается по мере ускорения темпов освоения морей и океанов, а также застраивания береговых линий.

### **3.1.3. Лабораторные и численные исследования поверхностных волн**

Испытания и исследования прибрежных и морских сооружений, судов, плавучих платформ и других инженерно-технических объектов на предмет воздействия морских волн проводят в специальных гидроволновых лотках и бассейнах широко распространенных в России и за рубежом. Для проведения экспериментального исследования в подобных установках требуется использование уменьшенной физической модели изучаемого сооружения. Для выдерживания гидродинамических режимов масштабирование производят с использованием теории подобия. Можно перечислить ряд научных, исследовательских и проектных организаций России, в которых используются гидроволновые лаборатории различных размеров [295, 297, 298, 299, 300]:

- Крыловский государственный научный центр;
- Санкт-Петербургский государственный морской технический университет;
- Арктический и антарктический научно-исследовательский институт;
- 26 Центральный научно-исследовательский институт;
- Институт прикладной физики (Нижний Новгород);
- другие организации.

На рис. 3.5 показан общий вид экспериментального бассейна в Крыловском государственном научном центре.

Необходимость лабораторных испытаний вызвана отсутствием точных инженерных методов и расчетных формул для вычисления гидродинамики поверхностных волн и механики их взаимодействия с инженерными объектами

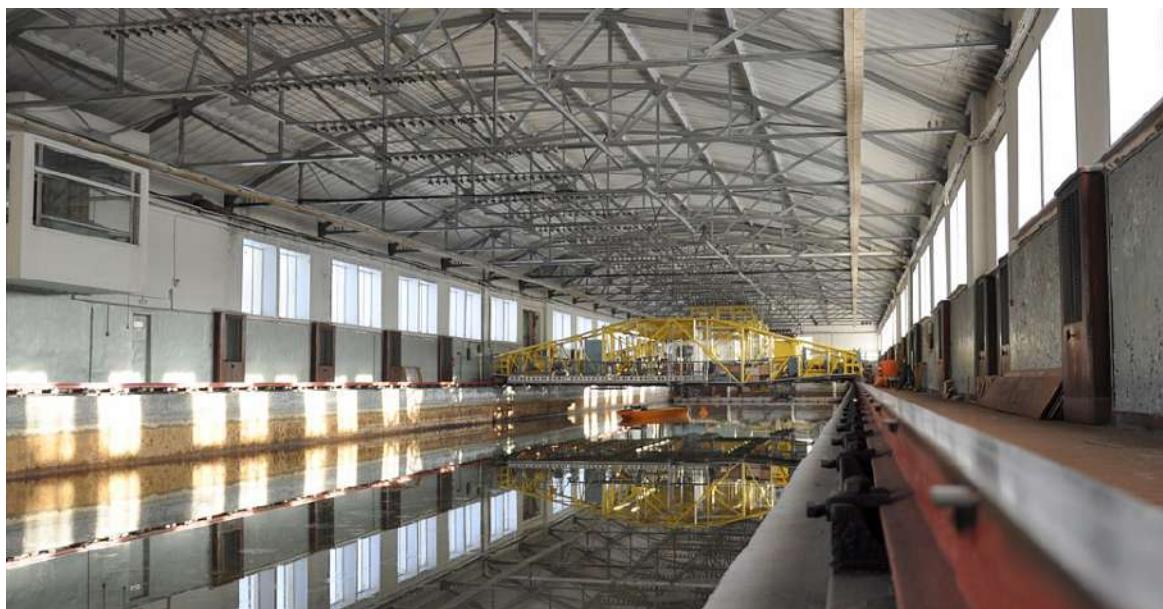


Рис. 3.5. Мелководный бассейн Крыловского государственного научного центра. Бассейн оборудован буксировочной тележкой и волнопродуктором, обеспечивающим волнение с длиной волны 1...10 м и высотой волны 20...35 см. Фотография заимствована с официального веб-сайта центра: <https://krylov-centre.ru/experimental/basin-river>

[301]. Также в качестве целей экспериментальных исследований можно выделить следующие:

1. определение силового воздействия набегающих поверхностных волн на погруженное в воду тело;
2. определение значений интересующих параметров взаимодействия волн с сооружениями при наихудшей возможной волновой ситуации вблизи конструкции при заданных параметрах волнения на удалении (в открытом море);
3. проверка предсказаний теории поверхностных волн при инженерном сопровождении проектирования гидротехнических сооружений и конструкций;
4. объяснение явлений, значимо сказывающихся на эксплуатацию гидротехнических сооружений.

Вместе с тем, ряд исследователей указывают на значительные сложности, возникающие при физическом моделировании в гидроволновых лабораториях [295, 299, 301]. Прежде всего, проведение экспериментальных исследо-

ваний чрезвычайно трудозатратно и требует значительных финансовых инвестиций. Этим объясняется невозможность выполнения оптимизационных экспериментальных исследований, требующих рассмотрения сотен или даже тысяч возможных проектных решений и условий волнения. Также в большинстве случаев отсутствует возможность масштабирования задачи на основании выдерживания всех требуемых критериев подобия, таких как число Струхала  $St$ , Фруда  $Fr$ , Эйлера  $Eu$ , Рейнольдса  $Re$ , Вебера  $We$ . Как правило, выдерживается число Фруда  $Fr = V/\sqrt{gL}$  и, по возможности, Рейнольдса  $Re = VL/\nu$ .

Исходя из этого, в настоящее время значительные усилия направлены на создание “численной гидроволновой лаборатории” [301, 302, 303, 304, 247, 251, 252], использование которой на предварительных этапах значительно расширяет возможности исследователей и инженеров. Использование методов компьютерного моделирования удешевляет исследования и, в то же время, не требует масштабирования задачи. То есть, проблема взаимодействия набегающих волн с инженерным сооружением может рассматриваться в масштабе 1:1. В то же время, численная гидроволновая лаборатория должна включать в себя все элементы физического лабораторного лотка или бассейна, чтобы обеспечить возможность экспериментальной верификации результатов расчетов.

Схема типичного лабораторного гидроволнового лотка показана на рис. 3.6. Он состоит из емкости, заполненной водой (сам лоток), с одной стороны которой расположен гидравлический агрегат, предназначенный для генерации поверхностных волн заданной формы - так называемый, волнопродуктор. Далее волна, сгенерированная волнопродуктором, распространяется вниз по лотку и достигает тестового объекта, на котором и вблизи которого располагается измерительное оборудование. В конце лотка требуется установка активных или пассивных гасителей волн, предотвращающих “загрязнение” тестовой области отраженными волнами.

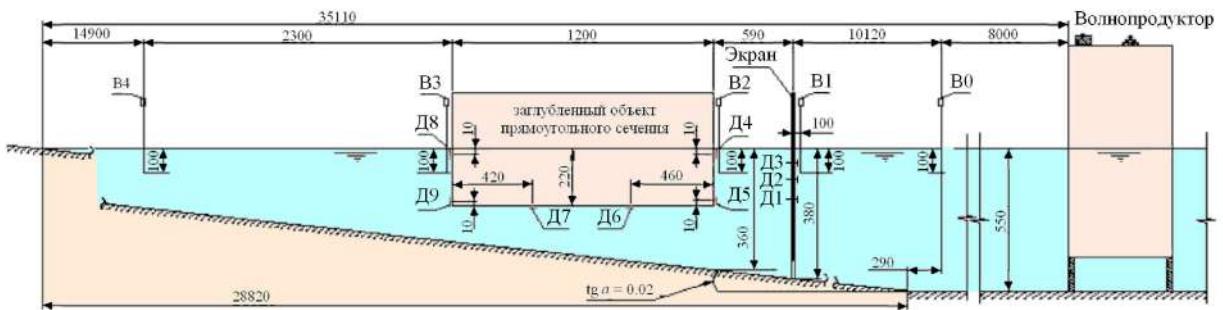


Рис. 3.6. Схема лабораторного гидроволнового лотка и размещение измерительных устройств. Задокументировано из статьи [299].

Правильное математическое описание физических процессов, происходящих в лабораторном волновом лотке, требует применения иерархии математических моделей [301], описывающих гидродинамику бегущих поверхностных волн на разных масштабах с разной точностью. В подобной иерархии должны встречаться модели двухфазной среды с поверхностью раздела (воздух-вода) на основе уравнений Навье-Стокса, нелинейные модели квазипотенциального течения и другие приближения [301].

Особенно остро стоит задача высокоточной генерации требуемой формы поверхностной волны при помощи программно-управляемого волнопродуктора поршневого или шарнирно закрепленного типа, см. рис. 3.7. Нелинейности уравнений (1.53)–(1.56) делают невозможным точное решение данной задачи. Несмотря на большие усилия российских и зарубежных исследователей [300, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312], высокоточная генерация нелинейной крутой волны остается практически недостижимой вплоть до настоящего времени.

Требуется разработка усовершенствованного алгоритма автоматизированного управления механическим, пневматическим или гидравлическим приводом волнопродуктора (рис. 3.7) с целью повышения точности генерации поверхностных волновых пакетов сложной формы. Новый алгоритм управления волнопродуктором должен быть частью численной модели гидровол-

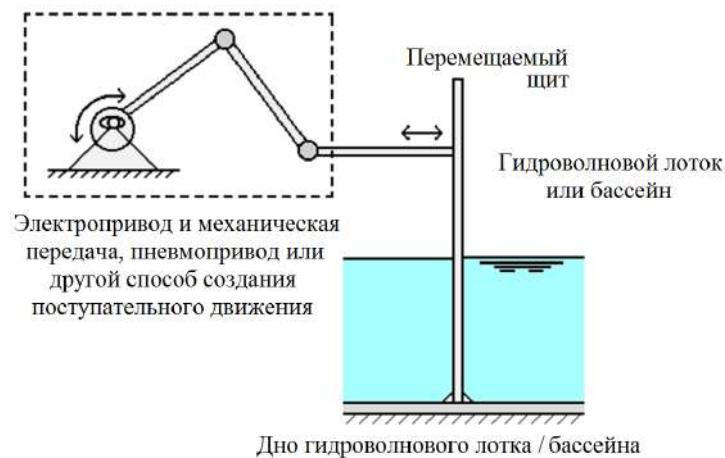


Рис. 3.7. Принципиальная схема волнопродуктора поршневого типа, заимствованная из статьи [301].

нового лотка, а также входить в состав системы управления физическим лабораторным лотком.

Работа над обсуждаемой проблемой должна состоять из нескольких этапов. На первом этапе (глава 6) требуется разработать численный гидроволновой лоток, состоящий из иерархии моделей и включающий в себя, в том числе, модель турбулентной вязкости для обрушающихся волн. Гидроволновой лоток будет использован на следующем этапе исследования для создания нового алгоритма автоматизированного управления волнопродуктором (глава 7). Завершающий этап исследования должен включать в себя детальные численные и экспериментальные исследования точности нового алгоритма управления волнопродуктором (глава 8).

### 3.2. Разработка сопряженной численной модели гидроволнового лотка

Сложность численного моделирования процесса распространения поверхностных волн и их взаимодействия с погруженными сооружениями заключается, прежде всего, в чрезвычайно широком масштабе возникающих течений. При обрушении волны в непосредственной близости от сооружения возникает

захват воздуха в толщу воды [100, 101, 282]. Пузыри воздуха, имеющие размер в диапазоне от 1 мкм до 10 мм, играют существенную роль при определении силовых нагрузок. С другой стороны, характерная длина поверхностных волн в океане составляет порядка 10 метров. Тепло- и массообменные процессы между океаном и атмосферой характеризуются масштабом в сотни километров. Как уже отмечалось выше, в таких условиях требуется использовать иерархию численных моделей [301], пренебрегая некоторыми явлениями как на большом, так и на малом масштабе.

Принципиальная схема сопряженной численной модели, используемой в настоящей диссертации, показана на рис. 3.8. В основе модели лежит однофазная квазипотенциальная модель нелинейных обрушающихся волн, позволяющая учесть эволюцию волнового пакета на пробеге в несколько десятков длин волн (длина расчетной области). В левой части домена расположена волнопродуктор поршневого типа или шарнирно закрепленный, как показано на рисунке. Правая часть домена заканчивается областью гашения волн для исключения их отражения от твердой стенки. На расстоянии  $L_i$  от волнопродуктора, которое может составлять несколько десятков длин волн, производится сопряжение базовой модели с более сложной двухфазной моделью с поверхностью раздела, в которой решаются уравнения Навье-Стокса. Процесс сопряжения происходит посредством специальным образом выбранных граничных условий по скорости жидкости.

Двухфазная модель является чрезвычайно затратной с вычислительной точки зрения. Поэтому, она накрывает небольшую пространственную область длиной 2...3 длины волны. Численный гидроволновой лоток построен таким образом, чтобы иметь возможность сравнения формы волны и течения жидкости, получаемых в однофазной и двухфазной аппроксимациях. Это будет важно на более поздних этапах исследования. Также следует отметить возможность размещения погруженных в воду сооружений любой формы в рамках двухфазной модели.

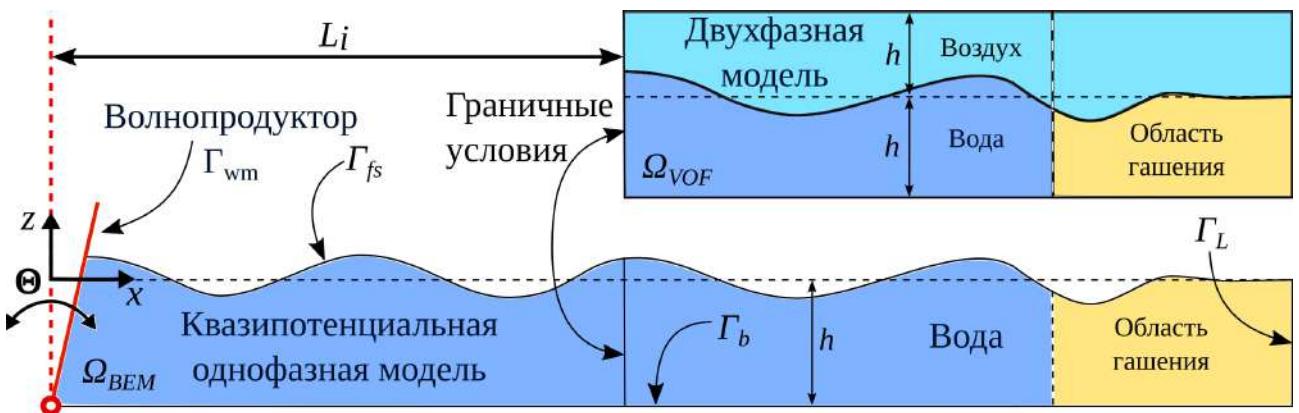


Рис. 3.8. Схема численной модели гидроволнового лотка: однофазная квазипотенциальная модель сопряжена с двухфазной моделью вода-воздух. Длина  $L_i$  может достигать нескольких десятков характерных длин волн;  $h$  - глубина гидроволнового лотка при отсутствии волнения.

### 3.2.1. Модель двухфазного течения с поверхностью раздела

В некоторых сценариях волнового воздействия набегающей волны на погруженное в воду сооружение, значительную роль играет сжимаемость пузырей воздуха, захваченных при обрушении поверхностной волны. Ряд исследователей показали [313, 314, 315], что при воздействии фронта волны на поверхность сооружения, возникает резкое расширение сжатых пузырей воздуха, сопровождающееся высвобождением соответствующей энергии. Причем, самый сильный скачок давления наблюдается в непосредственной близости к поверхности сооружения. Также была установлена особая роль аэрации воды в процессе нагружения сооружений.

Сжимаемость воздуха в однофазном течении может быть учтена при помощи уравнения состояния совершенного газа (1.17). Однако в двухфазном потоке, требуется учесть сжимаемость обеих фаз - как воздуха, так и воды. В этом случае возможно использование уравнения состояния следующего вида (Stiffened Gas equation of state [316]):

$$p = \rho (\gamma - 1) e - p_\infty, \quad (3.1)$$

где  $e = c_v T$  - внутренняя энергия газа/жидкости. Данное уравнение включает

ет в себя три постоянные: показатель адиабаты  $\gamma$ , изохорную теплоемкость  $c_v$  и параметр давления  $p_\infty$ , характеризующий взаимное притяжение молекул капельной жидкости. Несмотря на то, что данное уравнение не позволяет достичь высокой точности для капельных жидкостей, оно может оказаться приемлемым, если давление меняется незначительно. Свойства воздуха и воды для использования совместно с уравнением (3.1) сведены в таблицу 3.1.

Таблица 3.1  
Физические свойства воздуха и воды для использования совместно с  
уравнением (3.1).

Свойство	Обозначение	Размерность	Воздух	Вода
Показатель адиабаты	$\gamma$	-	1.4	4.4
Параметр давления	$p_\infty$	МПа	0	950...1000
Изобарная теплоемкость	$c_p$	Дж / (кг К)	1001	4182
Газовая постоянная	$\mathfrak{R}$	Дж /(кг К)	286	3200
Динамическая вязкость	$\mu$	Па с	$1.78 \times 10^{-5}$	$10^{-3}$
Число Прандтля	$Pr$	-	0.713	7.01

Для дальнейшего рассмотрения двухфазной смеси требуется ввести следующие допущения:

1. Рассматриваемая смесь является гомогенной во всем пространстве. То есть, существует возможность задать некоторые осредненные свойства смеси опираясь на величину объемной доли воды  $\alpha_1$  или объемной доли воздуха  $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ . Причем,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$  по определению.
2. Для каждой из компонент смеси выполняются законы сохранения массы, импульса и энергии.
3. Смесь в целом также удовлетворяет этим уравнениям.
4. Давление  $p$ , температура  $T$  и вектор скорости  $V$  для компонент смеси совпадают во всем пространстве в каждый момент времени. Другими

словами, отсутствует “межфазное скольжение”, а компоненты смеси находятся в термодинамическом равновесии.

В этом случае, внутренняя энергия смеси будет представлять собой сумму энергий отдельных компонент с учетом их объемных долей  $\alpha_j$ :

$$\rho e = \sum_{j=1,2} \alpha_j \rho_j e_j \quad (3.2)$$

С другой стороны, учитывая  $p_1 = p_2 = p$ , из уравнения (3.1) можно найти выражение для  $\rho_j e_j$ :

$$\rho_j e_j = \frac{p - p_{\infty j}}{\gamma_j - 1} \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в (3.2) можно записать:

$$\rho e = p \sum_{j=1,2} \alpha_j \frac{1}{\gamma_j - 1} - \sum_{j=1,2} \alpha_j \frac{p_{\infty j}}{\gamma_j - 1} \quad (3.4)$$

Выражая давление из (3.4) можно записать итоговое уравнение состояния для гомогенной смеси воздуха и воды:

$$p = \frac{\rho e + \sum_{j=1,2} \alpha_j p_{\infty j} / (\gamma_j - 1)}{\sum_{j=1,2} \alpha_j / (\gamma_j - 1)} \quad (3.5)$$

Для среды, обладающей указанными свойствами, уравнения неразрывности (1.12), импульса (1.10) и сохранения энергии (1.14) запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \alpha_1 \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 V) = 0 \\
& \frac{\partial \alpha_2 \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_2 \rho_2 V) = 0 \\
& \frac{\partial (\rho V)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V V) = \rho g - \nabla p + \nabla \cdot \left[ \mu \left( \nabla V + (\nabla V)^T - I \frac{2}{3} \nabla \cdot V \right) \right] \quad (3.6) \\
& \frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V e) = -(V \cdot \nabla) p + q + Q_\tau \\
& p = \frac{\rho e + \sum_{j=1,2} \alpha_j p_{\infty j} / (\gamma_j - 1)}{\sum_{j=1,2} \alpha_j / (\gamma_j - 1)}
\end{aligned}$$

Плотность смеси, ее вязкость и другие свойства определяются объемными долями компонент:  $\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$ ;  $\mu = \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2$ . Процессами теплопереноса в системе (3.6) обычно пренебрегают полагая  $q = 0$ . Также пренебрегают нагревом жидкости, вызванным вязким трением, т.е.  $Q_\tau = 0$ . Систему (3.6) требуется дополнить уравнением конвективного переноса объемной доли  $\alpha_1$ :

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_1 V) + \text{CMPR} = 0 \quad (3.7)$$

Здесь CMPR - дополнительные слагаемые, предназначенные для минимизации численного “размытия” интерфейса между жидкой и газообразной фазами. Эффект размытия возникает вследствие неточности численных методов и конечности размеров ячеек расчетной сетки.

При численном интегрировании записанной системы уравнений возникает множество сложностей. В том числе, требуются достаточно мелкие шаги интегрирования по времени и по пространству для избежания чрезмерно высоких ошибок, вызванных сжимаемостью среды. Для минимизации данных проблем, в рамках настоящей диссертации сжимаемость воздуха не учитывается, а система допущений дополняется следующими пунктами:

5. Смесь является изотермической, и скорость ее движения намного меньше скорости звука:  $e = const \implies T = const$ .

6. Плотность смеси изменяется только вследствие конвективного переноса объемных долей  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . При этом, в каждый выделенный момент времени смесь считается несжимаемой и, следовательно, бездивергентной.
7. Плотность и вязкость смеси определяются объемными долями компонент:  $\rho = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2$ ;  $\mu = \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$ .
8. Сила поверхностного натяжения, действующая вдоль границы раздела сред, определяется методом отслеживания кривизны интерфейса [317]. Для приближенного вычисления кривизны интерфейса  $\kappa$  используется выражение:  $\kappa = \nabla \cdot (\nabla\alpha_1 / |\nabla\alpha_1|)$ .

После принятия указанных допущений, система уравнений (3.6) перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot V &= 0 \\ \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho VV) &= - \underbrace{\vec{g} \cdot \vec{r} \nabla \rho}_{\text{гравитация}} - \underbrace{\nabla p_d}_{\text{давление}} + \underbrace{\mu \nabla^2 V}_{\text{вязкость}} + \underbrace{\sigma \kappa \nabla \alpha_1}_{\text{пов. натяжение}} \quad (3.8) \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_1 V) + \underbrace{c_\alpha \kappa \nabla \cdot (\alpha_1 V) - c_\alpha \kappa \nabla \cdot (\alpha_2 V)}_{\text{CMPR}} &= 0 \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma$  - коэффициент поверхностного натяжения воды;  $\kappa$  - кривизна интерфейса; CMPR - искусственное сжатие интерфейса;  $\alpha_1$  - объемная доля воды;  $\alpha_2 = (1 - \alpha_1)$  - объемная доля воздуха. Для увеличения точности вычислений, давление смеси разбивается на две компоненты: весовое давление  $\rho \vec{g} \cdot \vec{r}$  и пьезометрическое давление  $p_d = p - \rho \vec{g} \cdot \vec{r}$ , где  $\vec{r}$  - радиус-вектор, а  $\vec{g}$  - ускорение свободного падения.

Система уравнений (3.8) представляет собой модель двухфазной смеси с поверхностью раздела, обозначаемую как VOF (Volume-of-Fluid) [247, 251, 252, 318, 319]. Особенность системы (3.8) состоит в отсутствии уравнения для давления  $p_d$ . В процессе численного счета давление находится методом PISO (Pressure-Implicit with Splitting of Operators) специально разработанным для нестационарных течений несжимаемой жидкости [47, 48]. В его основе лежит

замена уравнения неразрывности  $\nabla \cdot V = 0$  на консервативное уравнение Пуассона для давления. Подробное описание метода приведено далее в настоящей главе.

В настоящей диссертации, система уравнений метода VOF (3.8) используется в качестве модели двухфазного течения в рамках численного гидроволнового лотка, показанного на рис. 3.8. Для минимизации вычислительных затрат, рассматривается двумерная расчетная область (домен)  $\Omega_{VOF}$ . Оси координат  $x - z$  расположены таким образом, что координата  $z = 0$  соответствует уровню спокойной воды, а ось  $x$  направлена в сторону распространения бегущей поверхностной волны. Высота рассматриваемого слоя воздуха над спокойной поверхностью воды выбрана равной глубине гидроволнового лотка  $h$ .

### 3.2.2. Модель однофазного квазипотенциального течения

Воздух исключается из расчета в рамках однофазной модели. При этом полагается, что на свободную поверхность воды со стороны атмосферы действует избыточное давление  $p = 0$ . Течение предполагается квазипотенциальным, а скорость состоящей из двух компонент в соответствии с (1.77):  $V = -\nabla\varphi + V'$ . Флуктуационная (турбулентная) компонента скорости предполагается много меньше осредненной компоненты скорости, т.е.  $|V'| \ll |\nabla\varphi|$ . Исходя из этого, течение жидкости определяется линейным уравнением Лапласа с нелинейными граничными условиями (1.53)–(1.56).

Несмотря на то, что скорость  $V'$  невелика, она может вносить существенный вклад в случае возникновения одиночного обрушения волны или серии последовательных обрушений в волновом цуге (пакете волн). Этот вклад может быть учтен при выводе динамического (ДГУ) и кинематического (КГУ) граничных условий (1.54)–(1.55). Как показано в разделе 1.3.3., применение гипотезы Буссинеска (1.75) дополняет ДГУ и КГУ слагаемыми, выраженнымы-

ми через турбулентную вязкость  $\nu_t$ , см. уравнения (1.76) и (1.83). Величина турбулентной вязкости определяется при помощи полуэмпирической параметризации.

Для нахождения течения жидкости  $V \approx -\nabla\varphi$  требуется, прежде всего, решить уравнение Лапласа (1.53). Нелинейность граничных условий ДГУ и КГУ не позволяет сделать это аналитически, что приводит к необходимости численного решения задачи. В рамках настоящей диссертации используется Метод Границных Элементов (Boundary Element Method - BEM), который можно отнести к классу полуаналитических методов [320, 321]. В рамках данного метода требуется найти распределение гидродинамического потенциала  $\varphi$  и его производной  $\partial\varphi/\partial n$  по границе расчетной области (домена)  $\Omega_{BEM}$ , см. рис. 3.8. Здесь  $n$  - направление нормали к границе домена  $\Gamma = \Gamma_{wm} \cup \Gamma_{fs} \cup \Gamma_L \cup \Gamma_b$ . После этого, распределение потенциала  $\varphi$  внутри домена  $\Omega_{BEM}$  определяется однозначным образом благодаря свойствам линейного уравнения Лапласа.

Применяя теорему Грина для двухмерной области  $\Omega_{BEM}$ , уравнение Лапласа сводится к интегралу по замкнутому контуру  $\Gamma = \Gamma_{wm} \cup \Gamma_{fs} \cup \Gamma_L \cup \Gamma_b$ . Дополняя полученное уравнение соответствующими граничными условиями, можно получить итоговую систему уравнений (3.9), решаемую в рамках однодimensionalной квазипотенциальной модели [111, 112, 113, 114, 322, 323, 324, 325, 326].

В уравнениях (3.9) использована более точная Лагранжева формулировка метода граничных элементов, в рамках которой ищется изменение во времени координат жидких частиц, расположенных на свободной поверхности  $\Gamma_{fs}$  и заданных радиус-вектором  $r = \{x, z\}$ . Для этого, в уравнениях введена локальная система координат  $\{s, n\}$ , оси которой направлены вдоль границы  $\Gamma$  и перпендикулярно к ней, соответственно. Также материальная производная обозначена как  $D/Dt = \partial/\partial t + (V \cdot \nabla)$ . Функция  $\Phi(r, r_s) = -1/(2\pi)\ln|r - r_s|$  задает потенциальное течение в точке  $r$ , вызванное потенциальным источником, расположенным в точке  $r_s$ . В рамках метода граничных элементов,

данная функция носит название “фундаментального решения”.

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi\varphi(r_s)}{2} &= \oint_{\Gamma} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial n}(r) \Phi(r, r_s) - \varphi(r) \frac{\partial\Phi}{\partial n}(r, r_s) \right) d\Gamma \\
 \frac{D\varphi}{Dt} &= gz - \frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 + \frac{p}{\rho} + \underbrace{2\nu_t \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}}_{\text{турбулентность}}, \quad \text{ДГУ на границе } \Gamma_{fs} \\
 \begin{cases} \frac{Dr}{Dt} = -\nabla\varphi + \left\{ \frac{\partial\psi}{\partial z}, -\frac{\partial\psi}{\partial x} \right\} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\psi}{\partial s} = \underbrace{2\nu_t \frac{\partial^3\varphi}{\partial s^2 \partial n}}_{\text{турбулентность}} \end{cases}, \quad \text{КГУ на границе } \Gamma_{fs} \quad (3.9) \\
 \frac{\partial\varphi}{\partial n} &= 0, \quad \text{на границе } \Gamma_b \\
 \frac{\partial\varphi}{\partial n} &= -V_{wm}, \quad \text{на границе } \Gamma_{wm} \\
 \frac{\partial\varphi}{\partial n} &= 0, \quad \text{на границе } \Gamma_L
 \end{aligned}$$

Генерация волн осуществляется с помощью волнопродуктора, полностью совпадающего с тем, который используется в экспериментальной установке. Движение численного волнопродуктора в системе уравнений задано переменной во времени скоростью его поверхности  $V_{wm}(t)$ . Для предотвращения отражения волн от поверхности  $\Gamma_L$ , в систему уравнений вносится искусственное давление, действующее в области гашения волн. Данное давление действует в противофазе к бегущей волне и вызывает ее гашение. Выражение для давления заимствовано из [327]:

$$p = -\tilde{p}_d \rho \sqrt{gh} \frac{\partial\varphi}{\partial n} b_f(x) \quad (3.10)$$

Величина постоянной гашения выбрана равной  $\tilde{p}_d = 2$ . Функция  $b_f(x)$  задает положение области гашения волн, а  $g$  - ускорение свободного падения.

Более подробное описание численной реализации метода граничных элементов приведено в приложении 2.

### 3.2.3. Модель турбулентной вязкости и кинематический критерий обрушения гребня волны

Как уже было отмечено выше по тексту, в момент обрушения часть энергии поверхностной волны диссилирует в энергию вторичных турбулентных течений. Этот процесс не может быть строго отражен в модели однофазного течения (3.9) и требует полуэмпирической параметризации опираясь на гипотезу Буссинеска и величину турбулентной вязкости  $\nu_t$  в динамическом граничном условии (ДГУ). Введённое таким образом полуэмпирическое диссилиативное слагаемое в ДГУ отражает скорость перехода энергии поверхностной волны в энергию вторичных турбулентных течений, которые напрямую в задаче на рассматриваются.

В литературе описано несколько подходов к эмпирической параметризации величины турбулентной вязкости  $\nu_t$ , включая достаточно инновационные подходы на основе нейронных сетей [121, 328]. Один из наиболее зарекомендовавших себя с практической точки зрения подходов основан на работах [110, 329, 330], в которых выполнена широкая серия лабораторных экспериментов и предложена эмпирическая параметризация для турбулентной вязкости:

$$\nu_t = \chi \frac{H_{br} L_{br}}{T_{br}}, \quad (3.11)$$

где  $\chi = 0.02$  является безразмерной эмпирической постоянной калибровки;  $H_{br}$  и  $L_{br}$  являются характерными вертикальным и горизонтальным масштабами процесса обрушения волны, а  $T_{br}$  - характерным временным масштабом. Данная эмпирическая параметризация была использована в ряде исследований, включая работы [331, 332, 333].

Для определения момента начала обрушения выделенного гребня, используется так называемый геометрический критерий обрушения. На основании

схемы, приведенной на рис. 3.9, вычисляется средняя крутизна волны  $S_b$ :

$$S_b = \frac{\pi}{2L_b} (2H_c + H_{t1} + H_{t2}), \quad (3.12)$$

где  $L_b \approx 2L_c$ . Условие

$$S_b > S_c \quad (3.13)$$

считается началом обрушения гребня волны. Здесь критическое значение средней крутизны гребня задано эмпирически как  $S_c = 0.95$ .

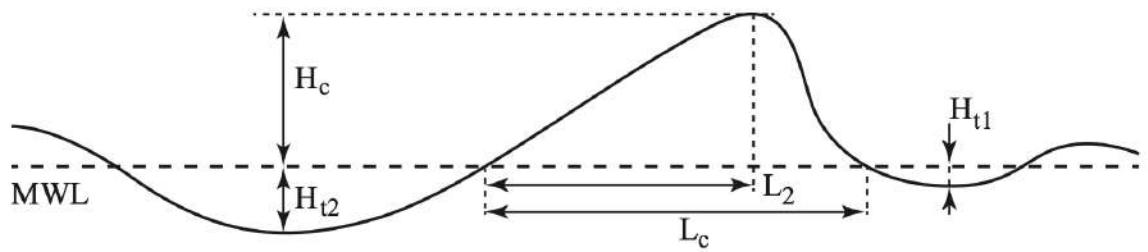


Рис. 3.9. Схема гребня, используемая для определения его геометрических параметров в полуэмпирической модели обрушения волны [330].

В момент начала обрушения гребня волны вычисляется величина турбулентной вязкости (3.11) опираясь на следующие эмпирические зависимости для масштабов процесса [330]:

$$\begin{cases} H_{br} = \frac{0.87L_2/L_c - 0.3}{\kappa_b} \\ L_{br} = \frac{24.3S_b - 1.5}{\kappa_b} \\ T_{br} = \frac{18.4S_b + 1.4}{\omega_b} \end{cases} \quad (3.14)$$

где  $\kappa_b = 2\pi/L_b$ ;  $\omega_b = \sqrt{g\kappa_b \tanh(\kappa_b h)}$ ;  $g$  - ускорение свободного падения;  $h$  - средняя глубина воды.

Принцип работы описанной модели турбулентной вязкости заключается в следующем: в тот момент времени, когда выделенный гребень перестает быть устойчивым и вплотную приближается к моменту обрушения, требуется вве-

сти в ДГУ и КГУ (3.9) ненулевую турбулентную вязкость  $\nu_t$ , вычисленную по формуле (3.11). Причем, распределение  $\nu_t$  должно быть ограничено в пространстве начальной координатой  $x_{br}$  и пространственным масштабом  $L_{br}$ . Здесь  $x_{br}$  - координата гребня в момент начала его обрушения, см. рис. 3.10. По истечении времени  $T_{br}$  процесс обрушения выделенного гребня считается завершенным, и величина турбулентной вязкости устанавливается равной  $\nu_t = 0$ .

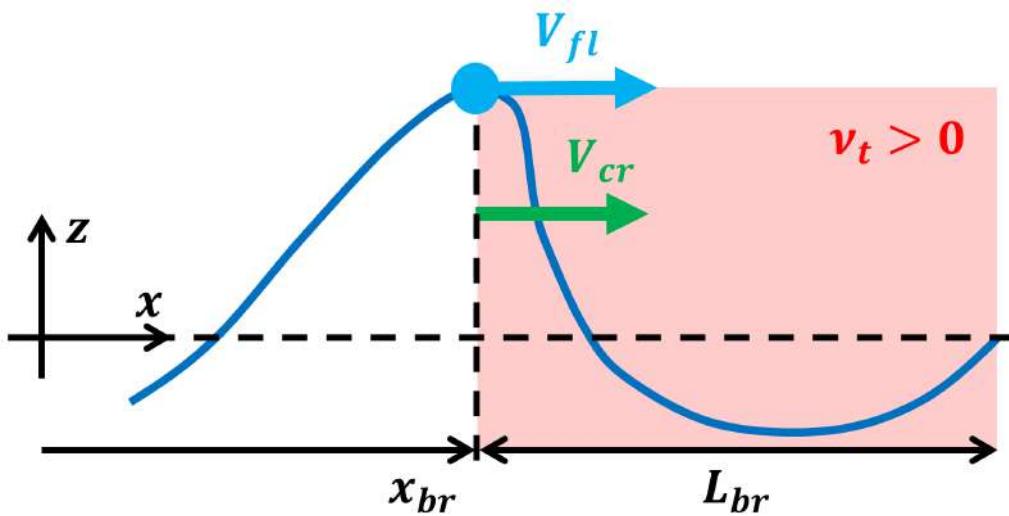


Рис. 3.10. Принципиальная схема гребня волны в момент начала его обрушения:  $x_{br}$  - координата начала обрушения гребня;  $L_{br}$  - пространственный масштаб процесса обрушения гребня (3.14);  $V_{fl}$  - лагранжева скорость жидкой частицы, расположенной на гребне волны;  $V_{cr}$  - мгновенная скорость распространения гребня волны. Красным помечена ограниченная в пространстве область ненулевых значений турбулентной вязкости  $\nu_t$  (3.11), в пределах которой возникает диссипация энергии поверхности волны в гидродинамическую турбулентность.

Следует подчеркнуть, что координата начала обрушения волны  $x_{br}$  является наиболее важным параметром модели турбулентной вязкости и определяется так называемым критерием обрушения. Большое количество исследований направлено на создание надежного критерия обрушения, позволяющего с высокой точностью определить величину  $x_{br}$  и, следовательно, повысить точности модели турбулентной вязкости [329, 334, 335].

Наиболее простые геометрические критерии обрушения волн, к классу которых относится выражение (3.13), показали свою чрезмерную простоту и

низкую точность [334, 335]. Альтернативный динамический критерий обрушения [336] предполагает, что волна теряет устойчивость в тот момент, когда вертикальное ускорение жидкой частицы, расположенной в верхней точке гребня волны, превышает ускорение свободного падения  $g$ . Исследования показали несостоятельность данного критерия [337, 338].

Энергетический критерий обрушения волны рассматривает поток энергии, переносимый бегущей волной через поперечное сечение гидроволнового лотка. Предполагается, что для заданной формы волны существует некоторое предельное значение данного потока энергии, которое волна в состоянии перенести не разрушаясь [329, 339, 340]. Позже было показано, что энергетический критерий обрушения сводится к математически более простому и физически более прозрачному кинематическому критерию обрушения [116, 331, 341].

В кинематическом критерии обрушения гребня волны утверждается, что обрушение происходит в тот момент, когда горизонтальная скорость жидкой частицы, расположенной на гребне волны, становится сопоставимой со скоростью самого гребня:  $V_{fl} \sim V_{cr}$ , как показано на рис. 3.10. Это приводи к нарушению кинематического граничного условия (КГУ) и, тем самым, к разрушению численного решения системы уравнений (3.9). Восстановление устойчивости решения уравнений математической модели требует включения ненулевой турбулентной вязкости  $\nu_t$  в систему (3.9).

Очевидно, что для применения кинематического критерия обрушения волны требуется оценка скорости распространения гребня волны  $V_{cr}$ . В литературе исследовалось несколько способов оценки данной скорости. Так, в работе [342] было предложено использовать так называемую фазовую скорость  $c_p$ , которая может быть вычислена для монохроматической волны следующим образом:

$$c_p = \frac{\omega}{\kappa}, \quad (3.15)$$

где  $\kappa$  - волновое число, а  $\omega = \sqrt{g\kappa \tanh(\kappa h)}$  - круговая частота волны (1.61).

Другая оценка скорости гребня была предложена в работе [343] на основе так называемой групповой скорости  $c_g$ , характеризующей скорость распространения энергии поверхностной волны [69]:

$$c_g = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2\kappa h}{\sinh 2\kappa h} \right) \frac{\omega}{\kappa} \quad (3.16)$$

Столь простые теоретические оценки скорости гребня волны показали свою несостоятельность, что отражено в соответствующих экспериментальных исследованиях [342, 343].

В работах [115, 116, 117, 341] кинематический критерий обрушения был сформулирован в следующем виде:

$$\frac{V_{fl}}{V_{cr}} \geq B_x \quad (3.17)$$

где порог устойчивости волны оценивается эмпирическим образом как  $B_x = 0.840 \pm 0.016$ . С другой стороны, в работах [344, 345, 346] дается другая оценка порога устойчивости:  $0.9 < B_x \leq 1$ .

В настоящей диссертации выдвинута гипотеза о том, что обрушение гребня волны происходит в точности в момент выравнивания скоростей  $V_{fl}$  и  $V_{cr}$ . Таким образом, предполагается необходимость выбора порога устойчивости равным  $B_x = 1$ . С физической стороны, данная гипотеза означает, что волна теряет устойчивость в связи с тем, что жидккая частица на гребне стремится двигаться с лагранжевой скоростью превышающей скорость соответствующего гребня. То есть, частица стремится отделиться от свободной поверхности.

Для подтверждения выдвинутой гипотезы и валидации соответствующего ей кинематического критерия обрушения (3.17), требуется высокоточное измерение и исследование скоростей  $V_{fl}$  и  $V_{cr}$  в момент начала обрушения волны. В настоящей диссертации предложен новый высокоточный метод определения скоростей  $V_{fl}$  и  $V_{cr}$  на основе комбинирования лабораторных и чис-

ленных экспериментов в физическом и численном гидроволновых лотках. Технические величины, измерение которых затруднено или невозможно в лабораторной установке, оцениваются с помощью высокоточных вычислений на основе моделей (3.8) и (3.9). Более подробно экспериментальный метод описан в главе 6 настоящей диссертации.

### 3.2.4. Сопряжение однофазной и двухфазной моделей течения жидкости

Для сопряжения моделей, используемых в рамках численного гидроволнового лотка, требуется вычислить распределение вектора скорости  $V = \{V_x, V_z\}$  по поперечному сечению, расположенному на расстоянии  $L_i$  от волнопродуктора, как показано на рис. 3.8. Для этого используется определение скорости (1.77) в пределах расчетного домена  $\Omega_{BEM}$  однофазной модели. Пользуясь центральной разностной схемой можно записать:

$$\begin{cases} V_x = -\frac{\varphi(x + \Delta x, z) - \varphi(x - \Delta x, z)}{2\Delta x} \\ V_z = -\frac{\varphi(x, z + \Delta z) - \varphi(x, z - \Delta z)}{2\Delta z} \end{cases} \quad (3.18)$$

Здесь  $\Delta x = \Delta z$  - пространственное разрешение (размер ячеек) конечно-объемной сетки, используемой в двухфазной модели.

Далее распределение скорости (3.18) используется в качестве граничного условия на входе двухфазной модели течения жидкости, см. рис. 3.8. Для осуществления такого сопряжения был разработан модифицированный решатель bemInterFoam [258, 259, 260], в основе которого лежит система уравнений (3.8). Кроме граничных условий, требуемых для сопряжения моделей, решатель bemInterFoam был дополнен рядом других алгоритмов, требуемых для проведения исследования.

Следует подчеркнуть, что вектор  $V(t)$  (3.18) меняется во времени, что

требует динамического обновления граничных условий в двухфазной модели опираясь на результаты расчета однофазной модели. Кроме того, требуется уделить особое внимание выбору разрешения сеток в обоих моделях. Для этого было проведено исследование сеточной сходимости на тестовых волновых пакетах, результаты которого приведены в приложении 3.

### 3.3. Метод Pressure-Implicit with Splitting of Operators (PISO)

Особенность системы (3.8) состоит в отсутствии уравнения для прямого определения поля статического давления. Для обхода данной сложности, в статьях [47, 48] разработан метод PISO (Pressure-Implicit with Splitting of Operators), в котором уравнение неразрывности  $\nabla \cdot V = 0$  для несжимаемой жидкости заменяется т.н. консервативным уравнением Пуассона.

Алгоритм PISO состоит из двух шагов: предиктор и корректор. В рамках первого шага, дискретизированная версия векторного уравнения Навье-Стокса (3.8) записывается в матричной форме:

$$\mathbf{A}V^* - \mathbf{H}V^* = -\vec{g} \cdot \vec{r} \nabla \rho - \nabla p_d \quad (3.19)$$

Здесь **A** и **H** - диагональная и внедиагональная матрицы коэффициентов, полученные Методом Конечных Объемов (см. раздел 2.5.). Решая данное уравнение находится вектор скорости  $V^*$ , определяемый неизменным “замороженным” давлением (“frozen” pressure field).

На втором этапе требуется откорректировать поля давления и скорости таким образом, чтобы удовлетворялось уравнение неразрывности  $\nabla \cdot V = 0$ . Уравнение (3.19) следует переписать:

$$\mathbf{A}V^{**} + \nabla p_d^{**} = \mathbf{H}V^* - \vec{g} \cdot \vec{r} \nabla \rho$$

Здесь  $V^{**}$  и  $p_d^{**}$  - скорректированные поля скорости и давления. Вычисляя

дивергенцию от обеих частей уравнения можно записать:

$$\cancel{(\nabla \cdot V^{**})}^0 + \nabla \cdot (\mathbf{A}^{-1} \nabla p_d^{**}) = \nabla \cdot (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{H} V^* - \mathbf{A}^{-1} \vec{g} \cdot \vec{r} \nabla \rho)$$

Здесь  $\nabla \cdot V^{**} = 0$  берется равным нулю для обеспечения консервативности уравнения.

В конечном виде консервативное уравнение Пуассона для статического давления запишется в следующем виде:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A}^{-1} \nabla p_d^{**}) = \nabla \cdot (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{H} V^* - \mathbf{A}^{-1} \vec{g} \cdot \vec{r} \nabla \rho) \quad (3.20)$$

Откорректированное поле давления  $p_d^{**}$  находится численно решая уравнение Пуассона Методом Конечных Объемов. После этого можно найти откорректированную скорость  $V^{**}$ , соответствующую давлению  $p_d^{**}$ :

$$V^{**} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{H} V^* - \mathbf{A}^{-1} \vec{g} \cdot \vec{r} \nabla \rho - \mathbf{A}^{-1} \nabla p_d^{**} \quad (3.21)$$

Решение уравнений (3.20) и (3.21) осуществляется итерационно до выполнения закона сохранения массы  $\nabla \cdot V = 0$  с наперед заданной точностью. Обычно количество итераций не превышает четырех.

### 3.4. Выводы по главе

1. Океан покрывает порядка 70% поверхности Земли. Столь значительный резервуар воды и, соответственно, тепловой энергии является неотъемлемым элементом планетарного теплового и биохимического баланса, определяет атмосферные течения и динамику климата Земли. Более того, водяной пар, формирующийся из океанической воды, является одним из наиболее распространенных парниковых газов.
2. Кроме фундаментальных проблем планетарного масштаба, океанические течения, поверхностные и внутренние волны необходимо учитывать при решении инженерно-технических задач. К таким задачам можно отнести определение силовых нагрузок от набегающих волн на береговые линии, прибрежные сооружения, морские платформы и др. Так же к важным задачам относятся вопросы навигации и определения перемещений морских судов в результате действия штормов и ураганов, вопросы их выживаемости. В данном аспекте следует учесть особую роль океана в хозяйственной деятельности человека. В океане добываются важные продукты питания, минеральные и ископаемые ресурсы; примерно 90% товаров перевозится морским транспортом, соединяющим географически отдаленные страны и регионы.
3. Испытания и исследования прибрежных и морских сооружений, судов, плавучих платформ и других инженерно-технических объектов на предмет воздействия морских волн и течений проводят в лабораторных гидроволновых лотках, расположенных в ряде научных, исследовательских и проектных организаций России: Крыловский государственный научный центр; Арктический и антарктический научно-исследовательский институт и др. Подобные лабораторные испытания и исследования являются чрезвычайно трудоемкими и дорогостоящими. Для минимизации затрат и расширения возможностей при реше-

нии инженерно-технических задач, в настоящее время прикладывают-  
ся значительные усилия для создания так называемой “численной гид-  
роволновой лаборатории” [301, 302, 303, 304], представляющей из себя  
совокупность различных численных методов и алгоритмов для высоко-  
точного моделирования морских и прибрежных явлений.

4. Особенно важным элементом лабораторных и численных гидровол-  
новых лотков является волнопродуктор - гидравлическое устройство,  
предназначенное для генерации пакетов поверхностных волн с перед  
заданной конфигурацией. Несмотря на значительные усилия россий-  
ских и зарубежных исследователей, высокоточная генерация волн при  
помощи волнопродукторов остается трудно достижимой. Это связано,  
прежде всего, со сложностью гидродинамических процессов, протекаю-  
щих в гидроволновых лотках. Требуется разработка усовершенствован-  
ных алгоритмов автоматизированного управления волнопродукторами  
с целью повышения точности генерации поверхностных волновых паке-  
тов сложной формы.
5. Для решения указанных проблем, в настоящей диссертации разработан  
численный гидроволновой лоток, включающий в себя две сопряженные  
модели (рис. 3.8): (а) точную модель двухфазного течения на основе  
уравнений Навье-Стокса и метода Volume-of-Fluid (VOF), и (б) модель  
однофазного квазипотенциального течения на основе Метода Границ-  
ных Элементов (Boundary Element Method - BEM). Модель двухфазно-  
го течения VOF является очень затратной с вычислительной стороны,  
поэтому она накрывает небольшую пространственную область, в кото-  
рой может располагаться исследуемый погруженный объект. С другой  
стороны, упрощенная модель квазипотенциального течения BEM спо-  
собна накрывать всю требуемую длину гидроволнового лотка, что поз-  
воляет учитывать нелинейную эволюцию волнового пакета на удалении  
от исследуемого объекта.

6. Основной недостаток упрощенной модели квазипотенциального течения ВЕМ заключается в невозможности точного учета обрушения поверхности волн, в результате которого часть энергии волны диссириует во вторичные турбулентные течения, существующие с бегущей волной. Это вопрос решается введением специальной полуэмпирической модели турбулентной вязкости, которая должна выполнять две функции: (а) определение пространственной и временної координаты начала обрушения выделенного гребня волны; и (б) параметризация процесса диссириации энергии бегущей волны через величину турбулентной вязкости  $\nu_t$ .
7. Дальнейшая работа должна включать несколько этапов. В главе 6 проводится детальное численное и экспериментальное исследование течений жидкости, наблюдаемых в гидроволновом лотке. На основании результатов данных исследований требуется установить величину эмпирической постоянной  $B_x$  (3.17) для замыкания модели турбулентной вязкости, т.е. выполнить калибровку модели. Далее, в главах 7 и 8, численный гидроволновой лоток, включающий в себя откалиброванную модель турбулентной вязкости, используется для разработки и исследования новых высокоточных алгоритмов автоматизированного управления волнопродуктором.
8. Основные результаты исследований, обсуждаемых в настоящей главе, опубликованы соискателем и его соавторами в ряде международных и российский статей [347, 348, 349], а также обсуждены на международных конференциях [350, 351].

## ГЛАВА 4

# ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В ВИХРЕВОЙ ТРУБЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ МОДИФИЦИРОВАННОЙ И СТАНДАРТНЫХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

### 4.1. Численное исследование течения газа в разделительной вихревой трубе

На начальном этапе исследований была проведена серия расчетов течения газа в разделительной конической вихревой трубе, схема которой показана на рис. 4.1. Геометрические размеры данной вихревой трубы сведены в таблицу 4.1. Цель расчетов заключалась в первичном исследовании распределения газодинамических параметров по проточной части, а также в оценке точности стандартных моделей турбулентности при расчете эффекта энергоразделения Ранка-Хилша.

Таблица 4.1  
Геометрические размеры разделительной конической вихревой трубы  
(см. рис. 4.1).

Диаметр камеры энергоразделения $D$ , мм	Диаметр диафрагмы $d$ , мм	Длина камеры энергоразделения $L$ , мм	Угол конусности камеры энерго-разделения $\alpha$ , °
16.8	9,8	168	3.5

Для численного решения уравнений газодинамики (2.8)-(2.11) и (2.26) использовался коммерческий пакет ANSYS CFX, особенности которого рассмотрены в разделе 2.5.. Поскольку в данной серии вычислений использовались исключительно стандартные модели турбулентности, поправка Ван Деемтера  $q_\gamma$  была исключена из (2.26). Общий вид расчетной сетки для рассматриваемого случая показан на рис. 4.2. Было использовано измельчение ячеек расчетной сетки вблизи твердых стенок для корректного учета течения в пограничном слое. Количество ячеек сетки варьировалось в диапазоне

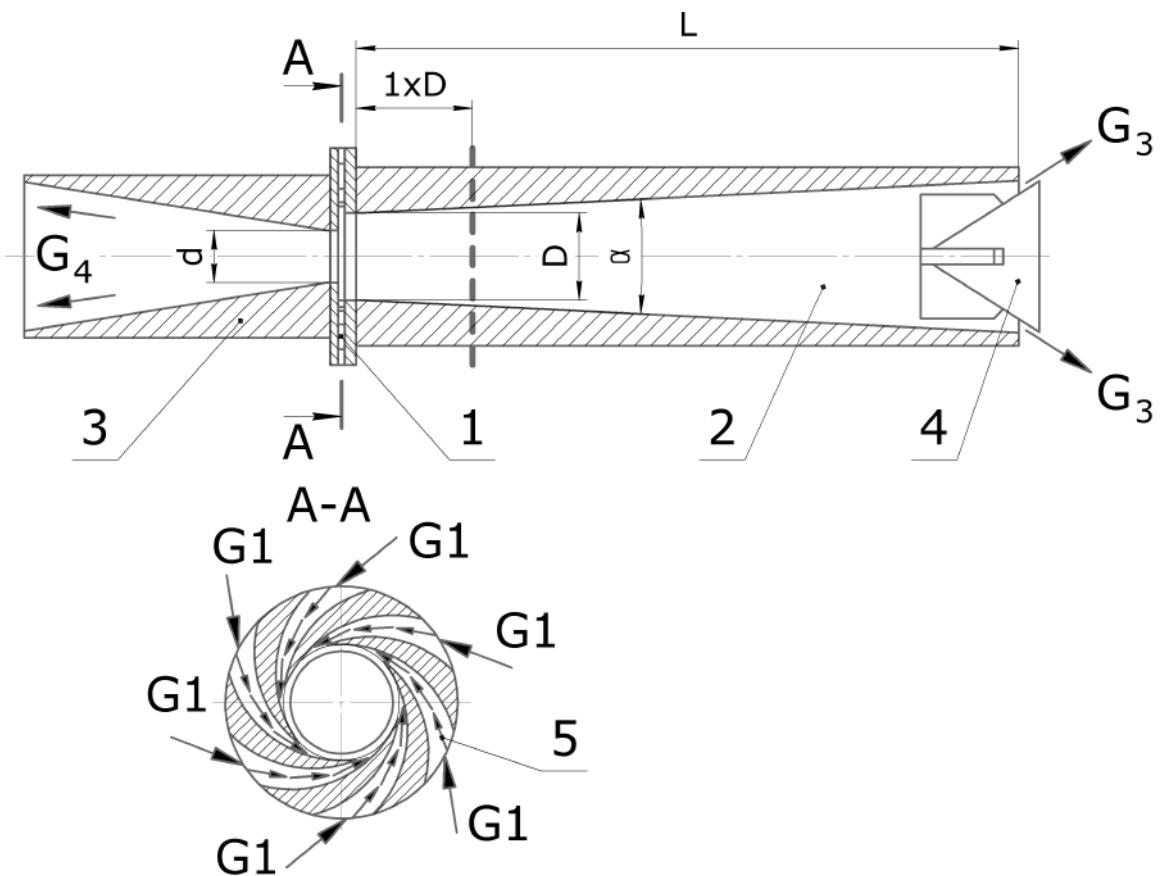


Рис. 4.1. Схема исследуемой разделительной конической вихревой трубы

1 – сопловой ввод; 2 – конический корпус (камера энергоразделения); 3 – диффузор холодного потока; 4 – развихритель горячего потока с дроссельными отверстиями; 5 – сопловой сужающийся канал

0.5 – 2.5 млн в зависимости от использованной модели турбулентности.

Для корректного сравнения с результатами экспериментальных измерений, в качестве рабочего тела был выбран воздух со следующими свойствами:

$$\mathfrak{R} = 286 \text{ Дж / (кг К)}$$

$$\gamma = 1.4$$

$$c_p = \frac{\gamma \mathfrak{R}}{\gamma - 1} = 1001 \text{ Дж / (кг К)} \quad (4.1)$$

$$\mu = 1.78 \times 10^{-5} \text{ Па с}$$

$$\lambda = 0.0261 \text{ Вт / (м К)}$$

Границные условия сведены в таблицу 4.2. Начальные условия:  $p = 100 \text{ кПа}$ ;

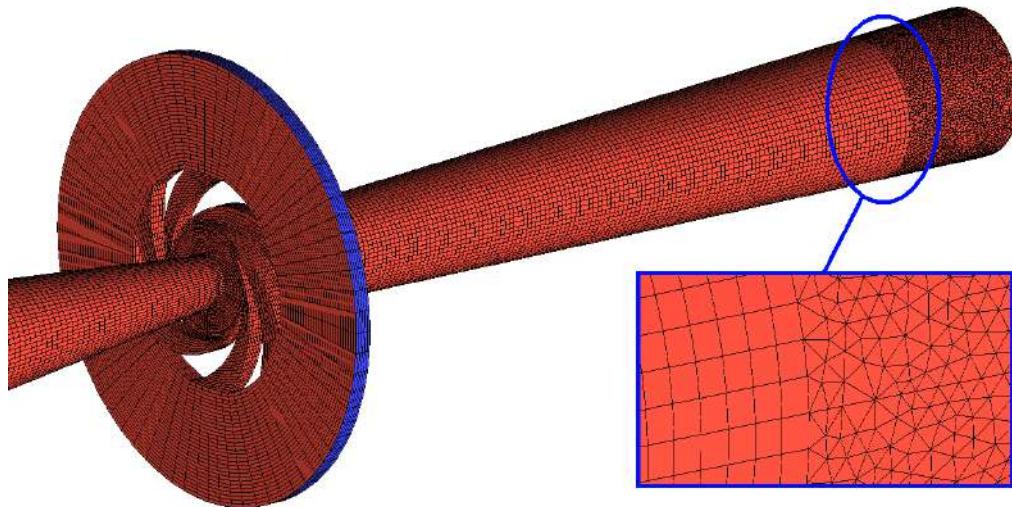


Рис. 4.2. Общий вид расчетной сетки для разделительной конической вихревой трубы

$T = 300 \text{ K}$ ;  $V = 0$ ;  $k = 0$ ;  $\varepsilon = 0$ . Было установлено, что квазистационарное течение достигается по истечении физического времени  $t \approx 2 \times 10^{-2} \text{ с}$ .

Таблица 4.2  
Границные условия в моделях разделительной конической вихревой трубы.

	Граница		Границные условия
1	Вход в сопловой аппарат	Поток $G_1$	Абсолютное статическое давление $p = 600 \text{ кПа}$ Статическая температура $T = 300 \text{ К}$ Интенсивность турбулентности $I = 5\%$
2	Выход горячего потока	Поток $G_3$	Абсолютное статическое давление $p = 100 \text{ кПа}$
3	Выход холодного потока	Поток $G_4$	Абсолютное статическое давление $p = 100 \text{ кПа}$
4	Твердые стенки		Условие прилипания $V = 0$ Условие адиабатичности $q = 0$

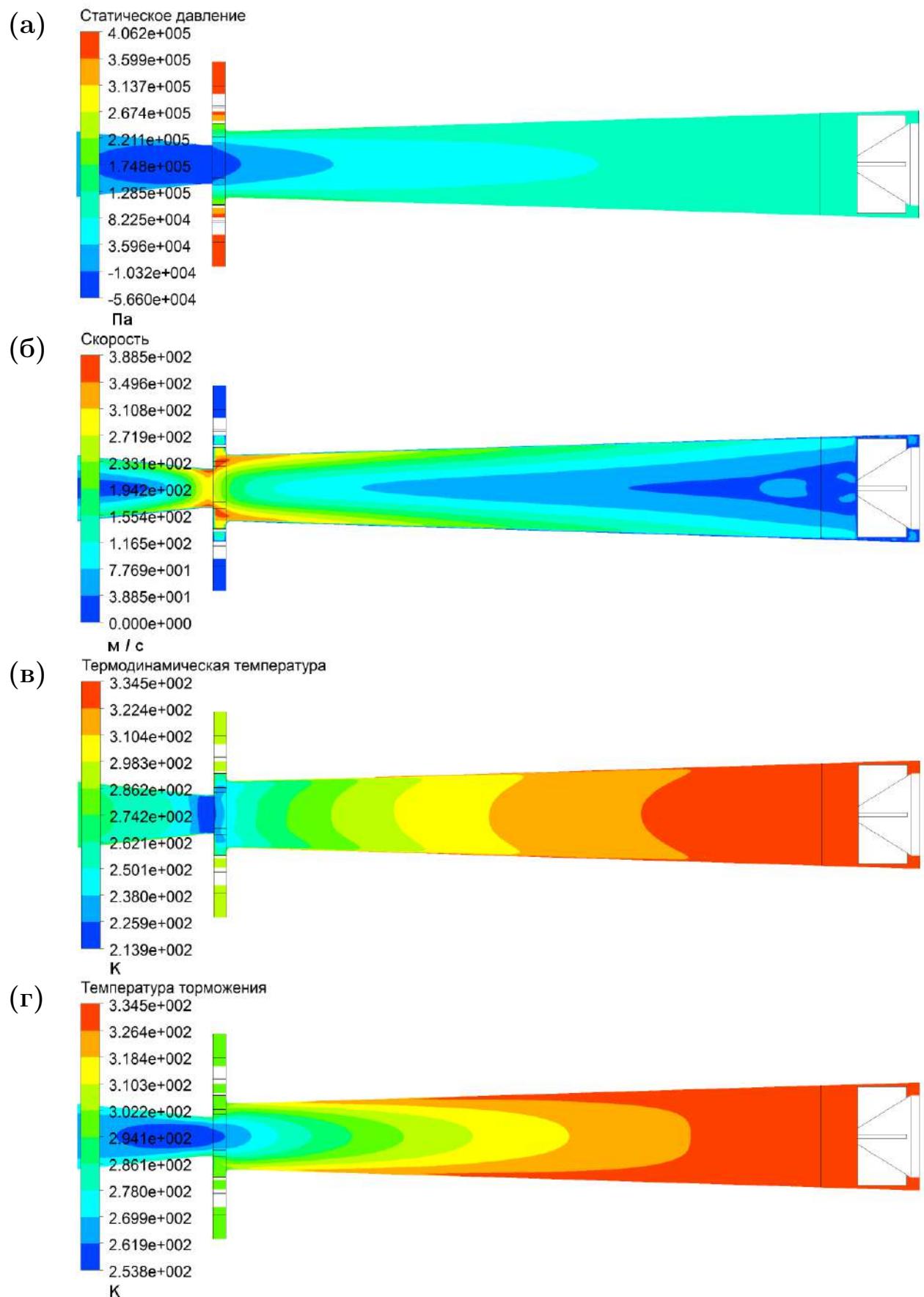


Рис. 4.3. Распределение (а) статического давления, (б) модуля скорости, (в) статической температуры и (г) температуры торможения по плоскости продольного разреза вихревой трубы, полученное с применением  $k$ - $\varepsilon$ -std модели турбулентности.

Было обнаружено, что стандартные модели турбулентности  $k-\varepsilon$ -std,  $k-\omega$ -std,  $k-\varepsilon$ -realizable-std,  $k-\varepsilon$ -RNG-std и SST-std дают сходную картину течения газа в вихревой трубе. Исходя из этого, для краткости, на рис. 4.3 представлены расчетные распределения газодинамических параметров по плоскости продольного разреза вихревой трубы, полученные с применением  $k-\varepsilon$ -std модели турбулентности. Анализ поля статического давления (рис. 4.3 (а)) показывает наличие радиального градиента, обусловленного действием центростремительного ускорения. В сечении диафрагмы наблюдается наименьшее давление, которое достигает вакуума около более 50 кПа абсолютных.

В целом можно отметить, что расчетные распределения скорости, статического давления и температуры торможения достаточно хорошо качественно согласуются с экспериментальными данными [127, 128, 129, 130]. При этом, из рис. 4.3 (в,г) видно, что центральная часть течения имеет более высокую статическую температуру по сравнению с периферийной, а распределение температур торможения имеет обратный характер. Такая инверсия полей температуры, в целом, не подтверждается экспериментальными исследованиями и требует анализа в последующих разделах диссертации.

Рис. 4.4 показывает линии тока в продольном сечении вихревой трубы игнорируя вращательную компоненту скорости газа. Видно, что течение является симметричным относительно оси вихревой трубы и квазистационарным.

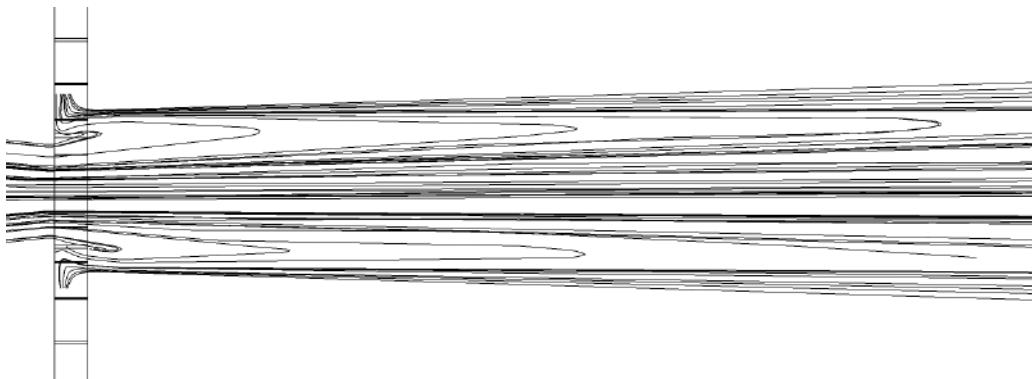


Рис. 4.4. Линии тока в продольном сечении вихревой трубы, полученные с применением  $k-\varepsilon$ -std модели турбулентности

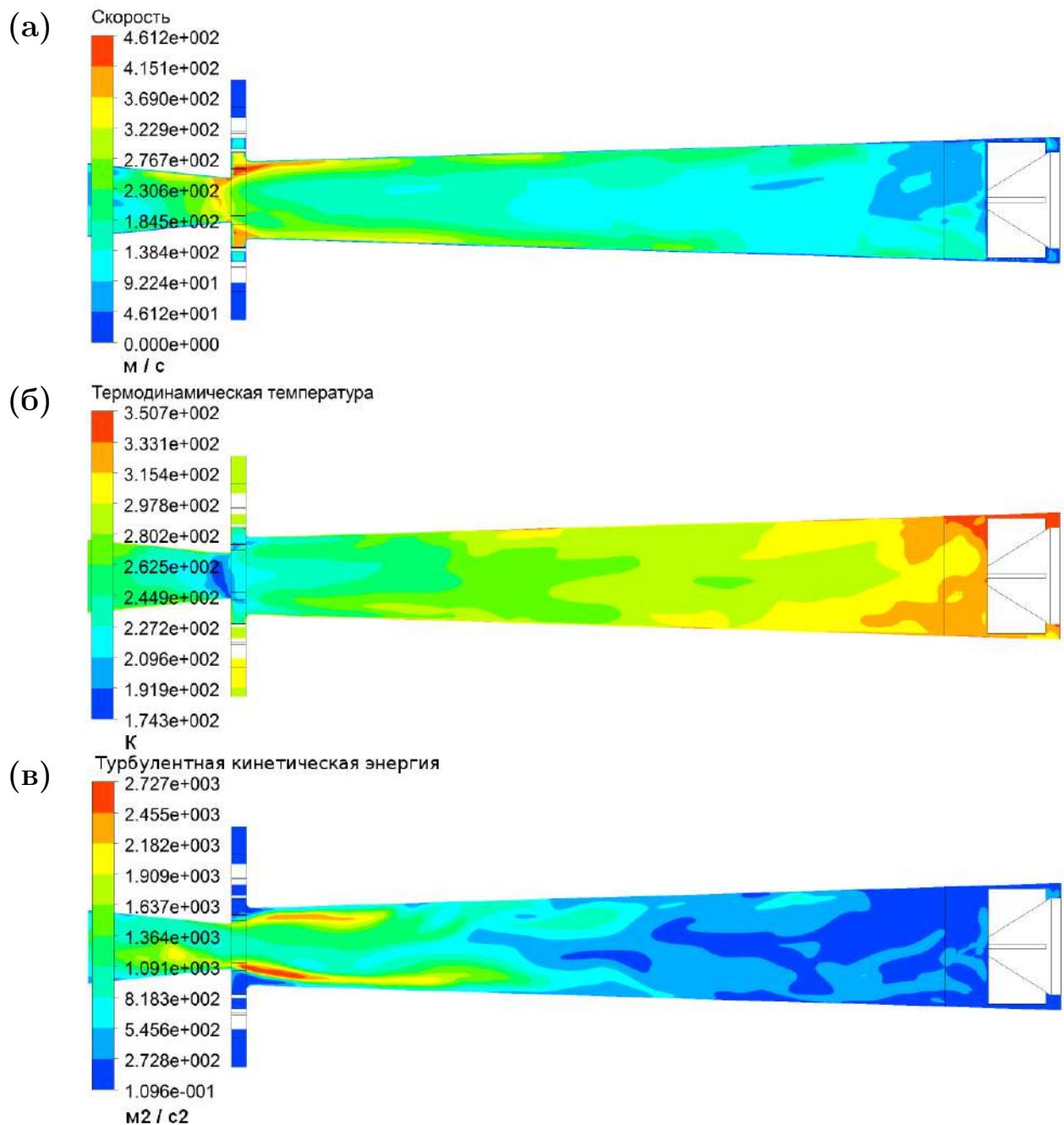


Рис. 4.5. Распределение (а) модуля скорости, (б) статической температуры и (в) энергии турбулентности  $k$  по плоскости продольного разреза вихревой трубы, полученное с применением SAS-SST-std модели турбулентности.

Было обнаружено, что модель турбулентности SAS-SST-std показывает картину течения значительно отличающуюся от всех рассмотренных выше моделей. Данная модель специально вносит неустойчивость в течение путем занижения величины турбулентной вязкости в областях сетки, имеющих достаточно высокое разрешение (небольшой размер ячеек) [64, 65]. Течение,

полученное с использованием SAS-SST-std модели турбулентности, отличается существенной нестационарностью: все газодинамические параметры с течением времени претерпевают постоянное пульсационное изменение. Для примера, на рис. 4.5 представлены мгновенные поля модуля скорости, статической температуры и энергии турбулентности в плоскости продольного разреза расчетного домена.

Как и в предыдущем случае, для визуализации потока газа, полученного с использованием модели SAS-SST-std, были построены линии тока в плоскости продольного разреза домена, см. рис. 4.6. В отличие от  $k-\varepsilon$ -std, модели SAS-SST-std показала крайне несимметричное течение газа с прецессией обратного (центрального) потока относительно оси симметрии камеры энергоразделения. Визуализация течения также позволила установить наличие вторичных крупномасштабных вихревых структур, которые на проявлялись во всех предшествующих расчетах. Наглядная визуализация данных вторичных вихревых структур, показанная на рис. 4.7 (а), выполнена с помощью алгоритма Vortex Core Region в пост-процессоре ANSYS CFD Post. Также для наглядности на рис. 4.7 (б) показаны несколько трехмерных линий тока, полученных с использованием модели SAS-SST-std. Существование вторичных крупномасштабных вихревых структур (вихревых жгутов) в камере энергоразделения было подтверждено экспериментально [199], см. рис. 2.7.

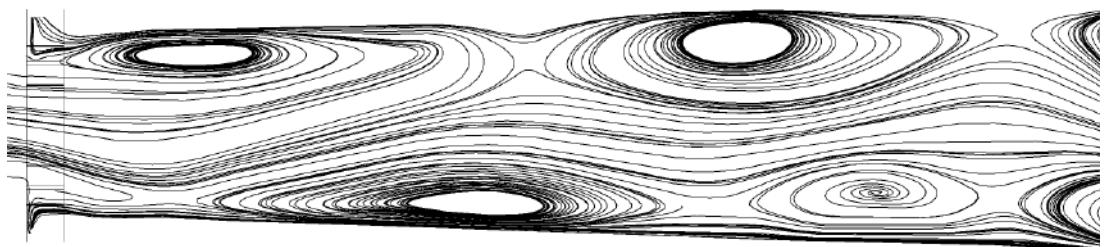


Рис. 4.6. Линии тока в продольном сечении вихревой трубы, полученные с применением SAS-SST-std модели турбулентности

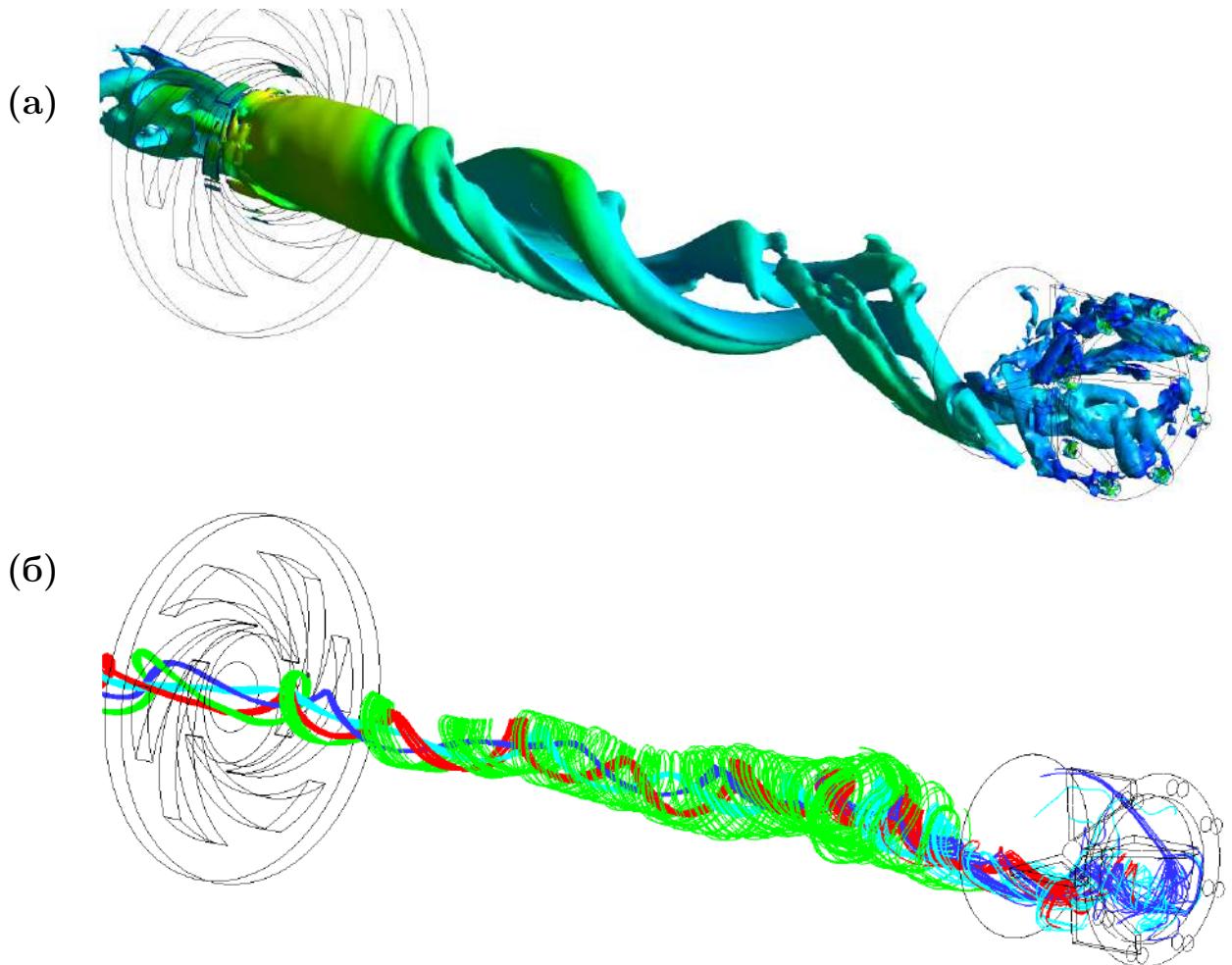


Рис. 4.7. Визуализация вторичных крупномасштабных вихревых структур (жгутов) в камере энергоразделения вихревой трубы, полученных при помощи SAS-SST-std модели турбулентности: (а) визуализация при помощи алгоритма Vortex Core Region; (б) трехмерные линии тока

Оценка интегральных характеристик вихревой трубы (2.1), (2.3), (2.5) на основе численных расчетов с применением различных моделей турбулентности и расчетных сеток сведены в таблицу 4.3. Наибольшая величина изоэнтропного КПД вихревой трубы, полученная численно, составила  $\eta_s = 0.24$ . При этом испытания физического образца вихревой трубы, выполненные автором диссертации, показали более высокую величину изоэнтропного КПД, на уровне  $\eta_s = 0.36$ . Возникшая погрешность численной модели (около 30%) хорошо согласуется с другими литературными данными, как показано в разделе 2.2. настоящей диссертации.

В итоге можно отметить, что несмотря на значительные различия в ми-

роструктуре течений, полученных с использованием  $k$ - $\varepsilon$ -std и SAS-SST-std моделей турбулентности, интегральные значения изоэнтропного КПД изменились незначительно, в диапазоне  $0.2 \leq \eta_s \leq 0.24$ , см. табл. 4.3.

Таблица 4.3  
Интегральные характеристики вихревой трубы, полученные с применением различных моделей турбулентности

	Модель турбулентности	Количество ячеек сетки, тыс. шт	$\varphi_c$	$\Delta T_c, ^\circ C$	$\eta_s$
1	ZeroEqui-std	500	0.64	10.9	0.1
2	$k$ - $\varepsilon$ -std	500	0.59	23.3	0.21
8	$k$ - $\varepsilon$ -std	1 500	0.57	24.7	0.22
3	$k$ - $\varepsilon$ -real-std	500	0.58	26.0	0.24
4	$k$ - $\varepsilon$ -RNG-std	2 500	0.73	24.4	0.22
6	SST-std	500	0.58	24.3	0.22
5	SAS-SST-std	2 500	0.7	23.5	0.21
7	SAS-SST-std	500	0.64	21.7	0.20
Экспериментальные данные докторанта (испытания промышленного образца)			0.65	40.0	0.36

#### 4.2. Численное исследование течения газа в двухконтурной вихревой трубе

Другим типом вихревых труб, рассматриваемом в настоящей диссертации, является двухконтурная вихревая труба, предложенная в работах [129, 187, 197, 198]. В отличие от разделительной трубы, схема которой показана на рис. 4.1, в двухконтурной вихревой трубе присутствует дополнительный вход  $G_2$ , через который газ подается в центральную часть камеры энергоразделения противотоком к основному потоку  $G_1$ , см. рис. 4.8. Соглас-

но [129], основная идея такого подхода состоит в том, чтобы формировать горячий выход вихревой трубы  $G_3$  в основном из газа, подводимого через основной сопловой ввод  $G_1$ , а холодный выход вихревой трубы из газа, подводимого через ввод дополнительного потока  $G_2$ . Размеры исследуемой двухконтурной вихревой трубы заимствованы из [187] и сведены в таблицу 4.4.

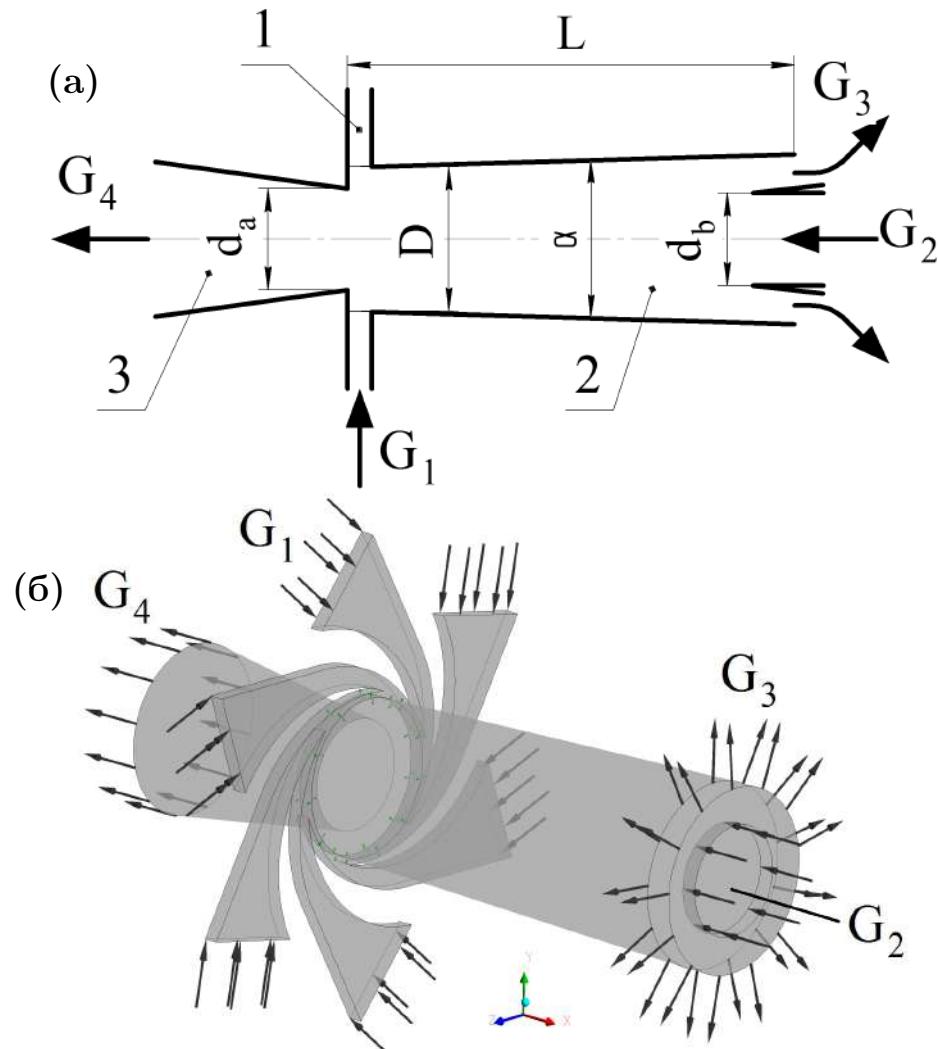


Рис. 4.8. Схема двухконтурной вихревой трубы: (а) основные обозначения и размеры; (б) общий вид вихревой трубы и направления движения газа.  $G_1$  - основной входной поток сжатого газа;  $G_2$  - дополнительный поток;  $G_3$  - выход горячего потока;  $G_4$  - выход холодного потока.

Численное решение системы газодинамических уравнений выполнялось в коммерческом пакете ANSYS CFX. Параметры модели, такие как свойства воздуха, начальные условия и др. полностью совпадали с численной моде-

лью, рассмотренной в предшествующем разделе 4.1.. Отличия заключались в граничных условиях, использованных моделях турбулентности и параметрах расчетной сетки. Сведения о граничных условиях сведены в таблицу 4.5.

Таблица 4.4

Геометрические размеры двухконтурной вихревой трубы Пиралишвили [129, 187, 197, 198], см. рис. 4.8.

Диаметр камеры энергоразделения	$D$ , мм	30
Диаметр диафрагмы	$d_a$ , мм	21
Диаметр сопла дополнительного потока	$d_b$ , мм	21
Длина камеры энергоразделения	$L$ , мм	$3 \times D = 90$
Угол конусности камеры энергоразделения	$\alpha$ , °	3

Таблица 4.5

Границные условия в моделях двухконтурной вихревой трубы.

Граница	Границные условия	
Вход в сопловой аппарат	$G_1$	Абсолютное статическое давление $p = 400$ кПа Статическая температура $T = 300$ К Интенсивность турбулентности $I = 5\%$
Вход дополнительного потока	$G_2$	Статическая температура $T = 300$ К Интенсивность турбулентности $I = 5\%$ Массовый расход в диапазоне $G_2 \in [0, 0.056]$ кг/с Массовый расход варьировался для изменения доли холодного потока $\varphi_c$ (2.3)
Выход горячего потока	$G_3$	Массовый расход равный расходу основного потока: $G_3 = G_1 = 0.03$ кг/с
Выход холодного потока	$G_4$	Абсолютное статическое давление $p = 100$ кПа
Твердые стенки		Условие прилипания $V = 0$ Условие адиабатичности $q = 0$

Структурированная расчетная сетка, показанная на рис. 4.9, была построена при помощи сеточного процессора ANSYS ICEM CFD. Как видно, сетка состоит из двух частей: сопла и камеры энергоразделения вихревой трубы. Сопряжение этих частей сетки в единое целое осуществляется путем вычисления потоков всех переменных через соответствующий интерфейс - цилиндрическую границу, общую для двух сеток. Интерфейс хорошо виден на

рис. 4.9 (б). Количество ячеек сетки варьировалось в расчетах для исследования влияния разрешения сетки на результаты вычислений (Grid Independence Study). Для увеличение разрешения сетки производилось уменьшение объема каждой из ячеек. Таким образом, разрешение сетки увеличивалось равномерно по всем направлениям.

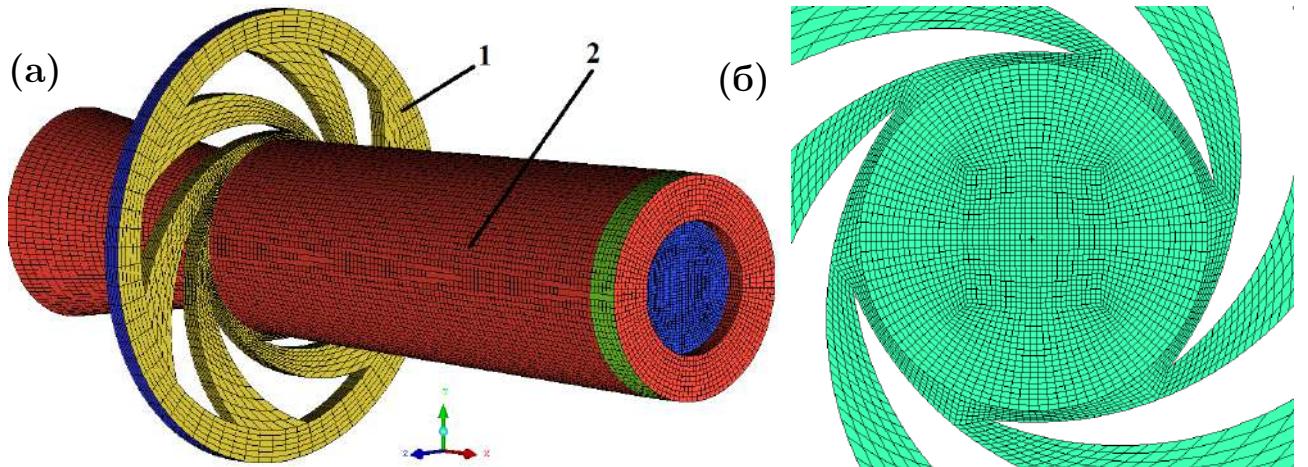


Рис. 4.9. (а) Общий вид расчетной сетки двухконтурной вихревой трубы; (б) расчетная сетка в поперечном сечении сопла: 1 - сопловой ввод; 2 - камера энергоразделения

Вычисления производились на высокопроизводительной рабочей станции, содержащей два процессора с общим количеством ядер 24 и 100 Гб оперативной памяти. В зависимости от разрешения рабочей сетки и выбранной модели турбулентности, каждый из расчетов выполнялся от 0.5 до 20 дней для моделирования 0.11 сек. физического времени.

#### **4.2.1. Стандартные модели турбулентности на основе гипотезы Буссинеска**

Были исследованы несколько моделей турбулентности данного класса, а именно  $k-\varepsilon$ -std,  $k-\varepsilon$ -RNG-std и SAS-SST-std. Перечень всех проведенных вычислений с указанием как модели турбулентности, так и параметров сетки, собран в таблице 4.6. Таблица показывает, что расчет №1, выполненный на очень грубой сетке с использованием модели  $k-\varepsilon$ -std, дает низкую величину

максимума изоэнтропного КПД (2.5), а именно  $\eta_{s,max} = 0.0956$ . Измельчение расчетной сетки приводит к росту  $\eta_{s,max}$ . Однако расчеты № 4, 5 и 6 дали очень близкие величины  $\eta_{s,max}$ , что говорит о независимости численного решения от размера ячеек в этих случаях, а дальнейшее измельчение сетки нецелесообразно. Аналогичная ситуация наблюдается для SAS-SST-std модели турбулентности. Таким образом, расчетная сетка с количеством ячеек  $\sim 271000$  является достаточной для моделей на основе гипотезы Буссинеска.

Таблица 4.6  
Параметры моделей двухконтурной вихревой трубы и результаты моделирования

№	Количество ячеек	Модель турбулентности	$\eta_{s,max}$	$\varphi_c$ при $\eta_{s,max}$
Экспериментальные данные [187]				0.37
1	11 000	$k-\varepsilon$ -std	0.0956	0.96
2	44 000	$k-\varepsilon$ -std	0.0116	0.89
3	92 000	$k-\varepsilon$ -std	0.133	0.93
4	175 000	$k-\varepsilon$ -std	0.138	0.93
5	271 000	$k-\varepsilon$ -std	0.139	0.93
6	823 000	$k-\varepsilon$ -std	0.139	0.93
7	271 000	$k-\varepsilon$ -RNG-std	0.125	1.12
8	11 000	SAS-SST-std	0.05	1.20
9	44 000	SAS-SST-std	0.08	1.35
10	92 000	SAS-SST-std	0.095	1.40
11	175 000	SAS-SST-std	0.13	1.20
12	271 000	SAS-SST-std	0.17	1.20
13	823 000	SAS-SST-std	0.17	1.60

Расчетные характеристики двухконтурной вихревой трубы, соответствующие всем моделям, перечисленным в таблице 4.6, показаны на рис. 4.10. Графики на рис. 4.10 (а) подтверждают, что расчетная сетка №5 (количество ячеек 271 000), совмещенная с моделью турбулентности  $k-\varepsilon$ -std, дает решение не зависящее от размера ячеек. С другой стороны, модель турбулентности  $k-\varepsilon$ -RNG-std на той же сетке (модель №7, 271 000 ячеек) показывает уменьшение максимума изоэнтропного КПД (2.5) до  $\eta_{s,max} = 0.125$  ( $\eta_{s,max} = 0.139$

для модели №5). Одновременно,  $k$ - $\varepsilon$ -RNG-std показывает смещение максимума изоэнтропного КПД в зону более высоких долей холодного потока  $\varphi_c$ .

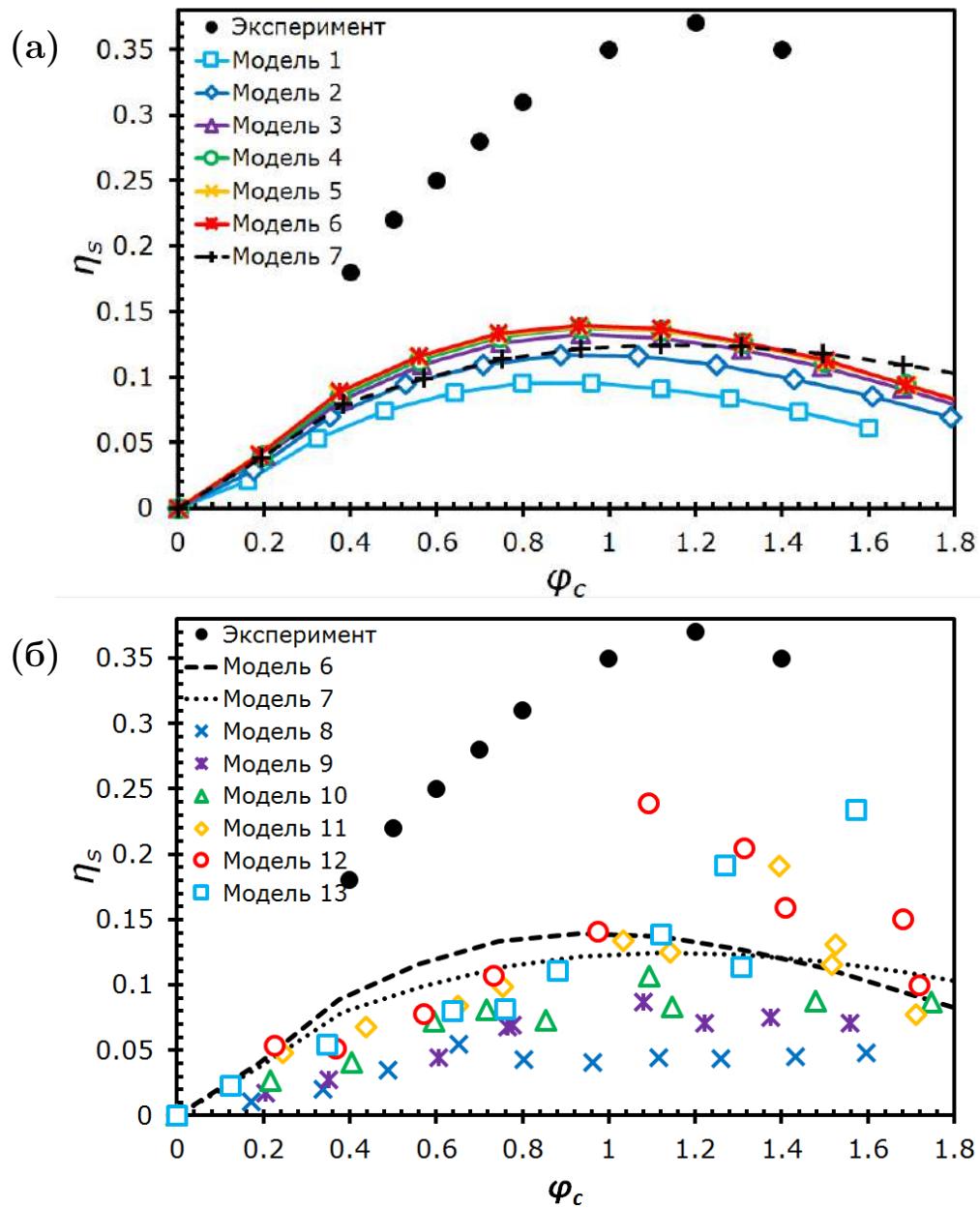


Рис. 4.10. Сравнение расчетных характеристик двухконтурной вихревой трубы с экспериментальными данными Пиралишвили [187]: (а) модели турбулентности  $k$ - $\varepsilon$ -std и  $k$ - $\varepsilon$ -RNG-std; (б) модель турбулентности SAS-SST-std

Модель турбулентности SAS-SST-std дает нестационарное во времени течение газа. Это приводит к более стохастическому поведению расчетных характеристик двухконтурной вихревой трубы, что видно из рис. 4.10 (б). Величина максимума изоэнтропного КПД, полученная моделями №12 и 13, значительно превышает (примерно на 20%) соответствующую величину, полу-

ченной моделью №5. Кроме того, SAS-SST-std показывает увеличение доли холодного потока  $\varphi_c$ , при которой наблюдается максимум  $\eta_{s,max}$ .

Сравнивая расчетные величины с экспериментальными данными [187], показанными на рис. 4.10 (а) и (б), а также в таблице 4.6, можно сделать следующие выводы:

- Все рассмотренные модели турбулентности ( $k-\varepsilon$ -std,  $k-\varepsilon$ -RNG-std, SAS-SST-std) показывают значительно заниженную величину изоэнтропного КПД  $\eta_s$  вихревой трубы.
- Модель турбулентности  $k-\varepsilon$ -RNG-std дает более точную оценку доли холодного потока, соответствующей максимуму  $\eta_{s,max}$ , а именно  $\varphi_c \approx 1.12$  (экспериментальная величина  $\varphi_c \approx 1.2$ ).
- Модель турбулентности SAS-SST-std дает наиболее точную оценку как величины изоэнтропного КПД  $\eta_s$ , так и доли холодного потока  $\varphi_c$ . А именно, расчетный максимум изоэнтропного КПД  $\eta_{s,max}$  был обнаружен при доле холодного потока  $\varphi_c \approx 1.2$ , что очень хорошо соответствует экспериментам.

Рисунок 4.11 показывает поля скорости, полученные с применением моделей №6 (а) и №13 (б). Оба рисунка построены для одной и той же доли холодного потока  $\varphi_c \approx 0.9$ . Видно, что модель  $k-\varepsilon$ -std дает гладкое распределение скорости в проточной части вихревой трубы. Распределение других газодинамических параметров (давление, плотность, температура и др.) является также гладким. Полученное течение близко к осесимметричному. С другой стороны, модель SAS-SST-std дает нестационарное асимметричное течение, как видно из рис. 4.11 (б). В целом, картина течения в двухконтурной вихревой трубе качественно совпадает с течение в разделительной вихревой трубе, см. рис. 4.3 и 4.5.

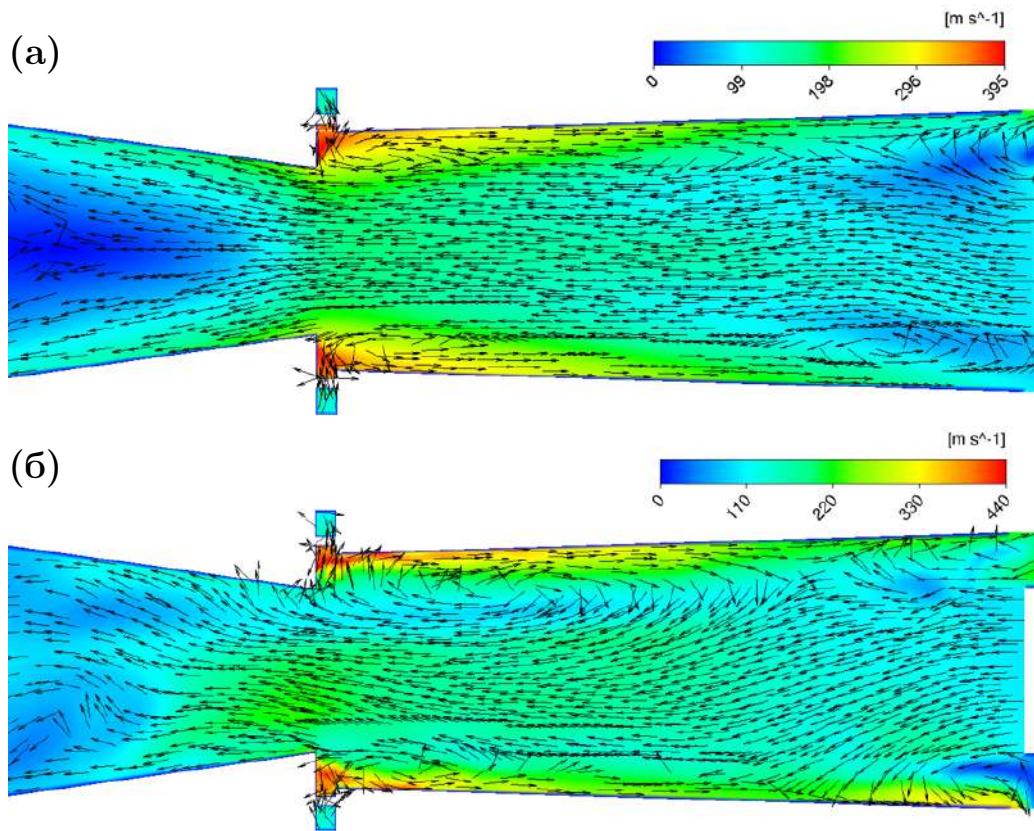


Рис. 4.11. Поля скорости в продольном разрезе двухконтурной вихревой трубы, полученные при помощи моделей турбулентности (а)  $k$ - $\varepsilon$ -std и (б) SAS-SST-std

#### 4.2.2. Стандартные модели рейнольдсовых напряжений RSM и крупных вихрей LES

На данном этапе исследования была сделана попытка увеличить точность моделирования эффекта Ранка-Хилша путем использования более тяжелых моделей турбулентности RSM-LRR-std и LES-std. Все использованные в исследовании модели сведены в таблицу 4.7, которая является продолжением таблицы 4.6. Видно, что модели №19 (RSM-LRR-std, 271 000 ячеек) и №20 (RSM-LRR-std, 823 000 ячеек) дают близкую величину максимального изоэнтропического КПД  $\eta_{s,max} \approx 0.26$ . Это говорит о том, что использованная расчетная сетка (823 000 ячеек) является достаточной и не требует измельчения. С другой стороны, величина турбулентной вязкости  $\mu_t$  в модели LES-std (модели №14-16) напрямую зависит от размера ячеек расчетной сетки, см. уравнение (1.41). Таким образом, точность расчета будет увеличиваться по мере

измельчения расчетной сетки, а количество ячеек определяется только временем расчета и доступными вычислительными ресурсами.

Таблица 4.7  
Параметры моделей двухконтурной вихревой трубы и результаты моделирования

№	Количество ячеек	Модель турбулентности	$\eta_{s,max}$
Экспериментальные данные [187]			0.37
14	823 000	LES-std	
15	2 771 000	LES-std	
16	8 069 000	LES-std	
17	92 000	RSM-LRR-std	0.173
18	175 000	RSM-LRR-std	0.231
19	271 000	RSM-LRR-std	0.260
20	823 000	RSM-LRR-std	0.260

Расчетные характеристики двухконтурной вихревой трубы, полученные с использованием перечисленных в таблице 4.7 моделей, показаны на рис. 4.12. Поскольку LES-std модель турбулентности дает крайне нестационарное течение, расчетные величины изоэнтропного КПД  $\eta_s$  и доли холодного потока  $\varphi_c$  быстро меняются во времени для моделей №14-16. Поэтому, для данных моделей на рис. 4.12 нанесены осредненные по времени величины  $\eta_s$  и  $\varphi_c$ .

Из рис. 4.12 видно, что ни одна из моделей турбулентности не дает точную оценку интегральных характеристик вихревой трубы. При этом, наихудший результаты был получен при помощи  $k-\varepsilon$ -std модели турбулентности (модель №6 в таблице 4.6). Модели №14-16 (LES-std) показали наиболее точные оценки изоэнтропного КПД по сравнению с экспериментальными данными [187] для высоких долей холодного потока  $\varphi_c \approx 1.6$ . Однако для низких долей  $\varphi_c$  точность LES-std модели турбулентности оказалась значительно ниже. В соответствии с [200], понижение точности LES-std модели может быть связано с ростом значения мелкомасштабной турбулентности, для разрешения которой требуется использование еще более мелкой расчетной сетки. Модель рейнольдсовых напряжений RSM-LRR-std (№17-20) показала значительно более

высокую точность по сравнению с  $k$ - $\varepsilon$ -std при оценке интегральных характеристик вихревой трубы, см. рис. 4.12. Кроме того, модель RSM-LRR-std оказалась менее чувствительна к режиму работы вихревой трубы (к доле холодного потока  $\varphi_c$ ) по сравнению с LES-std моделью.

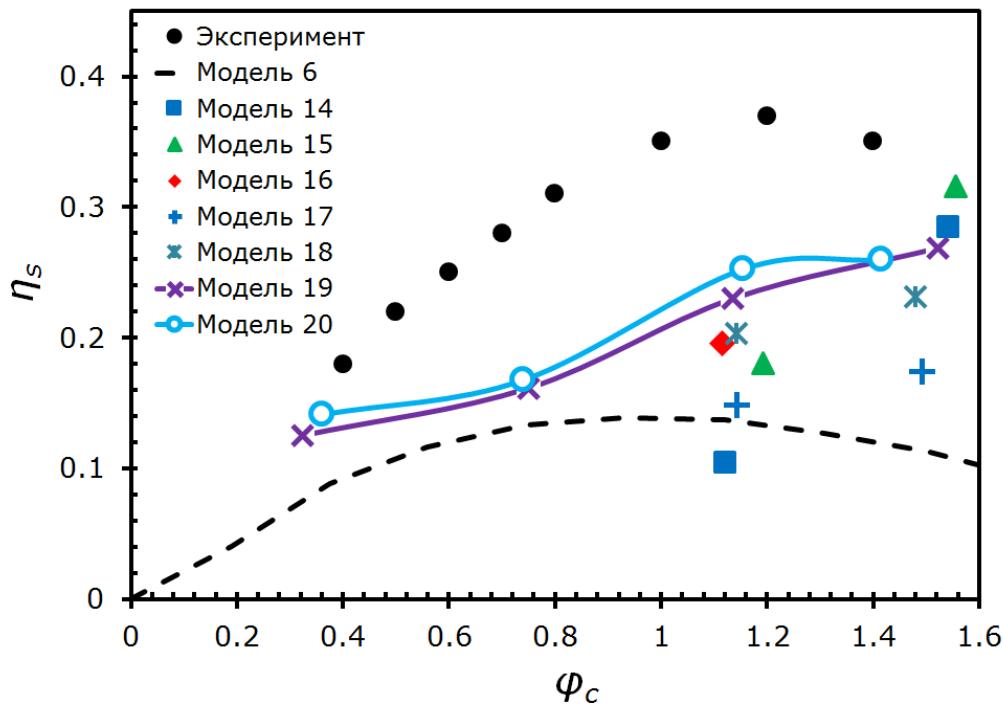


Рис. 4.12. Сравнение расчетных характеристик двухконтурной вихревой трубы с экспериментальными данными Пиралишвили [187]: модели турбулентности RSM-LRR-std и LES-std

Более детальное исследование влияния размеров ячеек расчетной сетки на точность LES-std модели турбулентности выполнено путем сравнения результатов расчета с использованием моделей №14, 15 и 16. При этом, модель №16 оказалась чрезвычайно затратна с вычислительной точки зрения, поэтому был рассмотрен только режим с низкой долей холодного потока  $\varphi_c$ . Из рис. 4.12 видно, что модель №14 оказалась наименее точной из всех рассмотренных моделей. По мере увеличения количества расчетных ячеек, точность оценки изоэнтропического КПД  $\eta_s$  растет. Однако для низкой доли холодного потока, величина  $\eta_s$  значительно отличается от экспериментальных измерений даже для наиболее мелкой сетки (модель №16). Дальнейшее измельчение расчетной сетки не представляется возможным из-за вычислительных ограничений.

ничений.

Рисунки 4.13–4.15 показывают мгновенные картины течения в проточной части вихревой трубы, полученные при помощи моделей турбулентности №14 (LES-std) и №20 (RSM-LRR-std) с использованием одинаковых расчетных сеток. Рисунки были получены для близких режимов работы вихревой трубы, а именно для доли холодного потока в диапазоне  $1.42 \leq \varphi_c \leq 1.54$ .

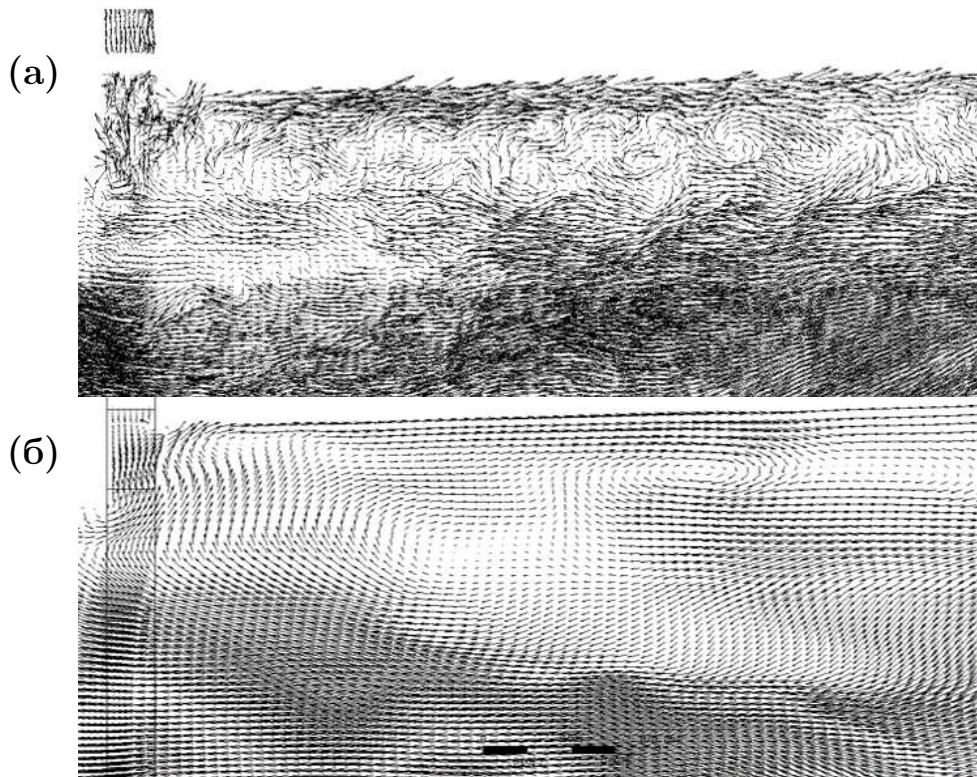


Рис. 4.13. Векторные поля скорости в продольном сечении двухконтурной вихревой трубы, полученные при помощи моделей (а) №14 (LES-std) и (б) №20 (RSM-LRR-std), см. табл. 4.7

Векторное поле скорости, полученное при помощи LES-std модели турбулентности, оказалось значительно более сложным по сравнению с моделью RSM-LRR-std, см. рис. 4.13 (а) и (б). Множество вторичных турбулентных вихревых структур показала LES-std модель, в то время как RSM-LRR-std показала наличие только нескольких крупномасштабных циркуляционных зон. Распределение температуры торможения по плоскости продольного разреза вихревой трубы изображено на рис. 4.14. Стохастическое и крайне нестационарное поле температур торможения было получено при помощи LES-std

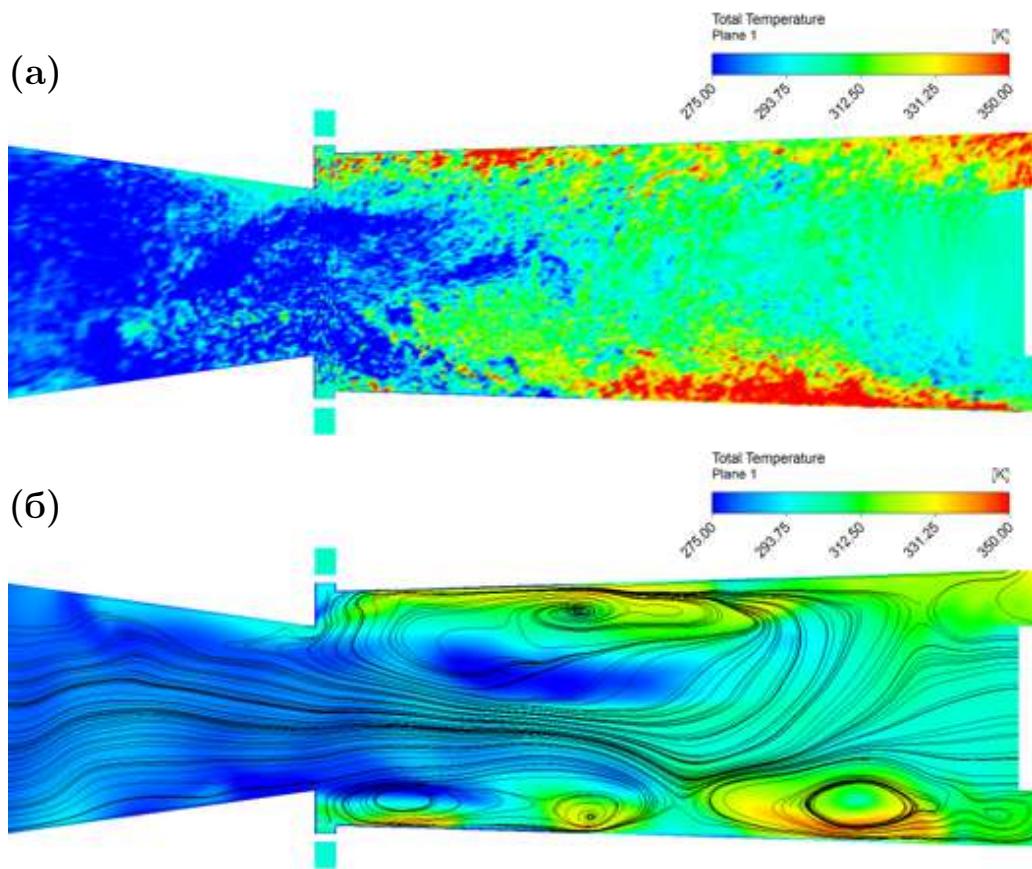


Рис. 4.14. Распределение температуры торможения по плоскости продольного разреза двухконтурной вихревой трубы: (а) модель №14 (LES-std) и (б) модель №20 (RSM-LRR-std), см. табл. 4.7

модели турбулентности, в то время как RSM-LRR-std продемонстрировала гладкое распределение температуры.

Аналогично анализу, представленному на рис. 4.7, алгоритм Vortex Core Region был использован для визуализации вторичных вихревых структур в проточной части двухконтурной вихревой трубы. Рис. 4.15 (а) показывает, что LES-std модель турбулентности моделирует широкий диапазон масштабов турбулентных вихревых структур. В то же время, RSM-LRR-std моделирует только наибольшие по размеру вихревые структуры, что качественно согласуется с наблюдениями, сделанными на основе рис. 4.13. Исходя из этого можно заключить, что LES-std показывает качественно более правильную физическую картину турбулентности.

Также можно отметить, что вихревые поверхности на рис. 4.15 (б) име-

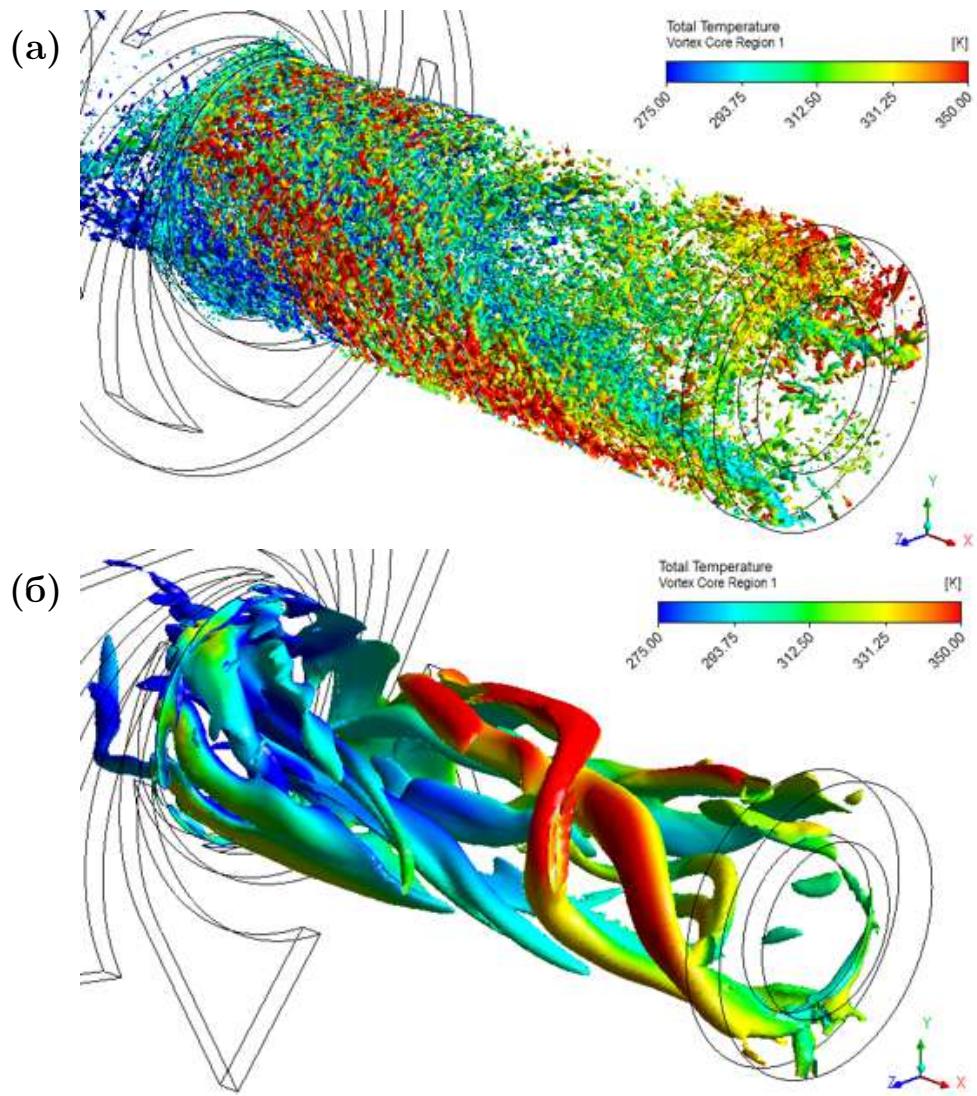


Рис. 4.15. Визуализация вторичных вихревых структур в проточной части двухконтурной вихревой трубы при помощи алгоритма Vortex Core Region: (а) модель №14 (LES-std) и (б) модель №20 (RSM-LRR-std), см. табл. 4.7

ют разную температуру торможения, зависящую от радиальной координаты. А именно, поверхность вторичного вихря имеет более высокую температуру торможения на больших радиальных координатах. Таким образом, жидкие частицы по мере движения по поверхности вторичного вихря могут попадать в зоны различной температуры и, таким образом, совершать микрохолодильные циклы (рис. 2.8), существование которых входит в гипотезу взаимодействия вихрей [222, 223, 224, 142, 143].

### 4.3. Исследование и калибровка модифицированной модели турбулентности $k-\varepsilon$ -VD

Проведенные в предыдущих разделах анализ показал, что стандартные модели турбулентности, такие как  $k-\varepsilon$ -std,  $k-\varepsilon$ -RNG-std, SAS-SST-std, RSM-LRR-std, LES-std, не позволяют с достаточной точностью моделировать эффект температурной стратификации Ранка-Хилша, наблюдаемый как в конической разделительной вихревой трубе, так и в двухконтурной вихревой трубе. В данном разделе делается попытка повысить точность численного моделирования путем использования модифицированной модели турбулентности  $k-\varepsilon$ -VD, опирающейся на Модифицированную Теорию Пути Смешения Прандтля и гипотезу взаимодействия вихрей [127, 129, 219, 220, 221], см. табл. 2.2. Уравнения численной модели (2.26), используемые в настоящем разделе, включают в себя как стандартные тепловые потоки, параметризующие турбулентный теплообмен ( $q_\sigma$  и  $q_\lambda$ ), так и дополнительный вклад Ван Деемтера  $q_\gamma$ , проявляющий себя в течениях с высоким градиентом давления.

Для калибровки и валидации модели  $k-\varepsilon$ -VD рассматриваются три конфигурации разделительной конической вихревой трубы, для каждой из которых имеются опубликованные измерения интегральных характеристик. Вихревая труба №1 полностью соответствует трубе, исследованной в разделе 4.1.. Вихревые трубы №2 и №3 были экспериментально исследованы в работах [226] и [225]. Общая схема вихревых труб представлена на рис. 4.1, а геометрические размеры сведены в таблицу 4.8.

Для исследования течения газа в указанных вихревых трубах с помощью модели  $k-\varepsilon$ -VD был использован модифицированный решатель vtRhoCentralFoam, что подробно обсуждается в разделе 2.5.. Модификация решателя включает в себя, прежде всего, измененное уравнение сохранения энергии, включающее в себя тепловой поток  $q_\gamma$  (2.26). Кроме этого, были добавлены новые граничные условия, такие как (2.31)–(2.34), адаптированные

специально для течения в вихревой трубе. Также были разработаны методы постобработки результатов “на лету”, которые включают в себя вычисление интегральных характеристик, таких как доля холодного потока  $\varphi_c$  (2.3), изоэнтропный КПД  $\eta_s$  (2.5) и холодильный КПД  $\eta_c$  (2.6). Основная информация о граничных условиях собрана в таблице 4.9.

Таблица 4.8  
Основные геометрические размеры вихревых труб, см. рис. 4.1

$\text{№}$	$D$ , мм	$d$ , мм	$L$ , мм	$\alpha$ ( $^\circ$ )	Размеры критического сечения сопла, мм	Количество каналов сопла
№1 [232]	16.8	9.8	168.0	3.5	$1.23 \times 4.0$	6
№2 [226]	10.1	4.5	100.0	4.0	$1.0 \times 3.0$	4
№3 [225]	11.0	5.0	106.0	4.0	$0.97 \times 1.41$	6

Таблица 4.9  
Границные условия для моделей вихревых труб №1–3:  $p^*$  - давление торможения;  $T^*$  - температура торможения;  $G_1, G_3, G_4$  - вход, горячий и холодный выходы вихревой трубы, см. рис. 4.1

$\text{№}$	Граница	Давление $p$	Скорость $V$	Температура $T$
№1	$G_1$	$p^* = 500$ кПа (2.32)	(2.33)	$T^* = 300$ К (2.34)
	$G_4$	100 кПа	нулевой градиент	нулевой градиент
	$G_3$	нулевой градиент	(2.31)	нулевой градиент
№2	$G_1$	$p^* = 600$ кПа (2.32)	(2.33)	$T^* = 300$ К (2.34)
	$G_4$	100 кПа	нулевой градиент	нулевой градиент
	$G_3$	нулевой градиент	(2.31)	нулевой градиент
№3	$G_1$	$p^* = 483$ кПа (2.32)	(2.33)	$T^* = 294.2$ К (2.34)
	$G_4$	100 кПа	нулевой градиент	нулевой градиент
	$G_3$	нулевой градиент	(2.31)	нулевой градиент

Расчетная сетка для всех трех вариантов вихревой трубы строилась с использованием комбинации из двух сеточных генераторов, а именно blockMesh и snappyHexMesh. При этом, blockMesh генерировал базовую сетку, включающую в себя все геометрические особенности расчетного домена за исключением соплового ввода. Далее snappyHexMesh применялся поверх базовой сетки

для формирования границ сопловых каналов и измельчения ячеек вблизи этих границ. Создание расчетной сетки для доменов различных размеров (см. таблицу 4.8) было автоматизировано при помощи скриптового языка OpenFOAM. Общий вид расчетной сетки вблизи соплового ввода представлен на рис. 4.16.

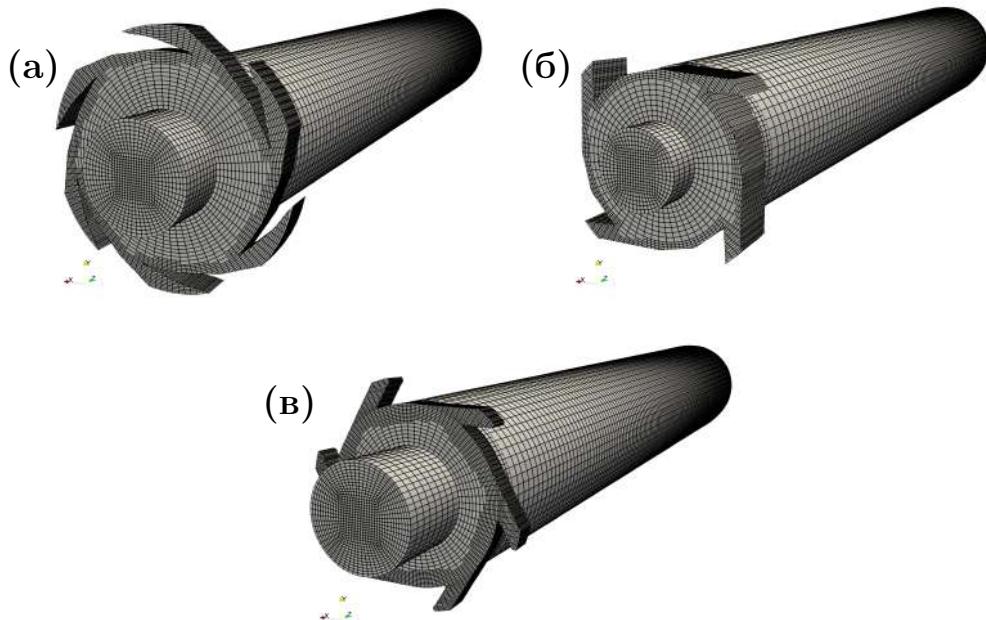


Рис. 4.16. Общий вид расчетной сетки вблизи соплового ввода: (а) вихревая труба №1, (б) №2, (в) №3, см. таблицу 4.8

Для всех выбранных вихревых трубы было выполнено исследование влияния разрешения расчетной сетки на результаты расчета с точки зрения интегральных характеристик вихревой трубы и распределения газодинамических параметров по проточной части. Были рассмотрены шесть расчетных сеток, указанных в таблице 4.10. Причем, увеличение количества ячеек расчетной сетки выполнялось следующим образом:

- Модифицировался скрипт сеточного генератора `blockMesh`, в котором увеличивалось количество разбиений блоков по всем направлениям.
- Генерировалась базовая сетка генератором `blockMesh`. Именно базовая сетка определяет общее разрешение расчетной сетки.

- Генератор snappyHexMesh комбинировал базовую сетку и файл геометрии в формате STL для формирования соплового ввода.

Таблица 4.10

Расчетные сетки, рассмотренные в исследовании вихревых труб №1–3

	Количество ячеек	Максимум $\eta_{s,max}$ (2.5); модель $k-\varepsilon$ -std
1	45 000	0.165
2	85 000	0.188
3	100 000	0.206
4	130 000	0.226
5	170 000	0.236
6	250 000	0.237

Расчетный максимум изоэнтропного КПД  $\eta_s$  вихревой трубы №1, полученный с применением модели  $k-\varepsilon$ -std, приведен в таблице 4.10. Видно, что расчетные сетки с количеством ячеек 170000 и 250000 показали практически совпадающий результат, что говорит о пригодности этих двух сеток для проведения дальнейшего исследования. В целом, полученное пространственное разрешение хорошо согласуется с описанными в предыдущих разделах исследованиями, выполненными с применением коммерческого пакета ANSYS CFX, см. таблицу 4.6.

#### 4.3.1. Калибровка модифицированной модели $k-\varepsilon$ -VD

Выражение для теплового потока Ван Деемтера  $q_\gamma$ , см. уравнение (2.24), включает в себя новый эмпирический коэффициент  $c_\gamma$ , величина которого на данном этапе исследования неизвестна. Оценку величины данного коэффициента можно сделать пользуясь разложением (2.21) и формулой (2.22):

$$c_\gamma \sim 1 - \frac{\sqrt[3]{\Omega}}{2\gamma} \frac{|\nabla p|}{p}, \quad (4.2)$$

где  $\Omega$  - объем ячейки расчетной сетки;  $\sqrt[3]{\Omega}$  - оценка размера ячейки расчетной сетки;  $|\nabla p|$  и  $p$  - оценки градиента статического давления и величины давления, соответственно.

Из приведенной оценки  $c_\gamma$  видно, что чем меньше размер ячеек сетки  $\sqrt[3]{\Omega}$ , тем ближе  $c_\gamma$  к единице. Интерпретировать это можно следующим образом: с уменьшением пространственного масштаба задачи кривая адиабаты асимптотически приближается к линейной зависимости. То есть,  $\Delta T \sim \Delta p$  для малых пространственных масштабов  $\sqrt[3]{\Omega} \rightarrow 0$ . Здесь следует подчеркнуть, что выражение (4.2) было получено путем линеаризации закона адиабаты через его разложение в ряд Тейлора в окрестности  $\sqrt[3]{\Omega} \rightarrow 0$ , см. выражение (2.21).

Для расчетной сетки №6 (таблица 4.10) типичный размер ячейки можно оценить как  $\sqrt[3]{\Omega} \sim 2 \times 10^{-4}$  м. Численные расчеты с использованием стандартной модели  $k-\varepsilon$ -std позволяют сделать оценку максимального градиента давления  $|\nabla p| \sim 5 \times 10^7$  Па/м, который соответствует статическому давлению на уровне  $p \sim 3 \times 10^5$  Па. Комбинируя указанные величины можно получить оценку величины  $c_\gamma$  для воздуха (показатель адиабаты  $\gamma = 1.4$ ):

$$c_\gamma \approx 1 - \frac{2 \times 10^{-4}}{2 \times 1.4} \times \frac{5 \times 10^7}{3 \times 10^5} \approx 0.988 \quad (4.3)$$

Несмотря на то, что полученное значение очень близко к единице, фактическая величина  $c_\gamma$  может значительно варьироваться в зависимости от используемой модели турбулентности. Для уточнения эмпирической величины  $c_\gamma$  требуется провести калибровку модели.

Была проведена серия численных расчетов для вихревых труб №1 и №2, см. таблицу 4.8. Величина коэффициента  $c_\gamma$  варьировалась в диапазоне  $0 \leq c_\gamma \leq 1$ . Во всех расчетах величина доли холодного потока была зафиксирована равной  $\varphi_c = 0.6$ . Экспериментальные значения изоэнтропного КПД для вихревых труб №1 и №2 при доли холодного потока  $\varphi_c = 0.6$  указаны

в статьях [232, 226]:  $\eta_{s,\varphi_c=0.6} = 0.374$  для трубы №1, и  $\eta_{s,\varphi_c=0.6} = 0.342$  для трубы №2.

Рисунок 4.17 показывает сравнение расчетных значений  $\eta_s$ , соответствующих различным величинам  $c_\gamma$ , с экспериментальным изоэнтропным КПД вихревых труб №1 и №2. Из рисунка видно, что исключение поправки Ван Деемтера  $q_\gamma$  из расчета путем выбора  $c_\gamma = 0$  приводит к значительной погрешности в оценке изоэнтропного КПД порядка 30%, что хорошо согласуется с выполненными ранее расчетами в коммерческом пакете ANSYS CFX, см. раздел. 4.1.. Увеличение коэффициента  $c_\gamma$  приводит к росту точности численной модели.

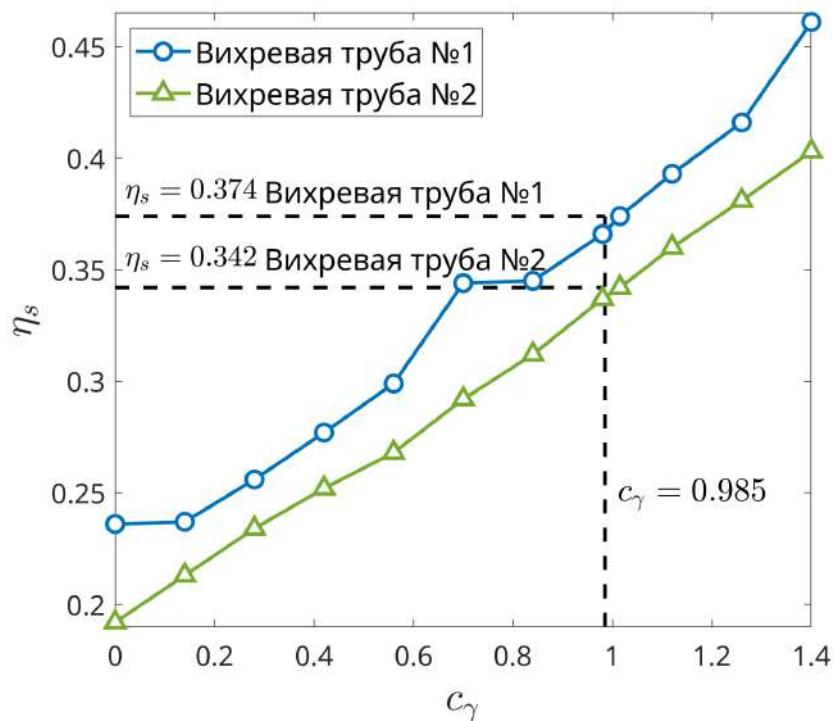


Рис. 4.17. Зависимость расчетного изоэнтропного КПД  $\eta_s$  (2.5) от величины коэффициента  $c_\gamma$ , построенная для вихревых труб №1 и №2, см. табл. 4.8.

Экспериментальные значения изоэнтропного КПД, а также соответствующая им величина  $c_\gamma$ , показаны пунктирными линиями. Доля холодного потока была выдержанна равной  $\varphi_c = 0.6$  (2.3) во всех расчетах и экспериментах.

Исходя из проведенной серии вычислительных экспериментов можно заключить, что  $c_\gamma \approx 0.985$  дает наилучшее совпадение расчетной величины изоэнтропного КПД с экспериментальным значением для доли холодного по-

тока  $\varphi_c = 0.6$ . Причем, найденная величина  $c_\gamma$  оказалась одинаковой как для вихревой трубы №1, так и для трубы №2. Более того, эмпирическое значение  $c_\gamma$  оказалось очень близко к теоретической оценке согласно (4.3). Это говорит о том, что сжатие турбулентных жидких частиц (молей), параметризованное поправкой Ван Деемтера  $q_\gamma$  в рамках Модифицированной Теории Пути Смещения Прандтля, близко к адиабатному.

#### **4.3.2. Интегральные характеристики и течение газа в вихревой трубе**

Для подтверждения сделанных выводов о величине калибровочного коэффициента  $c_\gamma \approx 0.985$  требуется провести более детальное исследование интегральных характеристик вихревых труб. Для этих целей требуются экспериментальные данные отличные от тех, которые были использованы на этапе калибровки модели  $k-\varepsilon$ -VD. Исходя из этого, в настоящем разделе рассматриваются вихревые трубы № 2 и 3; см. табл. 4.8.

Лабораторные измерения интегральных характеристик вихревых трубы № 2 и 3, таких как  $\Delta T_c$  (2.1),  $\varphi_c$  (2.3) и  $\eta_s$  (2.5), обсуждаются в работах [226] и [225], соответственно. Для вихревой трубы №2 точность измерения доли холодного потока оценивается как  $\Delta\varphi_c = \pm 2...8\%$ , а точность измерения степени понижения температуры  $\Delta T_c = \pm 3\%$ . Точность косвенного (непрямого) измерения величины изоэнтропного КПД можно оценить как  $\Delta\eta_c = \pm 4\%$ . Для вихревой трубы №3, соответствующие оценки точности прямых и косвенных измерения равны:  $\Delta\varphi_c = \pm 4\%$ ,  $\Delta T_c = \pm 1\%$ ,  $\Delta\eta_c = \pm 3\%$ .

На рис. 4.18 сравниваются интегральные характеристики вихревой трубы №2, измеренные в лаборатории, с расчетными величинами, полученными с применением как стандартной модели  $k-\varepsilon$ -std, так и модифицированной модели  $k-\varepsilon$ -VD. Планками погрешности показаны пределы точности лабораторных измерений. Как в численных, так и в натурных экспериментах, доля

холодного потока варьировалась в широких пределах.

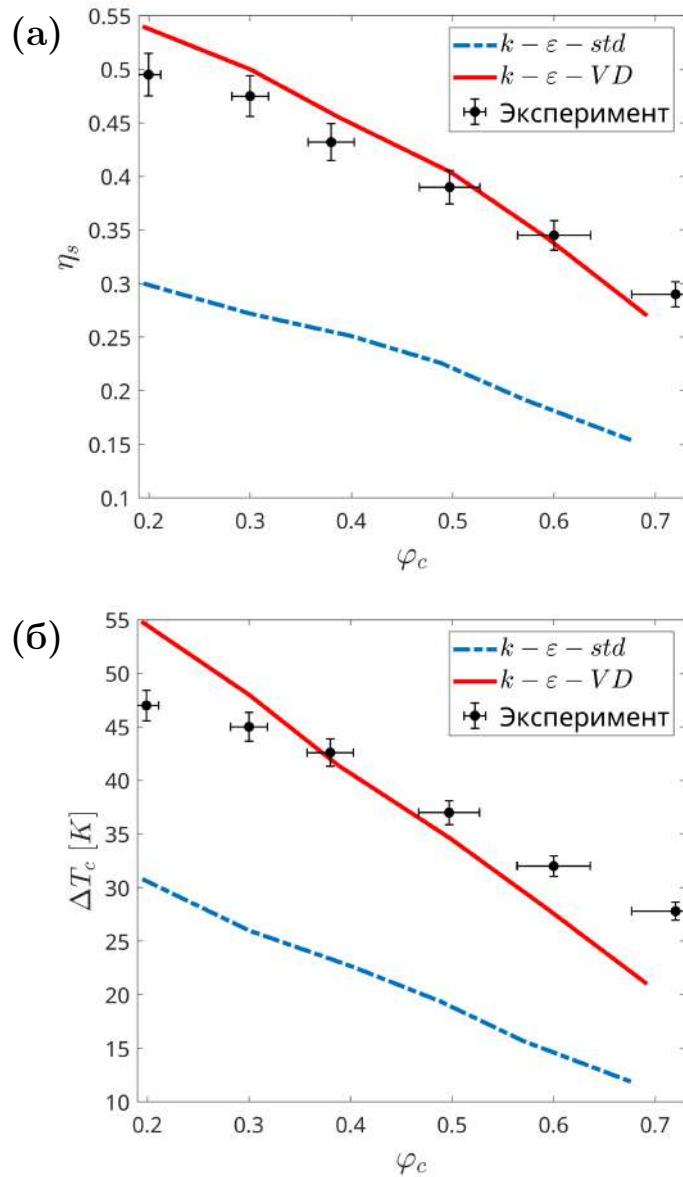


Рис. 4.18. Зависимость (а) изоэнтропного КПД  $\eta_s$  (2.5) и (б) степени понижения температуры  $\Delta T_c$  (2.1) от доли холодного потока  $\varphi_c$  (2.3) для вихревой трубы №2. Данные лабораторных измерений с соответствующими планками погрешности заимствованы из работы [226]

Из рис. 4.18 видно, что стандартная модель турбулентности  $k-\varepsilon$ -std показывает существенное отклонение графиков изоэнтропного КПД  $\eta_s$  и степени понижения температуры  $\Delta T_c$  от экспериментальных данных. Обнаруженнное отклонение хорошо согласуется с выводами, полученными выше по тексту, причем во всем диапазоне величин доли холодного потока. С другой сторо-

ны, применение модифицированной модели турбулентности  $k-\varepsilon$ -VD в значительной степени уменьшает отклонение расчетных величин от лабораторных измерений. Особенно хорошее соответствие численных и натурных экспериментов наблюдается для изоэнтропного КПД  $\eta_s$  при доле холодного потока  $\varphi_c = 0.6$ . Это объясняется тем, что калибровка модели турбулентности выполнялась именно для данного режима работы вихревой трубы.

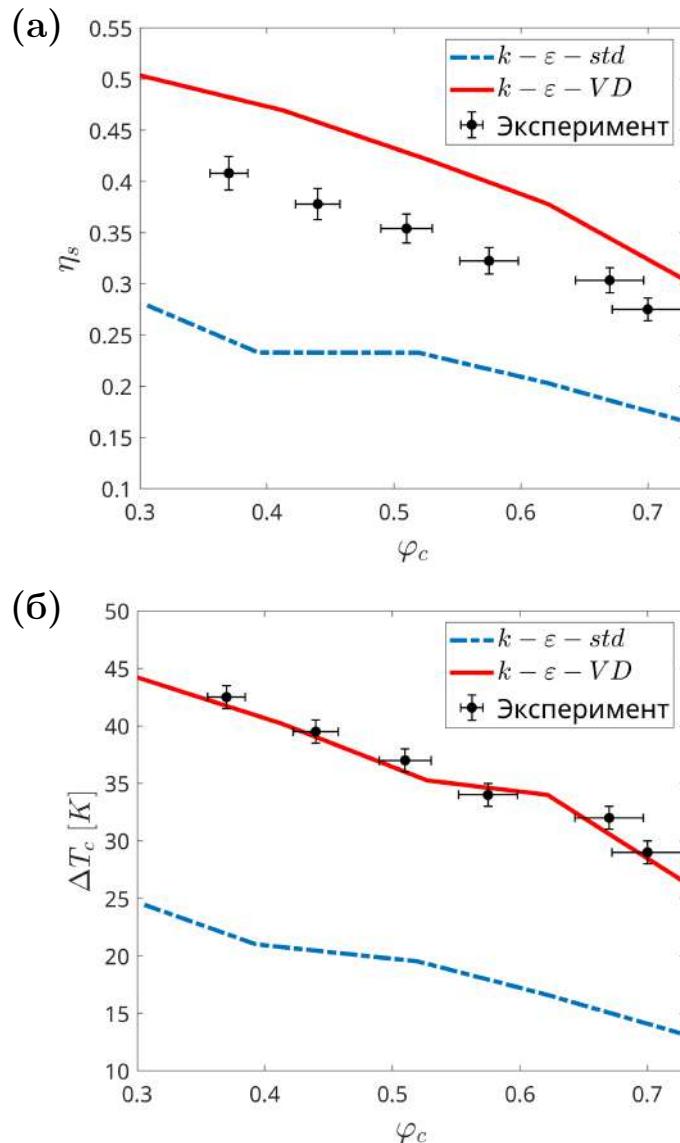


Рис. 4.19. Зависимость (а) изоэнтропного КПД  $\eta_s$  (2.5) и (б) степени понижения температуры  $\Delta T_c$  (2.1) от доли холодного потока  $\varphi_c$  (2.3) для вихревой трубы №3.

Данные лабораторных измерений с соответствующими планками погрешности

заимствованы из работы [225]

Схожая картина наблюдается и для интегральных характеристик вихревой трубы №3, показанных на рис. 4.19. Следует подчеркнуть, что данная вихревая труба (№3) не использовалась при калибровке модели турбулентности в разделе 4.3.1.. Несмотря на это, модель  $k$ - $\varepsilon$ -VD также показала существенное увеличение точности интегральных характеристик вихревой трубы по сравнению с точностью стандартной модели  $k$ - $\varepsilon$ -std. Это говорит о том, что значение калибровочного коэффициента  $c_\gamma$  было выбрано верно. Несмотря на это, следует отметить некоторое завышение изоэнтропного КПД  $\eta_s$  во всем диапазоне долей холодного потока  $\varphi_c$ . Одним из объяснений можно служить неточность измерения давления перед сопловым вводом вихревой трубы, обсуждаемая в статье [225].

Распределение статической (термодинамической) температуры по продольному сечению вихревых труб №2 и 3 изображено на рис. 4.20. Видно, что стандартная модель турбулентности  $k$ - $\varepsilon$ -std, см. подрисунки (а) и (в), показывает существование локального максимума статической температуры в приосевой области течения. Это качественным образом отличается от существующих экспериментальных измерений профиля статической температуры. Так, лабораторные измерения, представленные в работах [127, 194, 196], указывают на монотонное убывание статической температуры от стенки в направлении приосевой зоны течения. Локальные максимумы замечены не были. К аналогичным выводам приходят также в работах [195, 221].

Применение модифицированной модели турбулентности  $k$ - $\varepsilon$ -VD качественным образом меняет распределение статической температуры, см. рис. 4.20 (б) и (г). Модифицированная модель турбулентности показывает монотонное убывание статической температуры от стенки в направлении приосевой зоны течения, что хорошо согласуется с экспериментальными данными [127, 194, 195, 196, 221]. Очевидно, что дополнительный тепловой поток, а именно поправка Ван Деемтера  $q_\gamma$  в уравнениях (2.26), приводит к интенсификации теплопереноса из приосевой области течения в периферий-

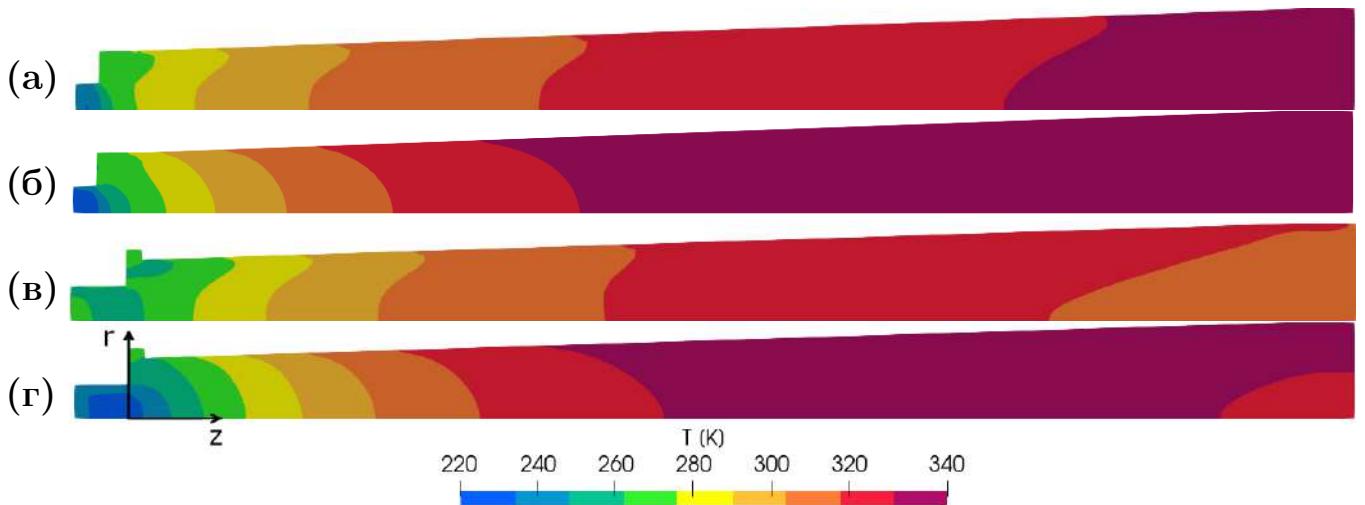


Рис. 4.20. Распределение статической температуры по продольному сечению вихревых труб №2 (подрисунки а и б) и №3 (подрисунки в и г). Результаты, полученные с применением стандартной модели турбулентности  $k$ - $\varepsilon$ -std, показаны на подрисунках (а) и (в). Подрисунки (б) и (г) показывают результаты, полученные с помощью модифицированной модели турбулентности  $k$ - $\varepsilon$ -VD. В связи с осесимметричностью течения, на всех подрисунках показана только верхняя полуплоскость продольного сечения вихревых труб.

ную, то есть, усиливает эффект Ранка-Хилша. Именно с этим можно связать рост интегральных показателей вихревых труб на рис. 4.18 и 4.19, приближающий расчетные величины изоэнтропного КПД  $\eta_s$  соответствующих труб к лабораторными измерениям.

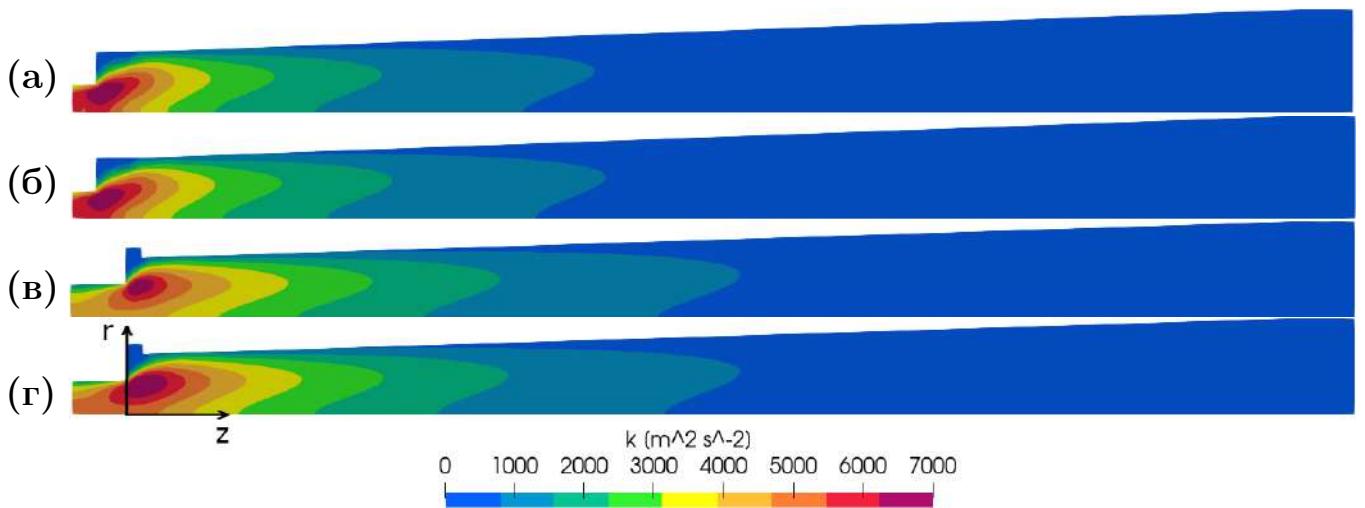


Рис. 4.21. Распределение кинетической энергии турбулентности  $k$  по продольному сечению вихревых труб №2 (подрисунки а и б) и №3 (подрисунки в и г). Подрисунки (а) и (в) соответствуют стандартной модели турбулентности  $k$ - $\varepsilon$ -std, а подрисунки (б) и (г) - модифицированной модели турбулентности  $k$ - $\varepsilon$ -VD.

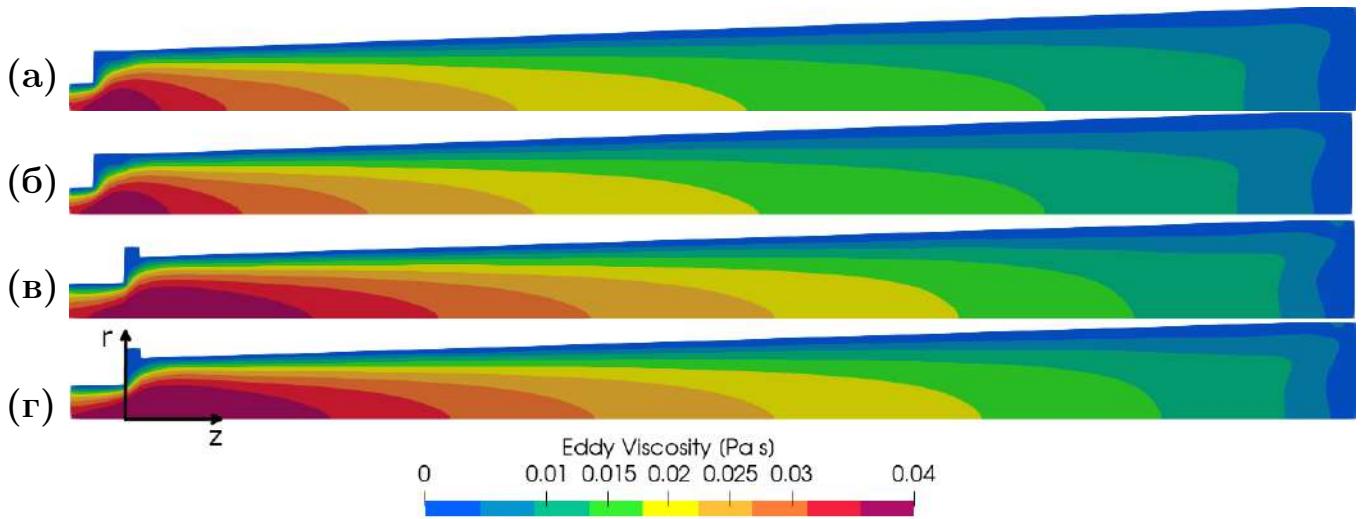


Рис. 4.22. Распределение турбулентной вязкости  $\mu_t$  по продольному сечению вихревых труб №2 (подрисунки а и б) и №3 (подрисунки в и г). Подрисунки (а) и (в) соответствуют стандартной модели турбулентности  $k$ - $\varepsilon$ -std, а подрисунки (б) и (г) - модифицированной модели турбулентности  $k$ - $\varepsilon$ -VD.

Рисунок 4.21 показывает распределение кинетической энергии турбулентности  $k$  по продольному сечению вихревых труб №2 и 3. Во всех расчетных случаях, т.е. на всех подрисунках, максимум  $k$  расположен в непосредственной близости от соплового ввода вихревой трубы. Применение модифицированной модели турбулентности  $k$ - $\varepsilon$ -VD взамен стандартной  $k$ - $\varepsilon$ -std не приводит к качественному перестроению распределения  $k$ . Аналогичные выводы можно сделать по отношению к распределению турбулентной вязкости  $\mu_t$ , изображенном на рис. 4.22. Более того, рисунки 4.21 и 4.22 вне зависимости от использованной модели турбулентности очень близки к результатам исследований других авторов [216, 228].

Исходя из приведенного анализа можно заключить, что усовершенствованная модель  $k$ - $\varepsilon$ -VD, по сравнению со стандартной  $k$ - $\varepsilon$ -std, воздействует главным образом на поля температуры в проточной части вихревых труб. Следует подчеркнуть, что поправка Ван Деемтера  $q_\gamma$  была внесена в уравнение сохранения энергии, см. (2.26). Это объясняет ее прямое влияние на распределение температуры. При этом, другие параметры течения также под-

вержены ее влиянию, однако не напрямую.

#### 4.3.3. Профили газодинамических параметров

Рисунки 4.23 и 4.24 показывают распределения статической температуры  $T$ , температуры торможения  $T^*$ , модуля скорости  $|V|$  и статического давления  $p$  по поперечному сечению вихревой трубы, расположенному на расстоянии одного диаметра от соплового ввода, см. рис. 4.1. Причем, графики на рис. 4.23 соответствуют вихревой трубе №2, в то время как рис. 4.24 соответствует вихревой трубе №3, см. табл. 4.8.

Из рисунков видно, что распределение статической температуры  $T$ , полученное с использованием модифицированной модели турбулентности  $k-\varepsilon$ -VD, качественным образом отличается от распределения температуры  $T$ , соответствующего стандартной модели  $k-\varepsilon$ -std. А именно, стандартная модель турбулентности  $k-\varepsilon$ -std указывает на существование локального максимума статической температуры в приосевой области проточной части вихревых труб, см. рис. 4.23(а) и 4.24(а).

Интенсификация теплопереноса за счет дополнительного теплового потока  $q_\gamma$  (2.26) в модели турбулентности  $k-\varepsilon$ -VD приводит к уменьшению статической температуры в приосевой области и соответствующему росту статической температуры в периферийной области проточной части вихревых труб. В результате локальный максимум в распределении  $T$  на рис. 4.23(а) и 4.24(а) исчезает, а само распределение статической температуры становится монотонно убывающим по направлению к центральной части вихревого течения. Как уже было отмечено выше по тексту, такое монотонное распределение очень хорошо качественно согласуется с экспериментальными исследованиями [127, 194, 195, 196, 221].

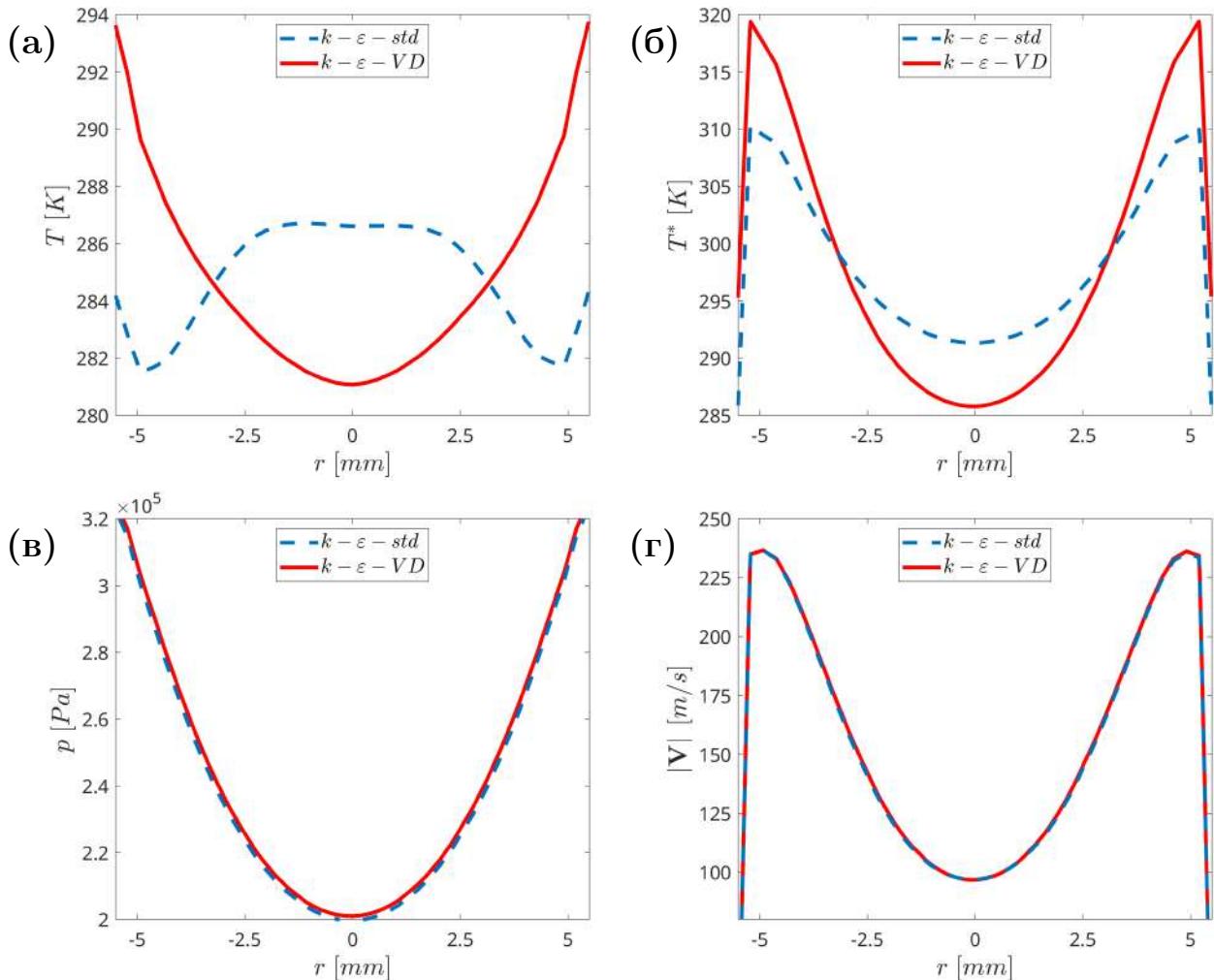


Рис. 4.23. Распределение (а) статической температуры  $T$ , (б) температуры торможения  $T^*$ , (в) статического давления  $p$  и (г) модуля скорости  $|V|$  по поперечному сечению вихревой трубы №2 (см. табл. 4.8), показанному на рис. 4.1. Изображенные профили газодинамических параметров были получены с использованием двух моделей турбулентности: стандартной  $k-\varepsilon$ -std и модифицированной  $k-\varepsilon$ -VD. Поперечное сечение, для которого были построены распределения газодинамических параметров, находится на расстоянии одного диаметра  $D$  от соплового ввода вихревой трубы. На графиках,  $r$  - радиальная координата.

В отличие от статической температуры, профили температуры торможения  $T^*$  на рис. 4.23(б) и 4.24(б) отличаются только количественно, но не качественно. Интенсификация теплообмена в модифицированной модели турбулентности  $k-\varepsilon$ -VD приводит к росту температурной стратификации в поперечном сечении вихревой трубы, что, в свою очередь, усиливает эффект

энергоразделения Ранка-Хилша. Таким образом, обсуждаемые графики температур торможения  $T^*$  хорошо согласуются с интегральными характеристиками вихревых труб на рис. 4.18 и 4.19.

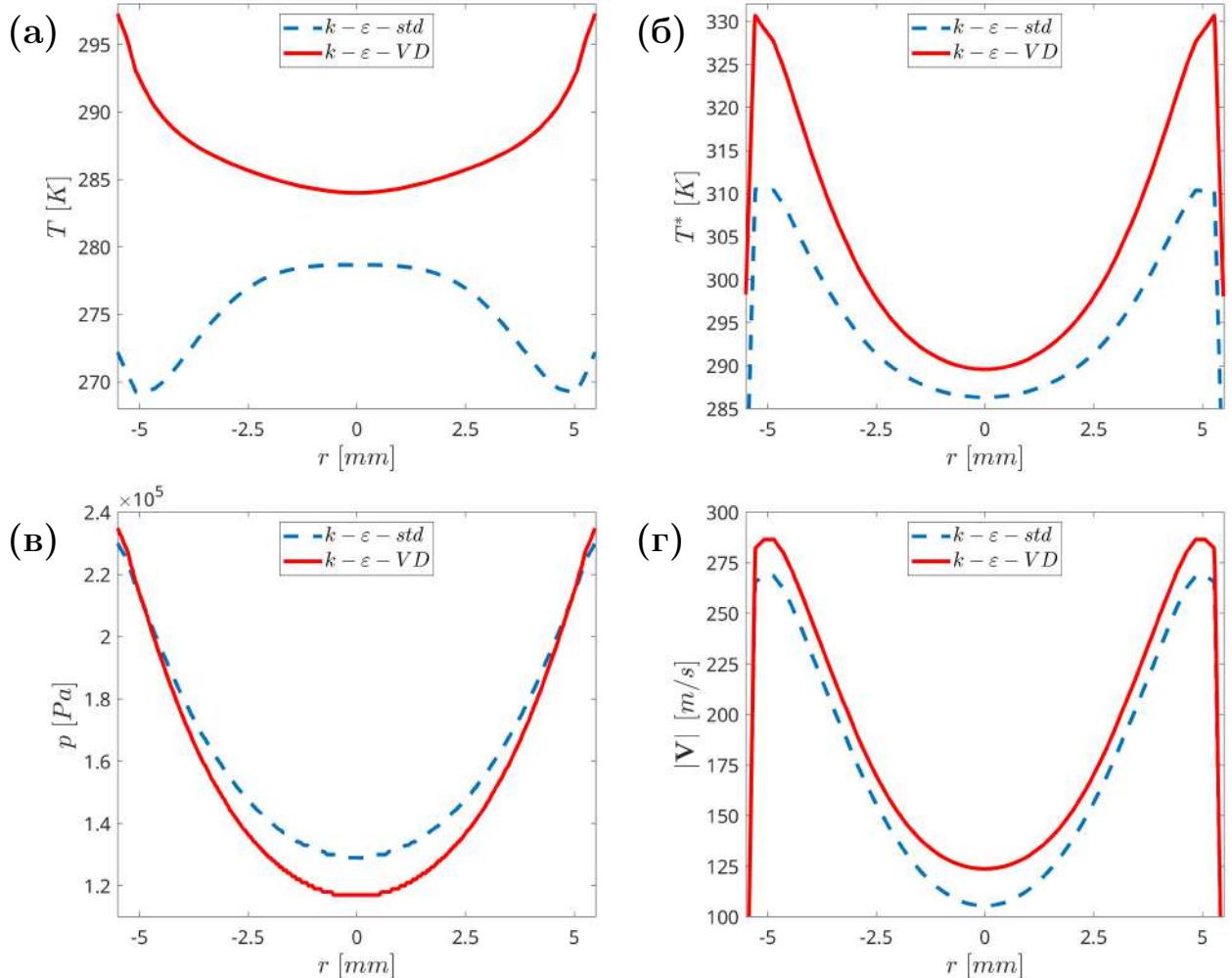


Рис. 4.24. Распределение (а) статической температуры  $T$ , (б) температуры торможения  $T^*$ , (в) статического давления  $p$  и (г) модуля скорости  $|V|$  по поперечному сечению вихревой трубы №3 (см. табл. 4.8), находится на расстоянии одного диаметра  $D$  от соплового ввода. На графиках,  $r$  - радиальная координата.

Распределения модуля скорости  $|V|$  и статического давления  $p$  по поперечному сечению вихревых труб №2 и 3, представленные на рис. 4.23(в,г) и 4.24(в,г), подтверждают, что поправка Ван Деемтера  $q_\gamma$  главным образом влияет на профили температур  $T$  и  $T^*$ . В то же время, другие газодинамические параметры течения, такие как скорость  $V$  или давление

$p$ , слабо меняются при переходе от стандартной модели  $k$ - $\varepsilon$ -std к модифицированной  $k$ - $\varepsilon$ -VD. Еще раз отмечается, что член  $q_\gamma$  непосредственным образом входит в уравнение энергии системы (2.26). Это объясняет его слабое вторичное влияние на газодинамические параметры отличные от внутренней энергии  $e$ , энталпии  $h$  или температуры  $T$ .

#### 4.3.4. Термальные потоки в вихревой трубе

Из проведенного выше анализа видно, что эффект температурного разделения Ранка-Хилла обусловлен балансом тепловых потоков  $q_\sigma$ ,  $q_\lambda$  и  $q_\gamma$ , входящих в уравнение энергии математической модели (2.26). Физический смысл каждого из указанных тепловых потоков сведен в таблицу 2.1. Также следует отметить, что указанные тепловые потоки представляют собой скалярные величины, характеризующие баланс входящих и выходящих потоков тепловой энергии через границу  $\Gamma$  контрольного объема  $\Omega$ , отнесенные к этому объему  $\Omega$ . То есть:

$$q_{\sigma,\lambda,\gamma} \sim \frac{1}{\Omega} \iint_{\Gamma} \vec{q} \cdot d\vec{\Gamma} \quad (4.4)$$

Положительная величина  $q_\sigma$ ,  $q_\lambda$  или  $q_\gamma$  говорит о притоке тепловой энергии в контрольный объем, а отрицательная величина - об оттоке тепловой энергии, соответственно. Также следует отметить, что  $q_\sigma$  и  $q_\lambda$  входят как в стандартную модель турбулентности  $k$ - $\varepsilon$ -std, так и в модифицированную  $k$ - $\varepsilon$ -VD. В то же время, поправка Ван Деемтера  $q_\gamma$  присутствует только в модели  $k$ - $\varepsilon$ -VD.

На рис. 4.25 приводится сравнение распределения величин  $q_\sigma$ ,  $q_\lambda$  и  $q_\gamma$  по продольному сечению вихревой трубы, показанному на рис. 4.1. Оба графика были получены с помощью модифицированной модели турбулентности  $k$ - $\varepsilon$ -VD для вихревой трубы №2 (подрисунок а) и трубы №3 (подрисунок б). Графики показывают радиальный перенос тепловой энергии из центра вихревого течения газа на его периферию при помощи вкладов  $q_\sigma$  и  $q_\gamma$ . Таким

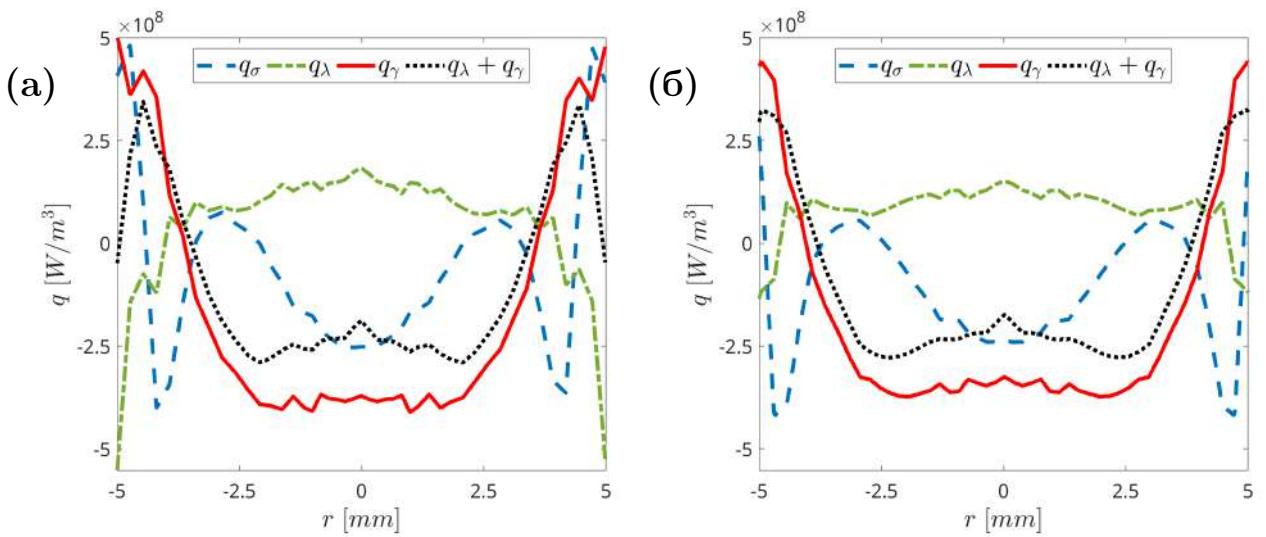


Рис. 4.25. Распределения тепловых потоков  $q_\sigma$ ,  $q_\lambda$  и  $q_\gamma$  (см. табл. 2.1) по поперечному сечению вихревой трубы, показанному на рис. 4.1. Подрисунки (а) и (б) показывают результаты расчетов для вихревых труб №2 и №3, соответственно.

образом, поправка Ван Деемтера  $q_\gamma$  усиливает эффект температурной стратификации. С другой стороны, вклад  $q_\lambda$  направлен в противоположную сторону, то есть, он ослабляет эффект температурного разделения. При этом,  $q_\gamma$  имеет более существенный вклад по сравнению с  $q_\lambda$ , что также видно из анализа графика  $q_\lambda + q_\gamma$ .

На данном этапе следует подчеркнуть, что Модифицированная Теория Пути Смешения Прандтля [219, 220, 221] говорит о том, что поправка Ван Деемтера  $q_\gamma$  является добавочным вкладом по отношению к величине  $q_\lambda$ . То есть, с физической стороны правильно говорить о суммарной величине  $q_\lambda + q_\gamma$ , а величина  $q_\lambda$  в отдельности не имеет собственного физического значения. Интересно, что величина  $q_\sigma$  является сравнимой с  $q_\lambda + q_\gamma$ . Это говорит о том, что механическая работа центральной части вихря над периферийной, вызванная как вязкими напряжениями, так и турбулентным переносом момента движения, вносит существенный вклад в эффект Ранка-Хилша.

Комбинированное действие всех тепловых потоков анализируется на рис. 4.26. Для стандартной модели турбулентности  $k$ - $\varepsilon$ -std речь идет о величине  $q_\sigma + q_\lambda$ . В то же время, полный тепловой поток для модели  $k$ - $\varepsilon$ -VD

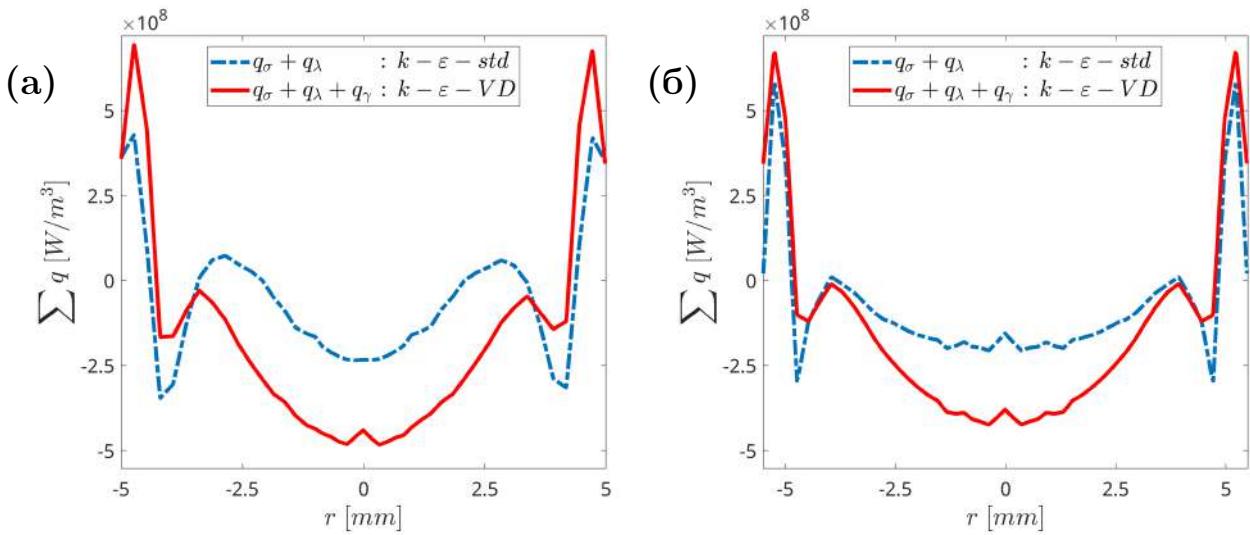


Рис. 4.26. Распределение полного теплового потока  $\sum q$  по поперечному сечению вихревой трубы, показанному на рис. 4.1. Подрисунки (а) и (б) соответствуют вихревым трубам №2 и №3. Полный тепловой поток для стандартной модели турбулентности  $k-\varepsilon$ -std равен  $\sum q = q_\sigma + q_\lambda$ , а для модифицированной модели турбулентности  $k-\varepsilon$ -VD  $\sum q = q_\sigma + q_\lambda + q_\gamma$ .

представляет собой сумму всех трех вкладов, т.е.  $q_\sigma + q_\lambda + q_\gamma$ . Из графиков видно, что модель  $k-\varepsilon$ -VD показывает более интенсивный радиальные перенос тепловой энергии по сравнению со стандартной моделью  $k-\varepsilon$ -std, как для вихревой трубы №2 (подрисунок а), так и для трубы №3 (подрисунок б). Это является еще одним подтверждением усиления эффекта Ранка-Хилша при использовании модифицированной модели  $k-\varepsilon$ -VD, что хорошо согласуется с интегральными характеристиками вихревых труб на рис. 4.18 и 4.19.

#### 4.4. Выводы по главе

1. На начальном этапе исследования было выполнено численное моделирование течения газа в разделительной конической вихревой трубе (рис. 4.1), а также в двухконтурной вихревой трубе (рис. 4.4). Для этого использовался широкий диапазон стандартных моделей турбулентности, встроенных в коммерческий гидродинамический пакет ANSYS CFX: модели изотропной турбулентности, модели анизотропной турбулентности, а также модели крупных вихрей.
2. Было обнаружено, что стандартные модели изотропной турбулентности, такие как  $k-\varepsilon$ -std,  $k-\omega$ -std,  $k-\varepsilon$ -realizable-std,  $k-\varepsilon$ -RNG-std и SST-std, показывают сходную картину течения газа в камере энергоразделения вихревой трубы. Обособленное место занимает стандартная модель турбулентности SAS-SST-std, которая вносит существенную неустойчивость и нестационарность в течение газа путем снижения величины турбулентной вязкости в областях расчетной сетки, имеющих высокое разрешение.
3. Установлено, что существенные различия в структуре течения газа, предсказанные моделью SAS-SST-std и другими моделями турбулентности, не оказывают значительного влияния на интегральные характеристики вихревой трубы. Все исследованные стандартные модели турбулентности указали на существование максимума изоэнтропного КПД разделительной вихревой трубы равного  $\eta_s = 0.24$ . С другой стороны, экспериментальные исследования данной разделительной вихревой трубы, выполненные диссертантом, показали величину изоэнтропного КПД на уровне  $\eta_s = 0.36$  [352]. Таким образом, стандартные модели турбулентности занижают эффект температурного разделения Ранка-Хилша примерно на 30%, что очень хорошо согласуется с другими литературными данными, как показано в разделе 2.2. настоящей диссертации.

ции. Более того, для двухконтурной вихревой трубы ошибка численных моделей течения газа проявляется еще более выраженно.

4. Использование более сложной анизотропной модели турбулентности RSM-LRR-std приводит к заметному уменьшению ошибки численного моделирования эффекта Ранка-Хилша по сравнению моделями изотропной турбулентности. Это объясняется тем, что течение в вихревой трубе является существенно трехмерным в связи с его винтовым характером, а это, в свою очередь, говорит об анизотропии турбулентности. Еще некоторое увеличение точности наблюдается также при использовании чрезвычайно затратных моделей крупных вихрей LES-std. Несмотря на всё, даже самая сложная модель турбулентности сохраняет погрешность в определении интегральных характеристик вихревой трубы (таких как изоэнтропный или холодильный КПД) по сравнению с экспериментальными данными.
5. Для увеличения точности численного моделирования течения газа в вихревых трубах, а также их интегральных характеристик, была применена усовершенствованная модель турбулентности  $k-\varepsilon$ -VD, рассмотренная в разделе 2.4.. Данная модель основана на Модифицированной Теории Пути Смешения Прандтля и гипотезе взаимодействия вихрей [127, 129, 219, 220, 221] и включает в себя дополнительный турбулентный поток тепловой энергии - поправку Ван Деемтера  $q_\gamma$ . Численная реализация данной модели турбулентности была выполнена в модифицированном решателе vtRhoCentralFoam.
6. Калибровка новой модели турбулентности  $k-\varepsilon$ -VD была выполнена с использованием лабораторных измерений для трех разделительных вихревых труб, опубликованных в литературе [225, 226, 232]. Результаты калибровки показали, что величина введенной эмпирической константы должна составлять  $c_\gamma \approx 0.985$ . Полученная оценка очень хорошо согласуется с простейшей асимптотической оценкой.

7. Установлено, что использование модифицированной модели турбулентности  $k-\varepsilon$ -VD приводит к существенному повышению точности определения интегральных характеристик вихревой трубы, в том числе ее КПД. Можно заключить, что это главным образом связано с действием дополнительного потока тепловой энергии  $q_\gamma$ , вносимого поправкой Ван Деемтера в рамках Модифицированной Теории Пути Смешения Прандтля. Также следует отметить, что тепловой поток  $q_\gamma$  связан с нагревом турбулентных жидких частиц (молей) сжимаемого газа при их перемещении в поле высоких градиентов давления. Существование столь высоких градиентов давления является достаточно редким явлением, с чем связана достаточная точность стандартных моделей турбулентности (в которых  $q_\gamma = 0$ ) для большинства течений жидкости и газа.
8. Можно сделать вывод, что модифицированная модель турбулентности, включающая в себя поправку Ван Деемтера, более точно отражает все теплообменные процессы, возникающие в камере энергоразделения в соответствии с гипотезой взаимодействия вихрей. Ни одна из исследованных стандартных моделей турбулентности не позволяет столь значительно сократить численную ошибку при моделировании эффекта Ранка-Хилша.
9. Следует отметить, что поправка Ван Деемтера может быть использована и в рамках моделей анизотропной турбулентности, таких как RSM-LRR-VD (см. раздел 2.3.). Данное направление исследований планируется развивать в будущих работах диссертанта.
10. Основные результаты исследований, обсуждаемых в настоящей главе, опубликованы диссертантом и его соавторами в ряде международных и российских статей [230, 232, 233, 234, 236, 353], а также обсуждены на международных и всероссийских конференциях [231, 354, 355, 356].

## ГЛАВА 5

# УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ ПРОТОЧНОЙ ЧАСТИ ВИХРЕВОЙ ТРУБЫ С ЦЕЛЬЮ ПОВЫШЕНИЯ ЕЁ ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНОСТИ

Настоящая глава посвящена разработке методов и способов повышения энергетической эффективности вихревых труб Ранка-Хилша, мерой которой являются изоэнтропный  $\eta_s$  (2.5) и холодильный КПД  $\eta_c$  (2.6). С этой целью было проведено детальное исследование течения газа в проточной части вихревых труб с использованием разработанной модифицированной модели турбулентности  $k$ - $\varepsilon$ -VD, а также с использованием других стандартных моделей турбулентности. Основные результаты численных исследований подтверждаются экспериментальными измерениями интегральных характеристик как лабораторного образца, так и промышленных образцов вихревых труб.

В качестве объекта исследования выбрана двухконтурная вихревая труба [129, 187, 197, 198], изображенная на рис. 4.8. Несмотря на это, основные результаты исследования распространяются и на другие типы вихревых труб, такие как разделительные конические трубы, что подтверждается натурными измерениями, приведенными в настоящей главе.

### **5.1. Исследование течения газа с использованием метода минимизации генерации энтропии**

На начальном этапе исследований требуется определить имеющиеся резервы в вопросе повышения энергетической эффективности вихревых труб путем уменьшения необратимых потерь энергии. Наиболее распространенный в литературе подход основывается на *эксергетическом анализе* течения газа [156, 357, 358]. Несмотря на то, что данный метод позволяет исследовать чрезвычайно сложные термодинамические процессы, наблюдаемые в вихре-

вом течении газа, он не позволяет выделить физические причины, приводящие к тем или иным потерями полезной энергии.

В настоящем исследовании используется другой метод термодинамического анализа, а именно *метод минимизации генерации энтропии* (Entropy Generation Minimization) предложенный Бежаном [359, 360]. В данном подходе вычисляется распределение скорости роста энтропии по всей области течения на основе имеющихся расчетных данных. Это дает возможность исследовать физические причины того или иного процесса, а также локализовать его в пространстве и времени. В ряде численных исследований различных течений жидкости и газа показана целесообразность использования величины локальной генерации энтропии в качестве меры необратимости процессов [361, 362, 363].

Для проведения указанного термодинамического анализа были использованы результаты численного моделирования течения газа в проточной части двухконтурной вихревой трубы (см. рис. 4.8), представленные в разделе 4.2.. Особый акцент был сделан на моделях №6 и №13, указанных в таблице 4.6. Сам анализ генерации энтропии выполнен на этапе пост-обработки результатов моделирования при помощи инструмента ANSYS-CFD-Post.

### **5.1.1. Метод минимизация генерации энтропии**

Для оценки величины локальной скорости роста энтропии (генерации энтропии), Кок и Хервиг [364, 365, 366] рассмотрели уравнение переноса энтропии. Они показали, что существуют два физических процесса, вызывающих рост энтропии, а именно: (а) действие вязких сил трения  $\dot{s}_d$  и (б) наличие конечных градиентов температуры  $\dot{s}_c$ . Исходя из того, что уравнение переноса энтропии также должно быть осреднено по методу Рейнольдса (в рамках RANS), каждая из указанных величин распадается на две компоненты: осредненная и флуктуационная. В конечном итоге, требуется вычислить рас-

пределение четырех физических величин:

- скорость порождения энтропии вследствие вязкого трения  $\overline{\dot{s}_d}$ ;
- вследствие турбулентной диссипации энергии  $\dot{s}'_d$ ;
- вследствие теплопроводности газа  $\overline{\dot{s}_c}$ ;
- вследствие турбулентного конвективного переноса  $\dot{s}'_c$ .

Кок и Хервиг [364, 365, 366] приводят следующие выражения для вычисления каждой из компонент полного порождения энтропии:

$$\overline{\dot{s}_d} = \frac{\mu}{T} \left| \dot{S} \right|^2 = \frac{\mu}{T} (\nabla V + (\nabla V)^T) : (\nabla V)^T \quad (5.1)$$

$$\dot{s}'_d = \frac{\rho \varepsilon}{T} \quad (5.2)$$

$$\overline{\dot{s}_c} = \frac{\lambda}{T^2} (\nabla T)^2 \quad (5.3)$$

$$\dot{s}'_c = \frac{\lambda_t}{T^2} (\nabla T)^2 \quad (5.4)$$

Здесь  $\dot{S}$  - тензор скоростей деформаций (1.9),  $T$  - статическая температура,  $\mu$  - коэффициент динамической вязкости,  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности и  $\lambda_t$  - коэффициент турбулентной теплопроводности,  $\varepsilon$  - скорость диссипации энергии турбулентности, см. уравнения (2.26).

Наряду с оценкой необратимых потерь энергии в форме порождения энтропии, для анализа также требуется оценка полезной работы, то есть вклада той или иной области течения в общий эффект температурного разделения. В рамках настоящего исследования в качестве такой оценки будет использована локальная скорость роста энталпии, которая также состоит из двух компонент: осредненной  $\overline{\dot{p}_c}$  и флюктуационной  $\dot{p}'_c$ . Предполагая, что течение газа является квазистационарным, можно записать:

$$\overline{\dot{h}_c} = \frac{\lambda}{\rho} \nabla^2 T \quad (5.5)$$

$$\dot{h}'_c = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\lambda_t \nabla T) \quad (5.6)$$

Нужно обратить внимание на то, что величины (5.1)–(5.4) и (5.5)–(5.5) имеют разные единицы измерения. Для их непосредственного сравнения и анализа требуется домножить генерацию энтропии  $\dot{s}$  на  $T/\rho$ . После этого выражение (5.2) вырождается в скорость диссипации энергии турбулентности  $\varepsilon$ . Полная генерация энтропии и полная полезная работа запишутся:

$$\dot{s}_\Sigma = \frac{T}{\rho} \left\{ \bar{s}_d + \dot{s}'_d + \bar{s}_c + \dot{s}'_c \right\} \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{кг}} \right] \quad (5.7)$$

$$\dot{h}_\Sigma = \bar{h}_c + \dot{h}'_c \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{кг}} \right] \quad (5.8)$$

### 5.1.2. Результаты анализа

На рис. 5.1 рассмотрена работа двухконтурной вихревой трубы (см. рис. 4.8) в режиме доли холодного потока  $\varphi_c = 1.12$ . Используя результаты моделирования течения газа с помощью модели турбулентности  $k$ - $\varepsilon$ -std были оценены величины  $\dot{s}_\Sigma$  (5.7) и  $\dot{h}_\Sigma$  (5.8). На рис. 5.1(а) отчетливо видны две зоны высокой генерации энтропии, в которых сосредоточены основные необратимые потери энергии. Первая зона расположена в пристеночной области вдоль камеры энергоразделения. Очевидно, данная область включает в себя пограничный слой. Вторая зона расположена около острого угла диафрагмы холодного потока и отмечена стрелками на подрисунке (а). Данная область уже отмечалась в качестве источника необратимых потерь энергии [203, 225], однако способ устранения данной области потерь энергии пока не был найден.

Положительные величины скорости роста энтальпии на рис. 5.1(б) указывают на приток тепловой энергии, в то время как отрицательные величины указывают на соответствующий отток энергии. В соответствии с этим, можно выделить три области на данном рисунке, отмеченные как 1, 2 и 3. Очевидно, что первые две области вносят непосредственный вклад в эффект энергоразделения Ранка-Хилша в связи с их расположением в потоке. С другой сторо-

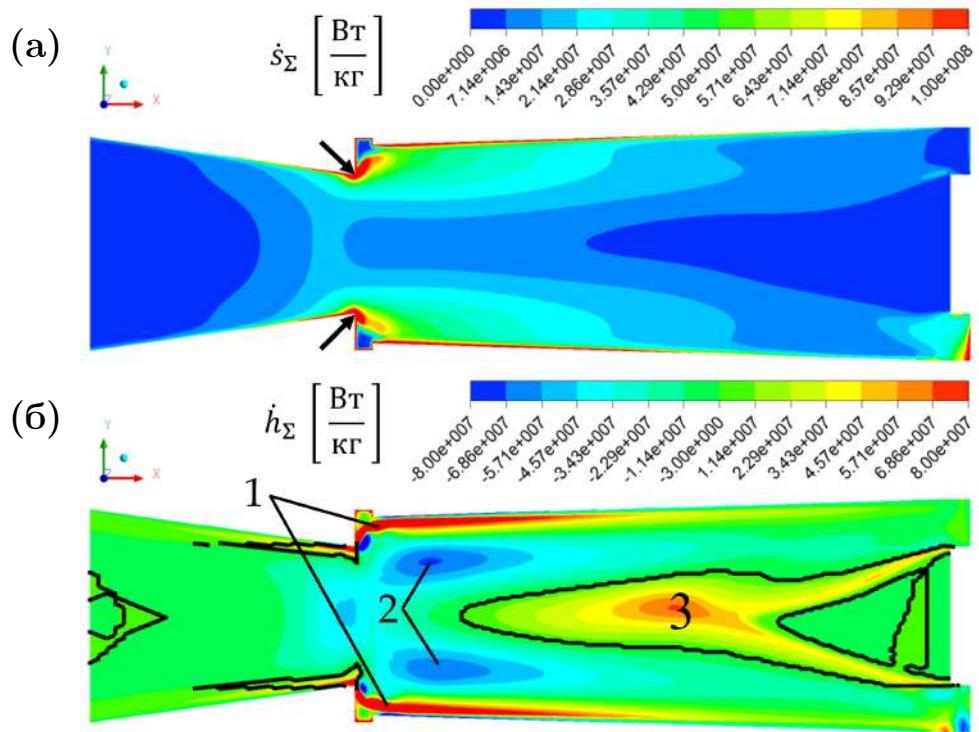


Рис. 5.1. Распределение (а) генерации энтропии и (б) полезной работы по продольному сечению двухконтурной вихревой трубы, работающей при доле холодного потока  $\varphi_c = 1.12$ . Расчет выполнен при помощи модели турбулентности  $k-\varepsilon$ -std, расчет №6 в таблице 4.6.

ны, положительные величины  $\dot{h}_\Sigma$  в области 3 указывают на наличие притока тепловой энергии в эту часть течения. С учетом того, что область 3 расположена в приосевой зоне, нагрев газа в этом случае отрицательно сказывается на энергоэффективности вихревой трубы. Таким образом, эта часть течения является паразитной и должна быть исключена из распределения полезной работы для дальнейшего анализа.

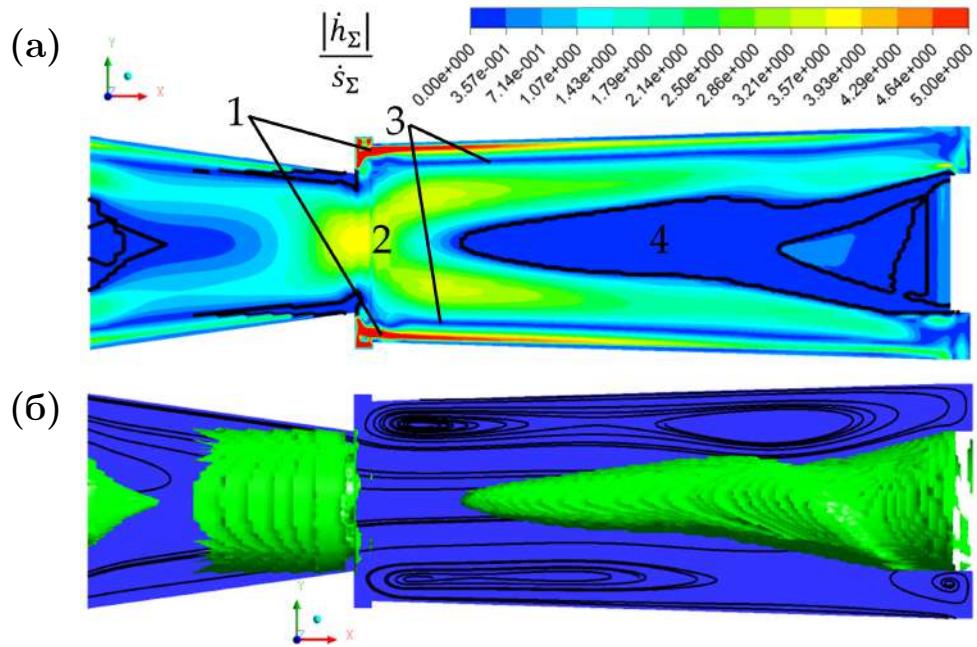


Рис. 5.2. Распределение (а) отношения  $|\dot{h}_\Sigma| / \dot{s}_\Sigma$  по продольному сечению двухконтурной вихревой трубы, работающей при доле холодного потока  $\varphi_c = 1.12$ ; (б) трехмерная паразитная область  $\dot{h}_\Sigma > 0$  в приосевой части течения газа. Использована модель турбулентности  $k\text{-}\varepsilon\text{-std}$ .

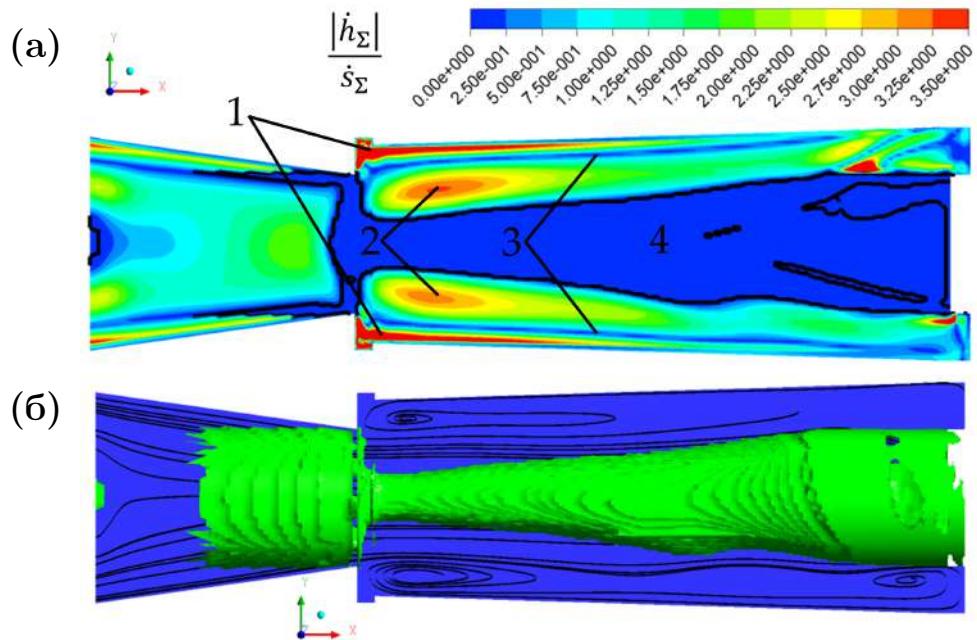


Рис. 5.3. Аналогично рис. 5.2, но для режима с более высокой долей холодного потока  $\varphi_c = 1.86$ .

Распределение отношения полезной работы к генерации энтропии  $|\dot{h}_\Sigma| / \dot{s}_\Sigma$  исследуется на рис. 5.2(а) для работы вихревой трубы в режиме доли холода-

ного потока  $\varphi_c = 1.12$ . На данном рисунке отмечены области 1 и 2, в которые указанное отношение достаточное велико, что говорит об их относительной эффективности с точки зрения вклада в температурное разделение. Также наблюдается область 3, которая является проводником тепловой энергии из зоны 2 в зону 1. В отличие от неё, область 4 является паразитной, как отмечено выше по тексту (см. рис. 5.1). Трехмерная визуализация паразитной области 4 представлена на рис. 5.2(б). Можно ожидать, что минимизация объема показанной области приведет к усилению эффекта энергоразделения Ранка-Хилша и соответствующему росту энергоэффективности вихревой трубы.

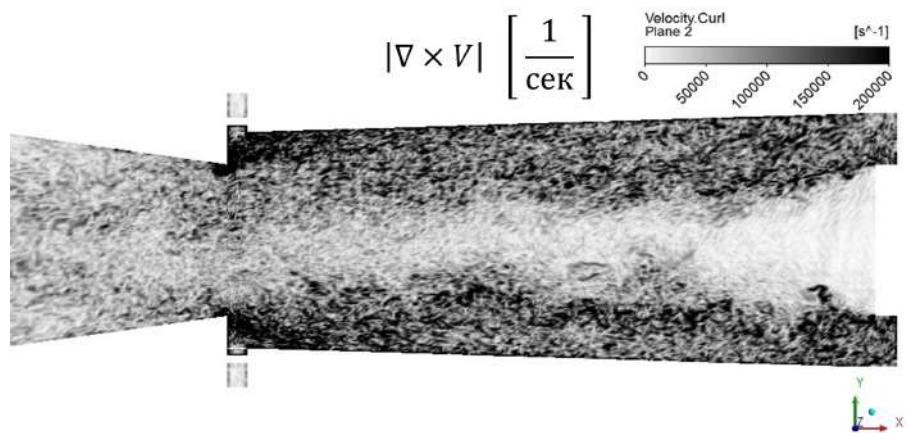


Рис. 5.4. Распределение завихренности поля скоростей  $|\nabla \times V|$  по продольному сечению двухконтурной вихревой трубы, полученное с помощью модели крупных вихрей LES-std №16 (таблица 4.7) для доли холодного потока  $\varphi_c = 1.42$ .

На рис. 5.3 исследуется отношение полезной работы к генерации энтропии  $|\dot{h}_\Sigma| / \dot{s}_\Sigma$  для режима работы двухконтурной вихревой трубы при более высокой доле холодного потока  $\varphi_c = 1.86$ . Обозначения областей течения на рис. 5.3 полностью соответствуют аналогичным обозначениям на рис. 5.2 для упрощения их сравнения. Можно видеть, что общая структура течения не изменилась существенным образом с увеличением доли холодного потока. Однако паразитная зона 4 заметно увеличилась в размерах и протянулась вдоль всей длины камеры энергоразделения. Это можно связать с ростом осевых скоростей в центральной части течения и недостаточной турбулизацией.

Для демонстрации последнего вывода, рис. 5.4 показывает распределение завихренности поля скоростей  $|\nabla \times V|$  по продольному сечению вихревой трубы. Данное поле было получено при помощи модели крупных вихрей LES-std №16 (таблица 4.7) для доли холодного потока вихревой трубы  $\varphi_c = 1.42$ . На данном рисунке хорошо видно слабую турбулизацию приосевой части течения, что рассматривается в качестве одной из причин возникновения обсуждаемой паразитной зоны.

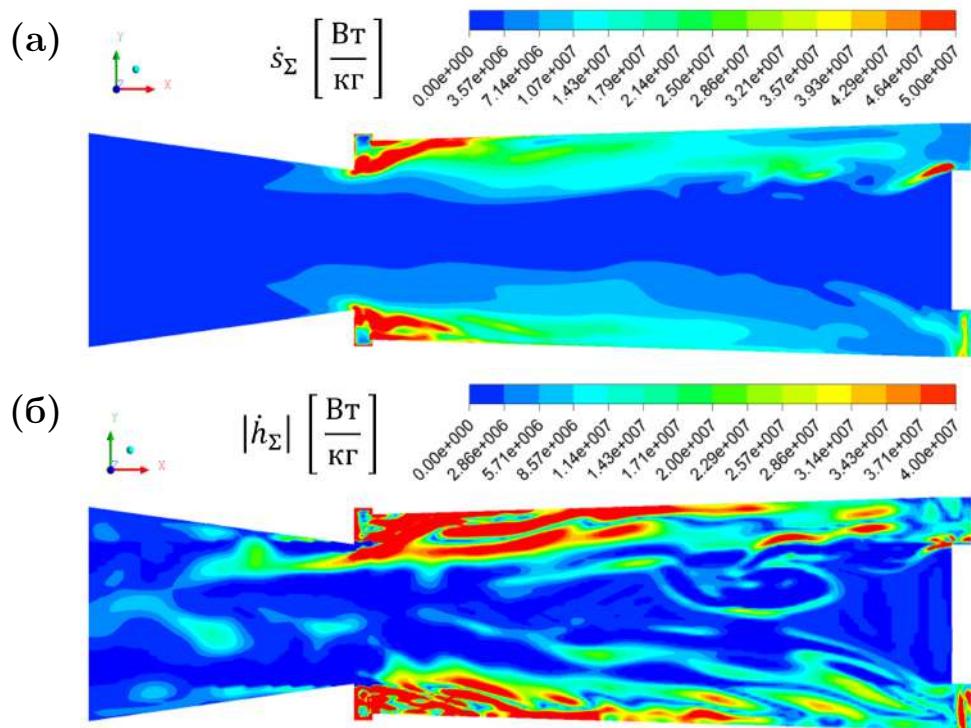


Рис. 5.5. Распределение (а) генерации энтропии и (б) полезной работы по продольному сечению двухконтурной вихревой трубы, работающей при доле холодного потока  $\varphi_c = 1.12$ . Расчет выполнен при помощи модели турбулентности SAS-SST-std, расчет №13 в таблице 4.6.

Аналогичный анализ распределения генерации энтропии и полезной работы по проточной части двухконтурной вихревой трубы был также выполнен с применением модели турбулентности SAS-SST-std. Результаты этого анализа представлены на рис. 5.5. Можно заметить, что в этом случае течение газа является несимметричным и нестационарным. Несмотря на это, видны качественные сходства с результатами для модели турбулентности  $k-\varepsilon$ -std (рис. 5.1). Что самое важное, модель турбулентности SAS-SST-std подтвер-

ждает существование паразитной зоны в приосевой части течения.

По результатам проведенного исследования можно сделать вывод о необходимости исключения обнаруженной паразитной зоны 4 на рисунках 5.2 и 5.3 путем изменения формы и размеров камеры энергоразделения. Достаточно логичным способом исключения паразитной зоны может быть уменьшение диаметров диафрагмы  $d_a$  и сопла дополнительного потока  $d_b$ , см. таблицу 4.4. С другой стороны, возможность уменьшение общего диаметра камеры энергоразделения  $D$  также требует рассмотрения.

## **5.2. Параметрическое исследование конфигурации камеры энергоразделения**

Выявленные резервы по усилению эффекта Ранка-Хилша и соответствующего увеличения энергетических показателей вихревой трубы (раздел 5.1.) требуют численной и экспериментальной проверки. С этой целью, в настоящем разделе проводится детальное параметрическое исследование влияния формы и размеров проточной части на интегральные характеристики двухконтурной вихревой трубы, работающей как в двухконтурном, так и в разделяльном режиме.

Схема исследуемой вихревой трубы показана на рис. 4.8, а особенности ее работы обсуждаются в разделе 4.2.. Базовые размеры проточной части вихревой трубы сведены в таблицу 4.4:  $D = 30$  мм,  $d_a = d_b = 30$  мм,  $L = 3D = 90$  мм,  $\alpha = 3^\circ$ . В ходе исследования осуществляется изменение одного из базовых размеров при сохранении остальных размеров неизменными. Таким образом устанавливается степень влияния того или иного параметра на исследуемые характеристики.

Параметры работы вихревой трубы в двухконтурном режиме соответствуют рекомендациям [129, 187, 197, 198]. А именно, расход горячего потока вихревой трубы был выбран равным расходу основного входного потока, т.е.

$G_3 = G_1$ , см. рис. 4.8. При этом, расход холодного потока выбирался равным расходу дополнительного потока, т.е.  $G_4 = G_2$ . Этим обеспечивается доля горячего потока равная  $\varphi_h = 1$  (2.4), а доля холодного потока может варьироваться в широких пределах  $0 < \varphi_c < 3$  (2.3) путем изменения давления (и, соответственно, расхода) дополнительного потока  $G_2$  в диапазоне  $100 \leq p_2 \leq 150$  кПа. Базовые граничные условия как для численных, так и для экспериментальных исследований, сведены в таблицу 4.5.

В качестве показателя энергоэффективности вихревой трубы использовалось значение холодильного КПД  $\eta_c$  (2.6), зависящее от доли холодного потока  $\varphi_c$ . Следует отметить, что при расчете холодильного КПД следует учитывать затраты на сжатие газа, подаваемого как на основной вход вихревой трубы, так и в дополнительный поток.

### 5.2.1. Результаты численных исследований

Параметрическое исследование требует проведения большого количества численных расчетов течения газа в вихревой трубе на разные режимах ее работы, а также с разными размерами ее проточной части. Исходя из этого, вычислительные эксперименты выполнялись на высокопроизводительном кластере “УРАН” Уральского отделения РАН в параллельном режиме с использованием интерфейса MPI на 48...128 потоках. Время одного численного эксперимента составляло около 1200 минут (20 часов) [352, 367]. С целью минимизации расчетного времени и вычислительных затрат, использовалась стандартная модель турбулентности  $k$ - $\varepsilon$ -std.

Рисунки 5.6 (а) и (б) показывают влияние диаметров диафрагмы  $d_a$  и сопла ввода дополнительного потока  $d_b$  на интегральную характеристику вихревой трубы  $\eta_c = \eta_c(\varphi_c)$ . Из графиков (а) видно, что вихревая труба с завышенным диаметром диафрагмы  $d_a = 22$  мм (по сравнению с базовым 21 мм) дает невысокий холодильный КПД. Уменьшение диаметра приводит к ро-

сту холодильного КПД, который достигает максимума при  $d_a \approx 18\ldots19$  мм. Дальнейшее заужение диафрагмы приводит к довольно быстрому падению холодильного КПД.

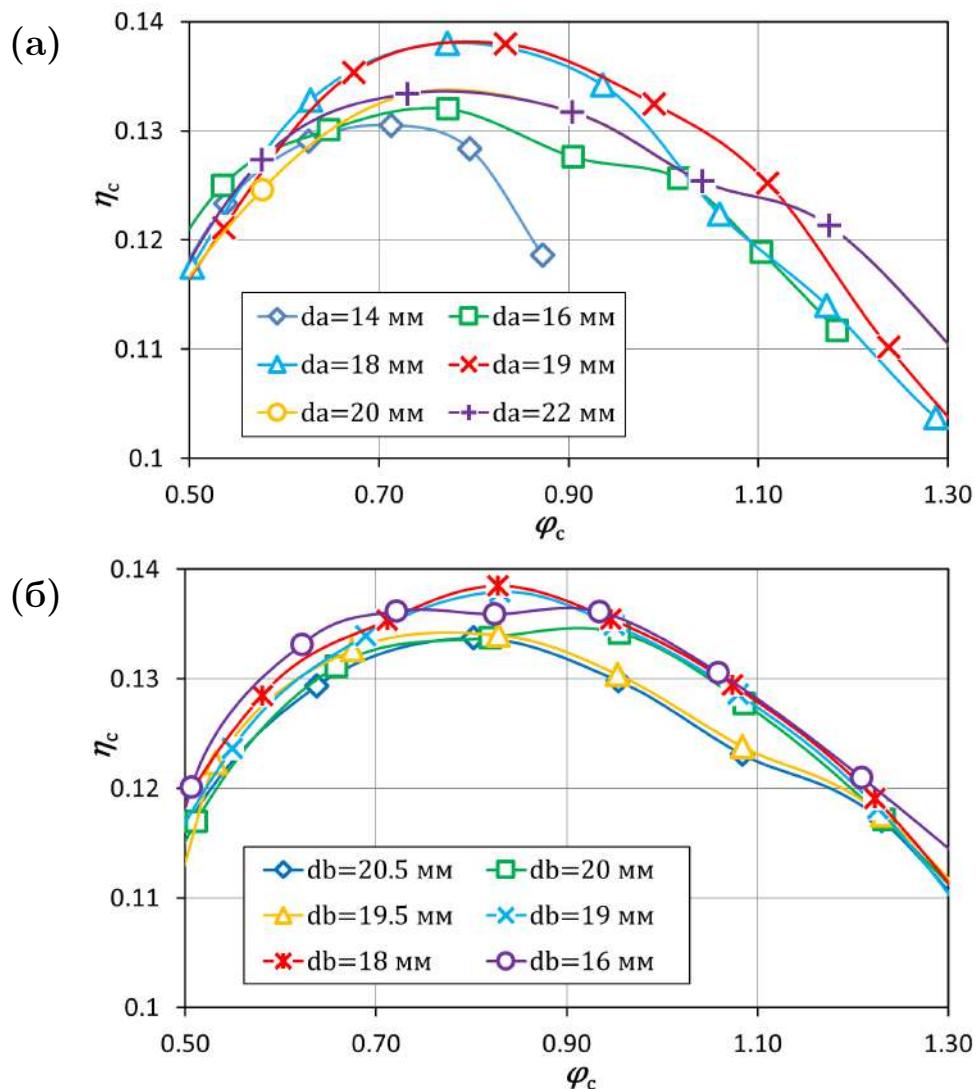


Рис. 5.6. Расчетные зависимости величины холодильного КПД  $\eta_c$  двухконтурной вихревой трубы от доли холодного потока  $\varphi_c$  при различных диаметрах (а) диафрагмы  $d_a$  и (б) сопла ввода дополнительного потока  $d_b$ , см. рис. 4.8.

Довольно схожие выводы можно сделать из анализа влияния диаметра сопла ввода дополнительного потока на графиках (б). В данном случае, оптимальное значение диаметра сопла близко совпадает с диаметром диафрагмы, то есть  $d_b = d_a \approx 18\ldots19$  мм. Это можно объяснить тем, что массовый расход газа, подаваемого в сопло дополнительного потока, равен массовому расходу холодного потока, т.е.  $G_2 = G_4$ . Исходя из этого, схематичное пред-

ставление течения газа в двухконтурной вихревой трубы говорит о том, что весь дополнительный поток газа  $G_2$  проходит через приосевую часть камеры энергоразделения и формирует холодный поток  $G_4$ .

Следует подчеркнуть, что результаты приведенного параметрического исследования, показывающие необходимость занижения диаметров  $d_a$  и  $d_b$ , очень хорошо согласуются с выводами анализа генерации энтропии в разделе 5.1.. Уменьшение диаметров  $d_a$  и  $d_b$  приводит к уменьшению паразитной приосевой зоны течения, показанной на рис. 5.2 и 5.3.

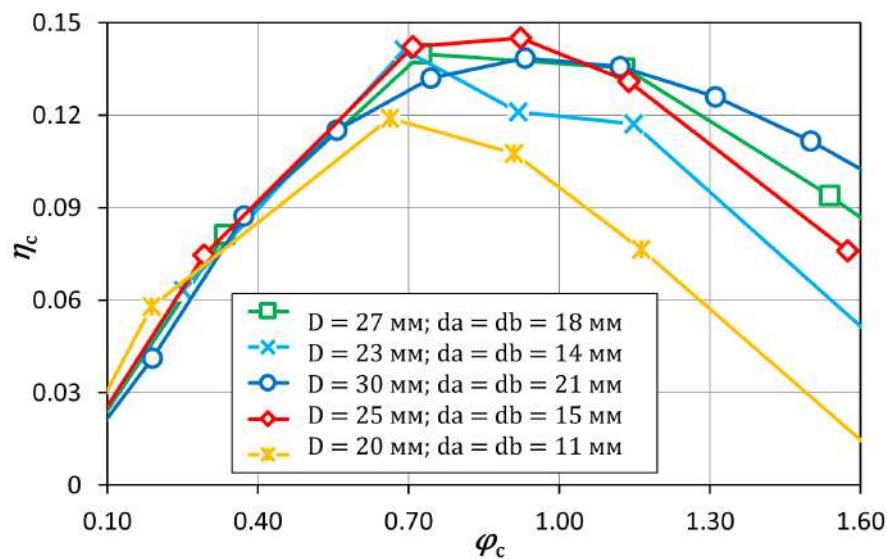


Рис. 5.7. Расчетные зависимости величины холодильного КПД  $\eta_c$  двухконтурной вихревой трубы от доли холодного потока  $\varphi_c$  при различных диаметрах камеры энергоразделения  $D$ , см. рис. 4.8.

На основании проведенного параметрического исследования диаметров  $d_a$  и  $d_b$  можно сделать предположение о необходимости параллельного уменьшения диаметра всей камеры энергоразделения  $D$ . Результаты такого анализа представлены на рис. 5.7. Действительно, рисунок показывает, что базовый вариант вихревой трубы ( $D = 30 \text{ мм}; d_a = d_b = 30 \text{ мм}$ ) демонстрирует не самые высокие энергетические показатели. Уменьшение диаметров до  $D = 25\ldots27 \text{ мм}$  и  $d_a = d_b = 15\ldots18 \text{ мм}$  приводит к росту холодильного КПД примерно на 0.5...1%, что хорошо согласуется с данными на рис. 5.6. Занижение диаметра камеры энергоразделения до  $D = 20 \text{ мм}$  и ниже заметно портит

энергетические показатели вихревой трубы.

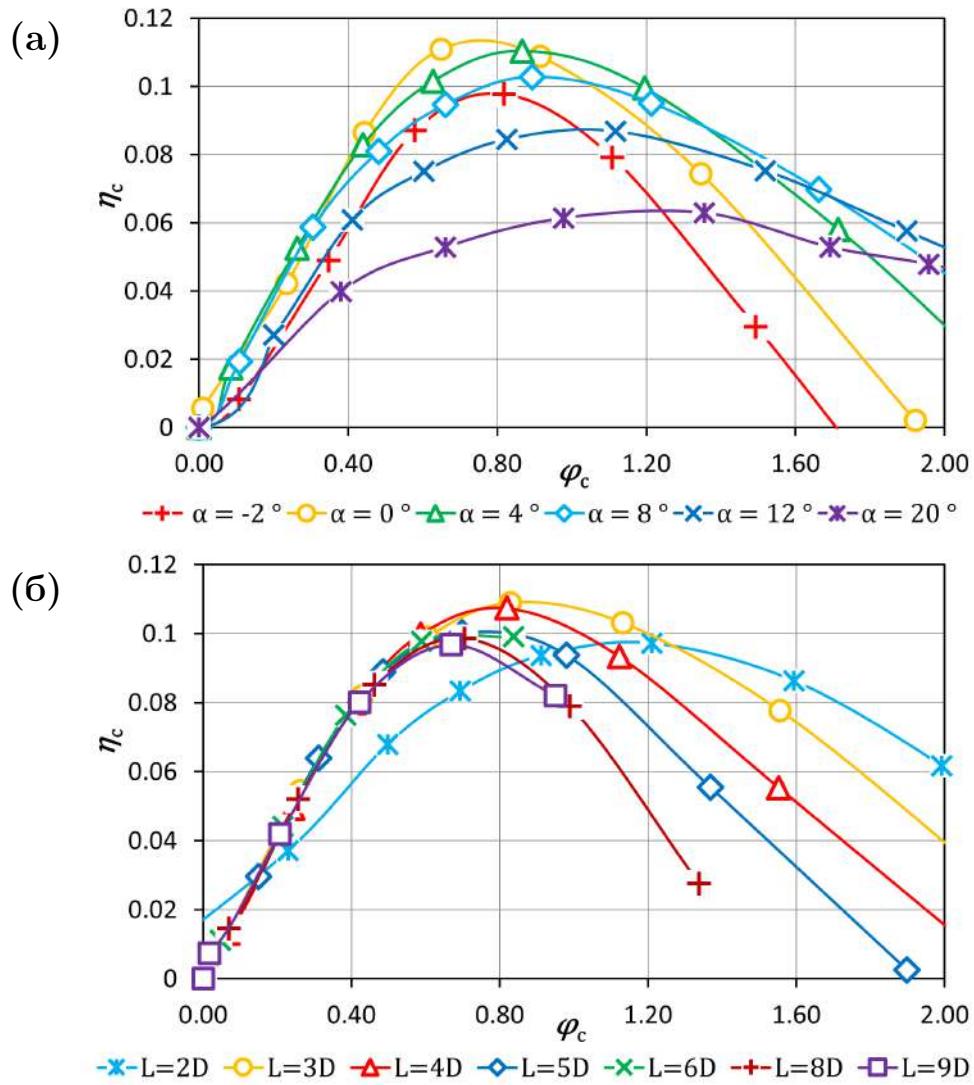


Рис. 5.8. Расчетные зависимости величины холодильного КПД  $\eta_c$  двухконтурной вихревой трубы от доли холодного потока  $\varphi_c$  при различных (а) углах конусности камеры энергоразделения  $\alpha$  и (б) длинах камеры энергоразделения  $L$ , см. рис. 4.8.

Рисунок 5.8 исследует влияние угла конусности камеры энергоразделения (а) и ее длины (б) на энергоэффективность вихревой трубы. Видно, что наибольшую величину холодильного КПД демонстрируют вихревые трубы с длиной камеры в диапазоне  $L \approx 3D \dots 4D \approx 90 \dots 120$  мм. Данное наблюдение хорошо согласуется с экспериментальными результатами, опубликованными в литературе [129, 187]. Оптимальная величина угла конусности лежит в диапазоне  $\alpha = 0 \dots 4^\circ$ . Причем, увеличение угла до  $\alpha \geq 12^\circ$  приводит к резкому обрушению холодильного КПД. То же можно сказать относительно отрица-

тельных значений угла  $\alpha$ .

### 5.2.2. Результаты экспериментальных исследований

Экспериментальная верификация результатов, полученных на основе численного моделирования, выполнена при помощи установки, схема которой показана на рис. 5.9. Она состоит из исследуемого образца двухконтурной вихревой трубы, винтовой компрессорной станции U37, двух блоков датчиков, двух измерителей расхода, 5 датчиков избыточного давления, 4 датчиков температуры и системы сбора и обработки данных. Использовались датчики фирмы “Элемер” со следующими характеристиками: основная относительная погрешность  $\pm 0.25\%$ ; выходной сигнал 4...20 мА; быстродействие 100 мс; предельная длина линия связи - до 10 м. Наименования датчиков и пределы измеряемой величины сведены в таблицу 5.1. Компрессорная станция обеспечивает абсолютное давление воздуха до 800 кПа при производительности 0.1 кг/с. Данные величины с достаточно большим запасом перекрывают рабочие параметры исследуемой вихревой трубы, см. таблицу 4.5.

Таблица 5.1  
Датчики экспериментальной установки

Обозначение датчика (рис. 5.9)	Наименование датчика	Пределы измеряемой величины
ДД1, ДД2	АИР-10L-ДИ-ИК160-0...160кПа-M20-t0550-B025	0 ... 160 кПа
ДД3	АИР-10L-ДИ-ИК600-0...600кПа-M20-t0550-B025	0 ... 600 кПа
ДД4, ДД5	АИР-10L-ДИ-ИК1М-0...1МПа-M20-t0550-B025	0 ... 1000 кПа
ДТ1, ДТ2, ДТ3, ДТ4	ТСМУ-205Н-PLT-t1070-100М-(-50...+150)°С-2-120-d8-0,25	-50...+150 °C

Расход газа измерялся на горячем  $G_3$  и холодном  $G_4$  выходах вихревой трубы, в то время как расходы в линиях основного  $G_1$  и дополнительного

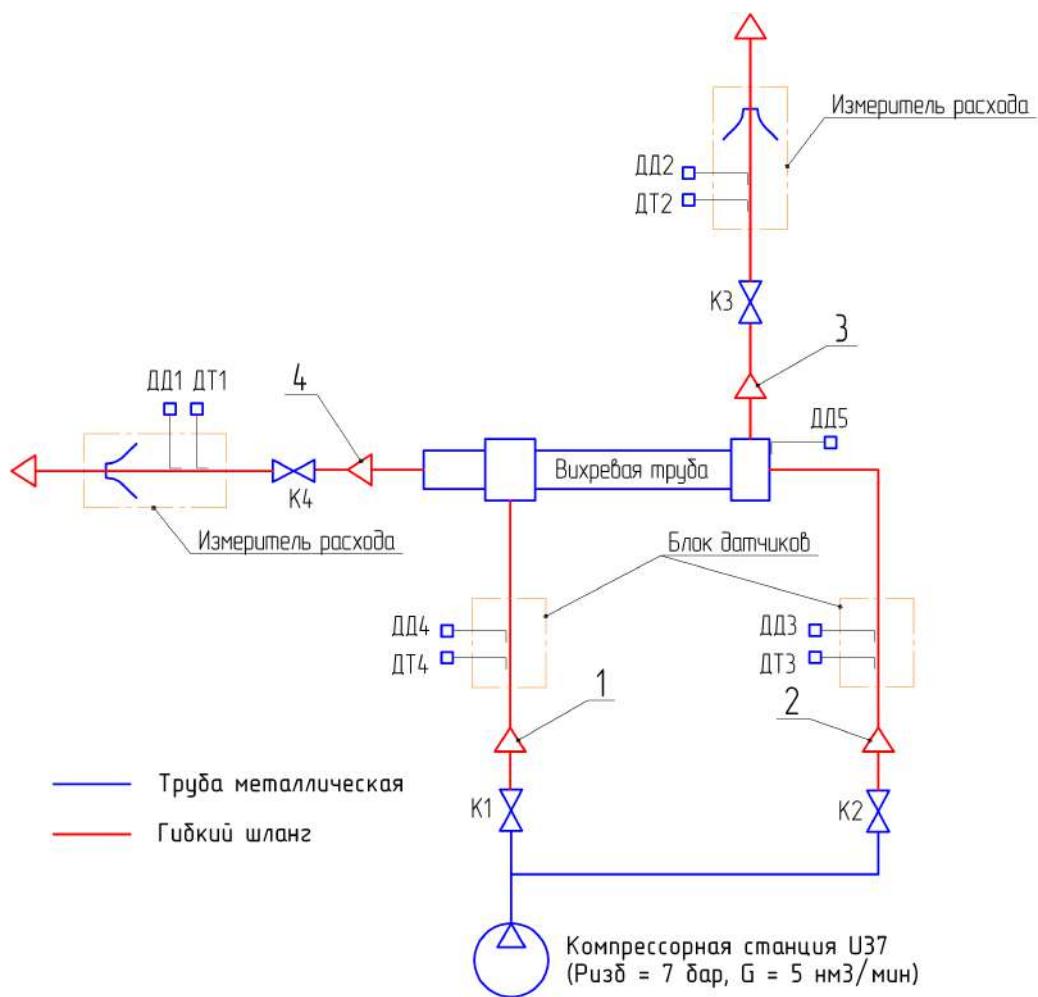


Рис. 5.9. Принципиальная схема экспериментальной установки: 1 - основной подвод сжатого воздуха; 2 - подвод дополнительного потока; 3 - отвод горячего потока; 4 - отвод холодного потока; К - шаровой кран; ДД - датчик давления; ДТ - датчик температуры.

$G_2$  входных потоков вычислялись исходя из баланса (сохранения) массовых расходов и тепловой энергии:

$$\begin{cases} G_1 + G_2 = G_3 + G_4 \\ H_1 + H_2 = H_3 + H_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} G_1 = \frac{G_3 (T_3^* - T_2^*) + G_4 (T_4^* - T_2^*)}{T_1^* - T_2^*} \\ G_2 = \frac{G_3 (T_1^* - T_3^*) + G_4 (T_1^* - T_4^*)}{T_1^* - T_2^*} \end{cases} \quad (5.9)$$

где  $H$  - энталпия торможения, а  $T^*$  - температура торможения.

Измерители массовых расходов горячего и холодного выходов выполнены в виде урезанного сопла Вентури, истечение из которого происходит в атмосферу, как показано на рис. 5.10. Использовались несколько сменных сопел с различными диаметрами узкого сечения:  $d = 12, 15, 17, 20$  мм. Это

позволяло поддерживать достаточно высокую скорость газа на срезе сопла (до 200...250 м/с) для обеспечения значительного давления в линии непосредственно перед соплом и повышения точности его измерения. Давление на срезе сопла принималось равным атмосферному.

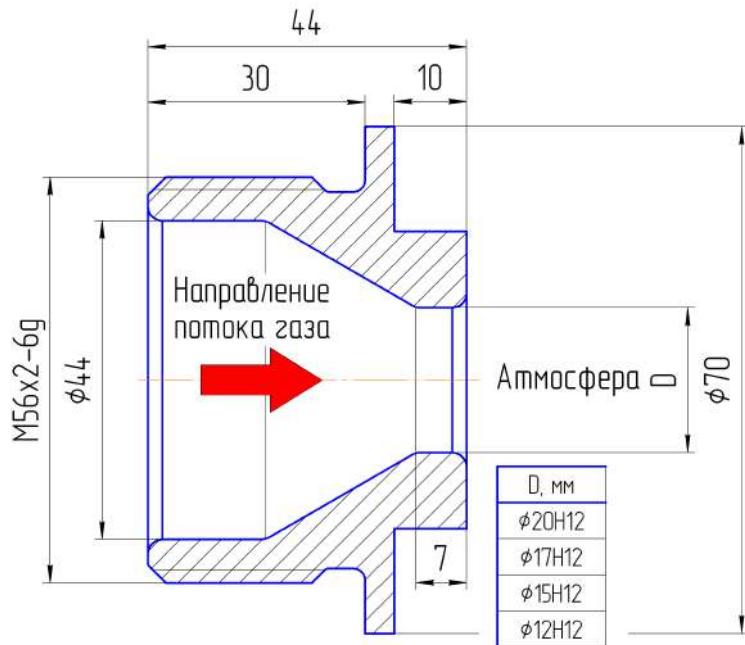


Рис. 5.10. Сопло Вентури в измерителях расхода воздуха

Зная температуру и давления торможения газа в линии перед соплом Вентури, а также давление на срезе сопла (атмосферное), можно определить все недостающие термодинамические свойства сжатого воздуха, такие как его плотность  $\rho$ , энталпию  $H$ , а также скорость его истечения  $V$  [50, 51, 52, 53]. Для повышения точности определения термодинамических свойств сжатого воздуха использовалось уравнение состояния реального газа Битти-Бриджмена [368]:

$$pv^2 = RT \left[ v + B_0 \left( 1 - \frac{b}{v} \right) \right] \left( 1 - \frac{c}{vT^3} \right) - A_0 \left( 1 - \frac{a}{v} \right) \quad (5.10)$$

где  $R$  - газовая постоянная;  $p$  - абсолютное давление газа;  $v = 1/\rho$  - удельный объем газа;  $T$  - термодинамическая температура. Эмпирические постоянные уравнения для воздуха равны:  $a = 0.01931$ ;  $A_0 = 1.3012$ ;  $b = -0.01101$ ;

$B_0 = 0.04611$ ;  $c = 43400$ . Область применимости данного уравнения для сжатого воздуха определяется температурами  $-145^{\circ}\text{C} < T < +200^{\circ}\text{C}$  и абсолютными давлениями  $p < 17.7 \text{ МПа}$ . Согласно литературным данным, погрешность уравнения в указанных пределах не превышает 0.2%.

Опрос всех датчиков давления и температуры осуществлялся при помощи аналогово-цифровых преобразователей (АЦП) фирмы “Элемер”, подключенных к ПК при помощи интерфейса RS232 и протокола MODBUS RTU. Питание АЦП и всех датчиков осуществлялось при помощи модуля стабилизированного напряжения 24 В. Программное обеспечение (ПО) для опроса АЦП было разработано лично соискателем в среде программирования Lazarus. Помимо опроса датчиков, данное ПО осуществляло вычисление массовых расходов и всех интегральных характеристик вихревой трубы (2.1)–(2.6), а также их запись в текстовый файл. Внешний вид окна данного ПО показан на рис. 5.11.

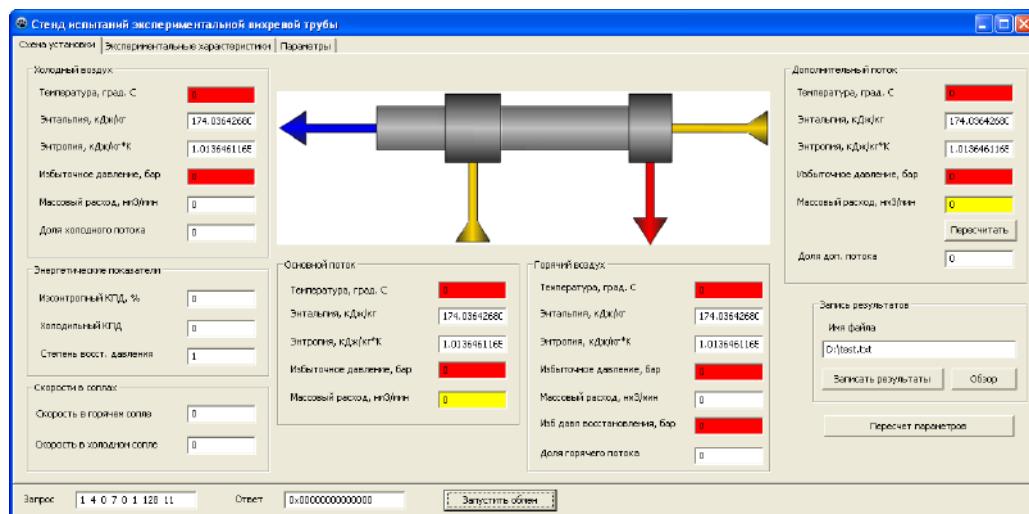


Рис. 5.11. Главное окно компьютерной программы для опроса АЦП и обработки измерений.

Общий вид исследуемой двухконтурной вихревой трубы показан на рис. 5.12. Данный экспериментальный образец состоит из набора сменных элементов, которые позволяют вносить изменения в размеры и форму проточной части. Диапазон возможного изменения размеров полностью соответ-

ствует численной модели данной вихревой трубы, описанной в разделе 5.2.1. выше по тексту. В качестве закручивающего аппарата был использован шестизаходный тангенциальный сопловой ввод. Для регулирования его пропускной способности (расхода  $G_1$ ) установлен ручной механизм поворота направляющих лопаток [369], указанный на рис. 5.12. Более подробно устройство экспериментальной установки, а также оценка прямых и косвенных ошибок измерения, рассмотрены в диссертации [352].

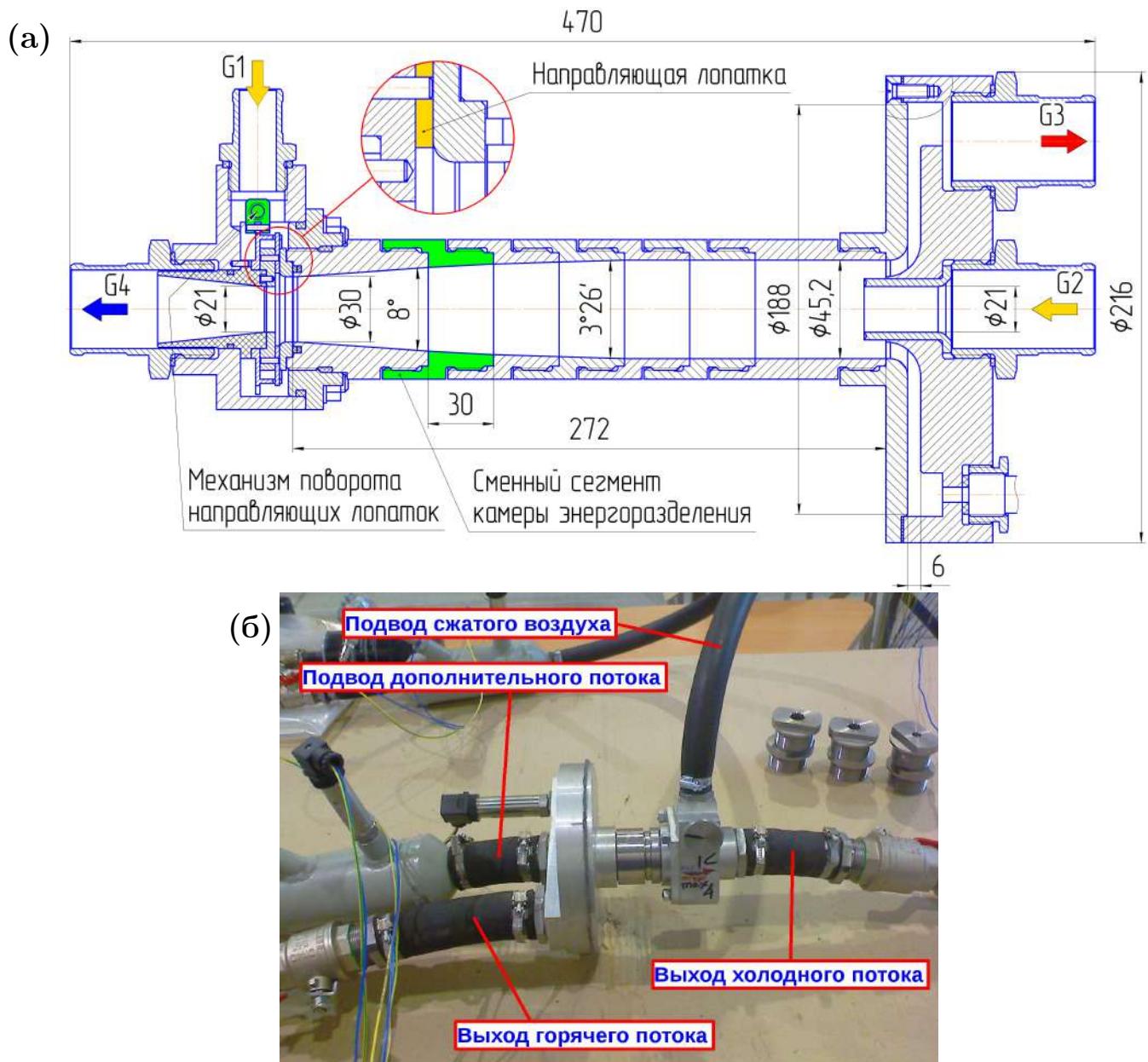


Рис. 5.12. Экспериментальный образец двухконтурной вихревой трубы: (а) общий вид; (б) фотография.

## Двухконтурный режим работы вихревой трубы ( $G_2 > 0$ )

Рисунок 5.13(а) показывает влияние диаметров диафрагмы  $d_a$  и сопла ввода дополнительного потока  $d_b$  на холодильный КПД вихревой трубы, работающей в двухконтурном режиме, т.е. при наличии дополнительного потока  $G_2 > 0$ . Длина камеры энергоразделения выдерживалась равной  $L = 9D \approx 270$  мм с углом конусности  $\alpha = 6^\circ$  при абсолютном давлении основного потока воздуха  $p_1^* \approx 700$  кПа. Доля холодного потока  $\varphi_c$  варьировалась за счет изменения расхода дополнительного потока  $G_2$ . Неопределенность результатов измерения показана на графике планками погрешностей.

Из рис. 5.13(а) видно, что наименьшая величина холодильного КПД была зафиксирована для вихревой трубы, имеющей базовые размеры  $d_a = d_b = 21$  мм. Занижение двух диаметров до  $d_a = d_b = 18$  мм приводит к заметному увеличению энергоэффективности. Однако наилучший результат был получен для следующего сочетания диаметров:  $d_a = 18$  мм и  $d_b = 21$  мм. Следует подчеркнуть, что результаты экспериментальных измерений хорошо совпадают с выводами, сделанными на основе серии численных экспериментов в разделе 5.2.1..

Рисунок 5.13(б) показывает наличие некоторой оптимальной длины камеры энергоразделения вне зависимости от доли холодного потока  $\varphi_c$ . Она находится в диапазоне  $L = 5D \dots 7D \approx 150 \dots 210$  мм. В этом случае результаты экспериментальных измерений несколько противоречат численному моделированию (см. рис. 5.8), в котором оптимальная длина камера энергоразделения составила  $L = 3D \approx 90$  мм. Следует также отметить, что представленные экспериментальные измерения на рис. 5.13(б) также несколько отличаются от опубликованных в литературе данных [129, 187]. Это может быть связано с влиянием неточностей в изготовлении составной камеры энергоразделения, состоящей из множества сегментов, как показано на рис. 5.12.

Влияние пропускной способности соплового ввода основного потока (рас-

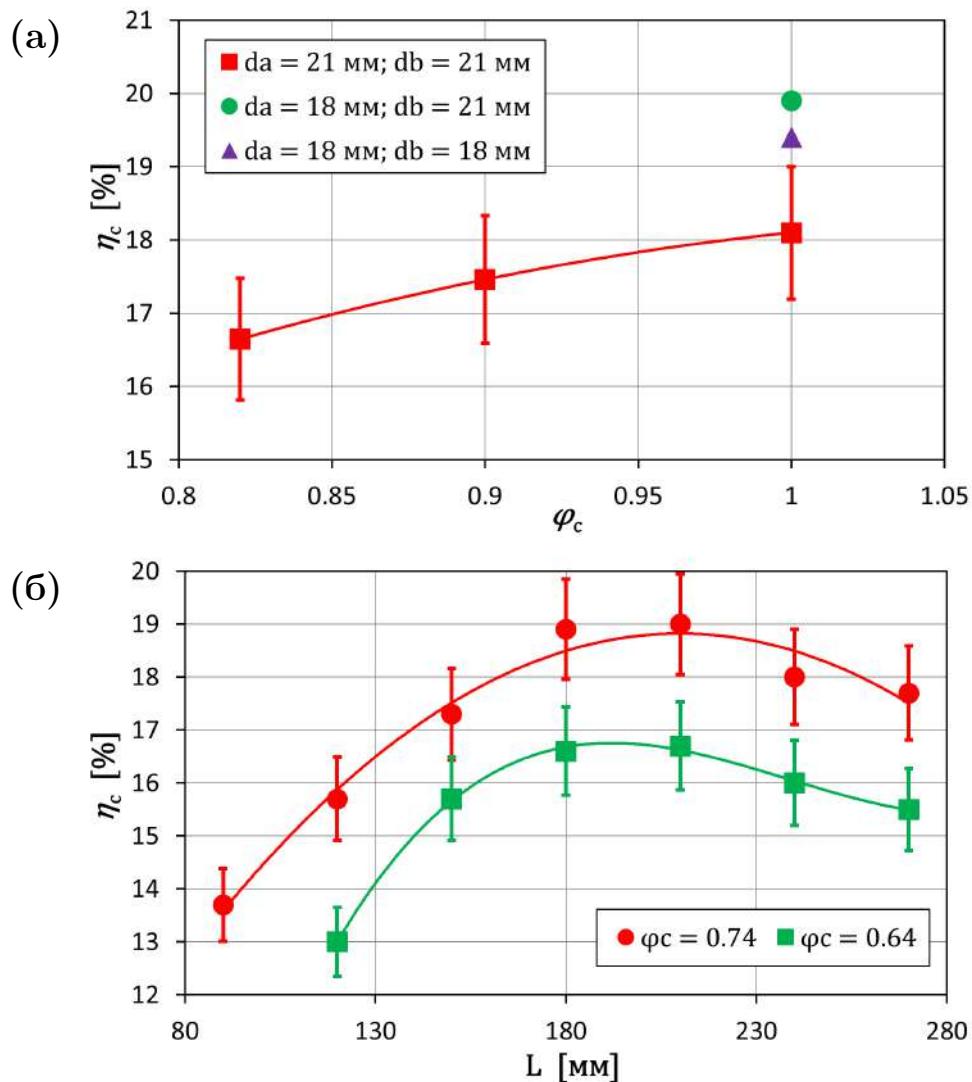


Рис. 5.13. Экспериментальные зависимости холодильного КПД вихревой трубы от доли холодного потока  $\eta_c = \eta_c(\varphi_c)$  при различных (а) диаметрах диафрагмы  $d_a$  и сопла ввода дополнительного потока  $d_b$ , а также (б) длинах камеры энергоразделения  $L$ .  
Двухконтурный режим работы вихревой трубы при  $G_2 > 0$ .

ход  $G_1$ ) на энергоэффективность вихревой трубы исследуется на рис. 5.14. Изменение расхода  $G_1$  осуществлялось путем поворота направляющих лопаток ручным механизмом, отмеченным на рис. 5.12(а). Остальные размеры проточной части вихревой трубы были равны базовым, а абсолютное давление торможения сжатого воздуха непосредственно перед сопловым вводом основного потока составляло  $p_1^* \approx 700$  кПа.

Рисунок 5.14 показывает, что базовая пропускная способность  $G_1 = 0.03$  кг/с соплового ввода основного потока дает относительно невысокую величину холодильного КПД. Увеличение расхода до  $G_1 = 0.036$  кг/с не

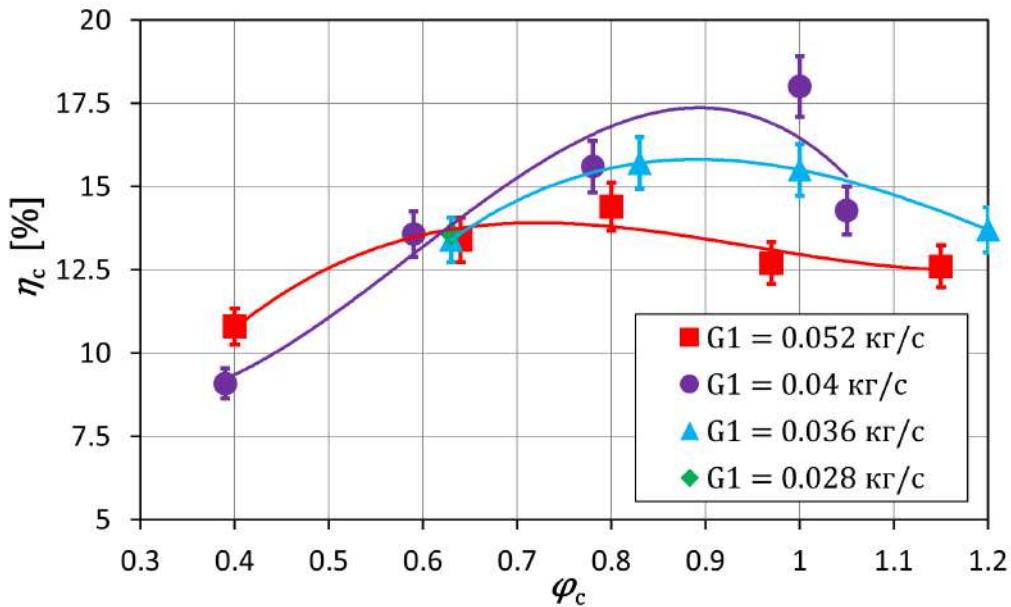


Рис. 5.14. Экспериментальные зависимости холодильного КПД вихревой трубы от доли холодного потока  $\eta_c = \eta_c(\varphi_c)$  при различных расходах основного потока воздуха  $G_1$ . Регулирование пропускной способности соплового ввода осуществлялось при помощи поворота направляющих лопаток, см. рис. 5.12. Двухконтурный режим работы вихревой трубы при  $G_2 > 0$ .

сказывается значительным образом на холольном КПД. Однако дальнейшее увеличение пропускной способности до  $G_1 = 0.04 \text{ кг/с}$  дает максимальные значения холодильного КПД. Еще большее увеличение расхода  $G_1$  приводит к ухудшению характеристик вихревой трубы.

С одной стороны, данный анализ показывает, что пропускная способность базового варианта соплового ввода основного потока является недостаточной для вихревой трубы выбранных размеров. Небольшое увеличение межлопаточного зазора и, соответственно, критического сечения позволяет улучшить энергетические показатели вихревой трубы. С другой стороны, увеличение или уменьшение пропускной способности соплового ввода путем поворота направляющих лопаток не приводит к драматичному обрушению интегральных характеристик вихревой трубы. Следовательно, данный способ регулирования производительности может быть использован на практике.

## Разделительный режим работы вихревой трубы ( $G_2 = 0$ )

После перекрытия крана К2 на схеме 5.9, расход дополнительного потока становится равным  $G_2 = 0$ , а вихревая труба переключается в разделительный режим работы, при котором основной поток сжатого воздуха  $G_1$  разделяется на горячий  $G_3$  и холодный  $G_4$  выходы. Такой режим работы вихревой трубы является самым распространенным в промышленности и, следовательно, важным для исследования.

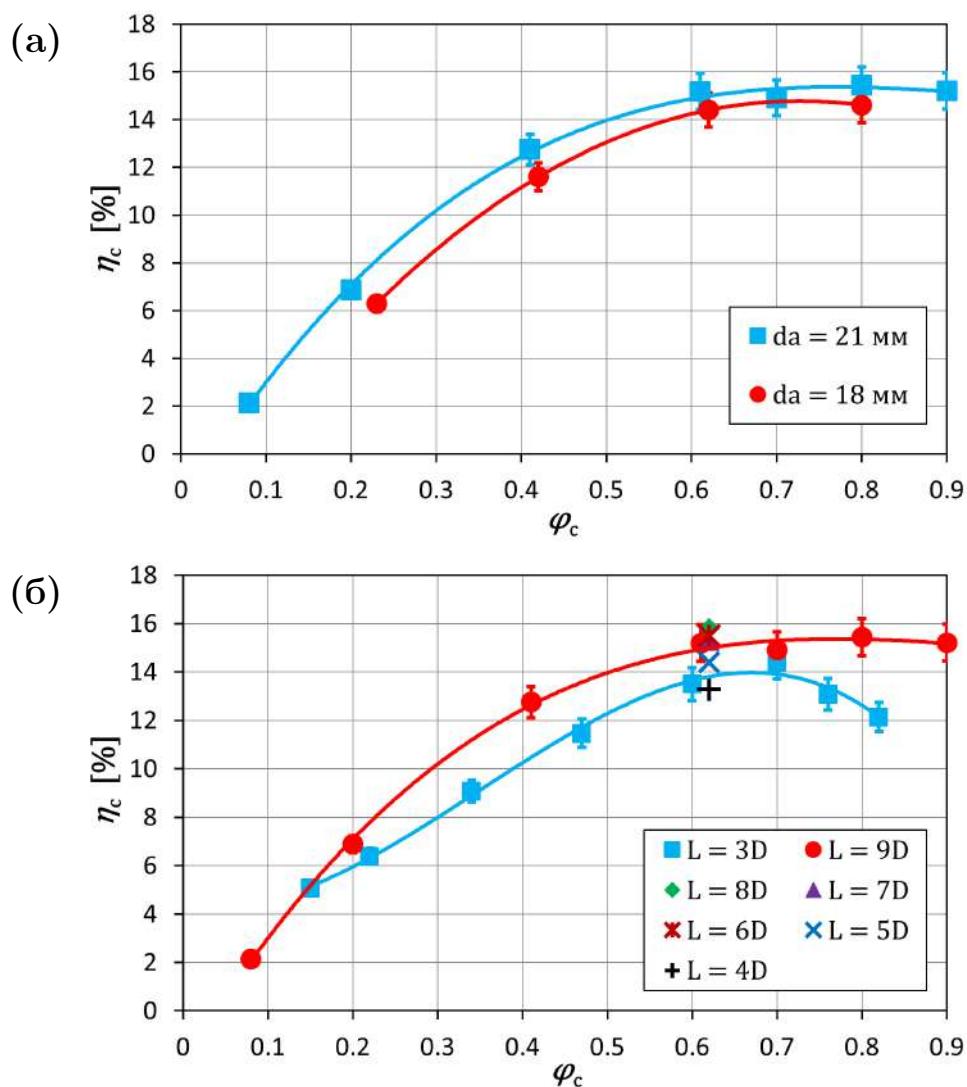


Рис. 5.15. Экспериментальные зависимости холодильного КПД вихревой трубы от доли холодного потока  $\eta_c = \eta_c (\varphi_c)$  при различных (а) диаметрах диафрагмы  $d_a$  и (б) длинах камеры энергоразделения  $L$ . Разделительный режим работы вихревой трубы при  $G_2 = 0$ .

На рис. 5.15(а) исследуется влияние диаметра диафрагмы  $d_a$  на холодильный КПД вихревой трубы. Длина камеры энергоразделения была установле-

на равной  $L = 9D \approx 270$  мм, угол ее конусности  $\alpha = 6^\circ$ , массовый расход через сопловой ввод основного потока поддерживался равным  $G_1 = 0.042$  кг/с при его абсолютном давлении торможения  $p_1^* \approx 700$  кПа. Графики показывают, что разделительный режим работы вихревой трубы требует относительно большого диаметра диафрагмы  $d_a = 21$  мм для обеспечения высокой величины холодильного КПД.

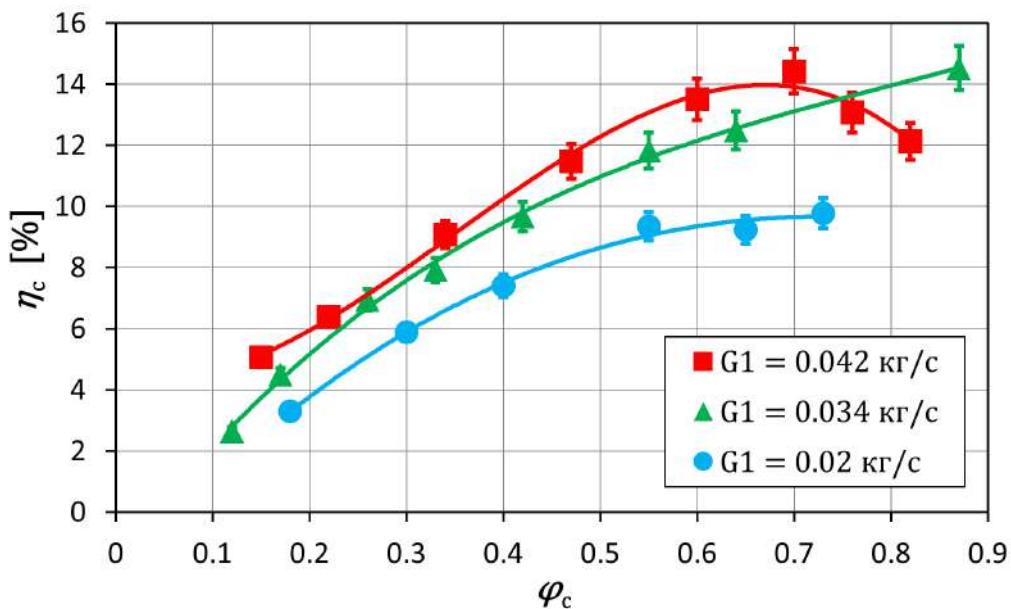


Рис. 5.16. Экспериментальные зависимости холодильного КПД вихревой трубы от доли холодного потока  $\eta_c = \eta_c(\varphi_c)$  при различных расходах основного потока воздуха  $G_1$ . Регулирование пропускной способности соплового ввода осуществлялось при помощи поворота направляющих лопаток, см. рис. 5.12. Разделительный режим работы вихревой трубы при  $G_2 = 0$ .

На рис. 5.15(б) исследуется влияние длины камеры энерноразделения на холодильный КПД вихревой трубы. Графики показывают, что длина  $L = 9D \approx 270$  мм приводит к достаточно высоким энергетическим показателям. Однако небольшое уменьшение данной длины вплоть до  $L = 6D \approx 180$  мм не вызывает заметного падения КПД, а даже напротив, вызывает его некоторый рост. Данный вывод хорошо согласуется с двухконтурным режимом работы вихревой трубы, показанном на рис. 5.13(б). Уменьшение длины до  $L < 6D$  вызывает падение холодильного КПД. В целом, можно заключить, что существующие в литературе рекомендации

[125, 126, 127, 128, 129] по выбору длины  $L$  для конических разделительных вихревых труб (девять диаметров  $D$ ) хорошо согласуются с результатами представленных экспериментальных исследований.

Влияние пропускной способности соплового аппарата на энергоэффективность вихревой трубы представлено на рис. 5.16. Как и в случае с двухконтурным режимом работы, повышение расхода до  $G_1 \approx 0.042$  кг/с приводит к росту холодильного КПД.

Представленные результаты экспериментальных исследований говорят о том, что рекомендуемые размеры проточной части вихревой трубы слабо зависят от режима ее работы: двухконтурного или разделительного. Исключением является диаметр диафрагмы, который следует уменьшить на 14...15% для двухконтурного режима работы вихревой трубы. Также была установлена необходимость повышения пропускной способности основного соплового ввода на 40% по сравнению с базовой величиной, т.е. с  $G_1 = 0.03$  кг/с до  $G_1 = 0.042$  кг/с. Общее увеличение холодильного КПД двухконтурной вихревой трубы после внесения указанных модификаций составило примерно 2...3%.

### **5.3. Усовершенствование отдельных узлов вихревой трубы**

Как показано в разделах выше, форма, размеры и конфигурация камеры энергоразделения значительным образом влияют на эффект Ранка-Хилша и, соответственно, на интегральные характеристики вихревой трубы. Однако кроме этого существенную роль играют узлы и детали, расположенные непосредственно перед камерой энергоразделения или за ней. Эти узлы отвечают за формирование высокоскоростного вихревого течения газа, а также за его торможение на выходе из вихревой трубы. Неэффективная организация данных процессов может привести к большим необратимым потерям энергии и нагреву газа. Среди важных узлов вихревой трубы следует выделить

сопловой ввод [370], развихритель холодного потока [371], а также диффузор горячего потока [163, 164, 187]. В настоящем разделе представлены результаты детального исследования каждого из перечисленных узлов.

### 5.3.1. Принципиально новый тип соплового ввода

Течение в сверхзвуковом сопловом вводе Эффект энергоразделения Ранка-Хилша может быть усилен путем повышения давления газа на входе в вихревую трубы. Это дает возможность разогнать газ до более высоких скоростей, тем самым увеличивая градиенты давления и температур в камере энергоразделения, а это, в свою очередь, усиливает тепловые потоки  $q_\sigma$ ,  $q_\lambda$  и  $q_\gamma$  в уравнении энергии (2.26). Однако такой подход работает для умеренных давлений, при которых возникает дозвуковое течение газа. Эффективное повышение давления до больших величин требует разработки соплового аппарата нового типа, имеющего как сужающуюся, так и расширяющуюся проточную часть, аналогично соплу Лаваля.

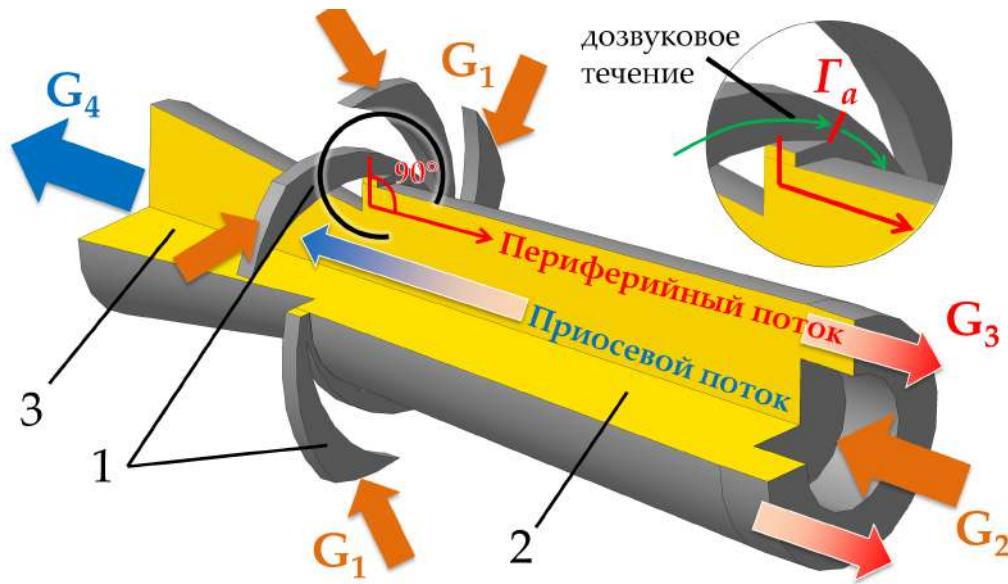


Рис. 5.17. Схема проточной части двухконтурной вихревой трубы со стандартным дозвуковым сопловым аппаратом (аналогично рис. 4.8): 1 - стандартный шестизаходный дозвуковой сопловой ввод; 2 - камера энергоразделения; 3 - диффузор холодного потока.

Устройство стандартного дозвукового соплового аппарата схематично

изображено на рис. 5.17. Каждый из шести показанных межлопаточных каналов имеет плавно сужающуюся форму, что позволяет практически изоэнтропно ускорить газовый поток до звуковой скорости  $a = \sqrt{\partial p / \partial \rho|_s}$  в критическом сечении  $\Gamma_a$ . Давление сжатого воздуха при таком ускорении падает примерно в два раза по сравнению с его начальным давлением торможения  $p_1^*$ . В том случае, если абсолютное давление торможения на входе в вихревую трубу  $p_1^* \geq 400$  кПа, возникает возможность разгона газа до сверхзвуковых скоростей. При использовании стандартного соплового ввода, переход на сверхзвуковую скорость происходит бесконтрольно уже за сопловым вводом (в камере энергоразделения), что нельзя считать эффективным. Это подтверждается обратно пропорциональной зависимостью КПД вихревой трубы от давления входного газа согласно [127, 159].

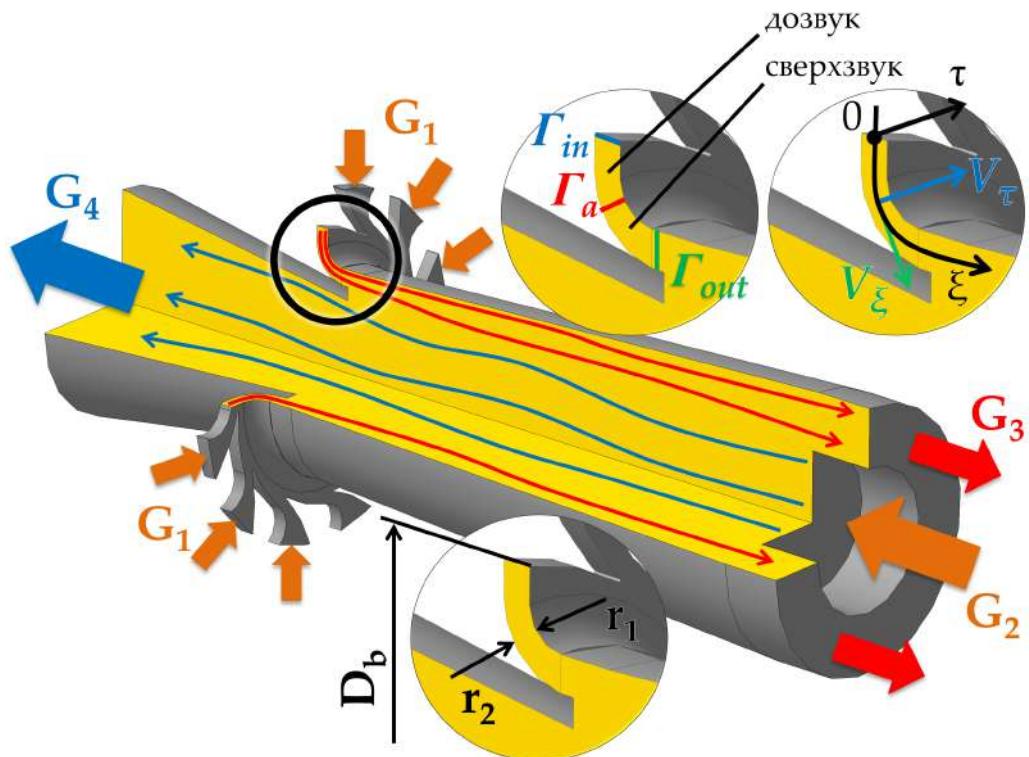


Рис. 5.18. Двухконтурная вихревая труба со сверхзвуковым сопловым вводом нового типа.

Для преодоления указанных недостатков был предложен и запатентован [369] сверхзвуковой сопловой ввод нового типа, схематично показанный на рис. 5.18. Он включает в себя две основные особенности (модификации):

- Проходя по сужающимся межлопаточным каналам газовый поток остается в дозвуковом режиме течения. Далее он попадает во входное сечение  $\Gamma_{in}$  новой сверхзвуковой части, в которой происходит ускорение до звуковой скорости в критическом сечении  $\Gamma_a$ . За этим сечением имеется расширяющаяся часть канала (аналогично соплу Лаваля), проходя по которой газовый поток разгоняется до сверхзвуковых скоростей на выходе в сечении  $\Gamma_{out}$ . Главное отличие данного соплового ввода от классического сопла Лаваля заключается в наличии вращающейся компоненты скорости  $V_\tau$  дополнительно к продольной компоненте  $V_\xi$ , см. рис. 5.18. В таком случае ускорение газа происходит не только за счет варьирования площадью проходного сечения  $\Gamma$ , но и за счет уменьшения радиуса вращения.
- Геометрия новой сверхзвуковой части соплового ввода формируется достаточно простым для изготовления способом, а именно тремя размерами: диаметром  $D_b$  и радиусами  $r_1$  и  $r_2$ , см. рис. 5.18. Дополнительно к ускорению газа, такой способ формирования проточной части позволяет повернуть вращающийся газовый поток в осевом направлении камеры энергоразделения. Таким образом осуществляется расчетное формирование не только скорости, но и направления течения.

### **Предварительный расчет при помощи квазиодномерной газодинамической модели**

Правильный выбор новых размеров соплового ввода  $D_b$ ,  $r_1$  и  $r_2$  требует применения упрощенной одномерной газодинамической модели, сформулированной в криволинейной системе координат  $\xi - \tau$ , отмеченной на рис. 5.18.

Одна из особенностей рассматриваемого течения газа заключается в том, что продольная компонента скорости  $V_\xi$  полностью определяется расходом

газа  $G_1$ . То есть, для входного сечения  $\Gamma_{in} = \Gamma(\xi = 0)$  можно записать:

$$V_\xi|_{\xi=0} = \frac{G_1}{\rho_{\xi=0}\Gamma_{\xi=0}}, \quad (5.11)$$

Основываясь на результатах экспериментальных наблюдений [164, 178] можно заключить, что тангенциальная (вращательная) компонента скорости будет близко соответствовать потенциальному вихрю, т.е. она будет обратно пропорциональна радиальной координате  $r$ :

$$\frac{dV_\tau}{dr} = -\frac{V_\tau}{r} \quad (5.12)$$

В этом случае, модуль полной скорости будет определяться суммой двух компонент:

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{V_\tau^2 + V_\xi^2} \quad (5.13)$$

Кроме того, в рассмотрение требуется ввести параметры торможения газа (температуру и давление), а также скорость звука, зависящую от локальной температуры газа:

$$T^* = T + \frac{|V|^2}{2c_p} \quad (5.14)$$

$$p^* = p \left( \frac{T^*}{T} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (5.15)$$

$$a = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{s=const}} = \sqrt{\gamma \mathfrak{R} T} \quad (5.16)$$

Коэффициенты теплоемкости, вязкости и теплопроводности, газовая постоянная и показатель адиабаты для воздуха даны выше по тексту (4.1).

В рассматриваемой постановке задачи, уравнения неразрывности, сохранения количества движения (уравнение Бернулли), сохранения энергии, а также уравнение адиабаты, запишутся следующим образом [50, 51, 52, 53]:

$$\begin{cases} \rho\Gamma V_\xi = const \\ \frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{|V|^2}{2}\right) = 0 \\ dH = 0 \\ p/\rho^\gamma = const \end{cases} \quad (5.17)$$

где  $dH = c_p dT^*$  - полный дифференциал энталпии торможения. Дифференцирование уравнения неразрывности и предположение о полной независимости компонент скорости  $V_\xi$  и  $V_\tau$  друг от друга позволяет получить окончательную форму уравнений для квазиодномерного течения:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\Gamma}{\Gamma} + \frac{dV_\xi}{V_\xi} = 0 \\ \frac{dV_\xi}{V_\xi} \left( \frac{V_\xi^2 - a^2}{a^2} \right) + \frac{V_\tau}{a^2} dV_\tau = \frac{d\Gamma}{\Gamma} \\ \frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \\ p = \rho \mathfrak{R} T \end{cases} \quad (5.18)$$

Данная система уравнений должна быть дополнена функциональной зависимостью площади поперечного сечения от продольной координаты  $\Gamma = \Gamma(\xi)$ , которая определяется соотношением радиусов  $r_1$  и  $r_2$ , а также диаметром  $D_b$ , как показано на рис. 5.18.

Высокие скорости газа могут приводить к отклонению течения от изоэнтропного из-за ощутимых потерь давления на трение. Исходя из этого, численное решение системы уравнений (5.18) требуется откорректировать используя формулу Дарси-Вейсбаха [372]:

$$\begin{cases} dp_{loss} = \zeta \frac{d\xi}{D_H} \frac{\rho |V|^2}{2} \\ \zeta = \frac{0.316}{Re^{1/4}} \\ Re = \frac{\rho |V| D_H}{\mu} \end{cases} \quad (5.19)$$

где  $dp_{loss}$  - потери давления на трение при прохождении газом расстояния  $d\xi$ ,  $D_H = 4\Gamma/\Pi$  - гидравлический диаметр,  $\Pi$  - смоченный периметр. Поправку на потери давления  $dp_{loss}$  необходимо вносить в численное решение системы (5.18) на каждом шаге интегрирования с помощью следующих уравнений:

$$\begin{cases} d\rho = \frac{\rho}{\gamma p} dp_{loss} \\ dV_\xi = -V_\xi \left( \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\Gamma}{\Gamma} \right) \\ dV_\tau = -\frac{\sqrt{V_\xi^2 + V_\tau^2}}{\rho V_\tau} dp_{loss} - \frac{V_\xi}{V_\tau} dV_\xi \end{cases} \quad (5.20)$$

Интегрирование уравнений (5.18)–(5.20) вдоль координаты  $\xi$  осуществлялось методом Эйлера первого порядка точности [373, 374] с шагом интегрирования  $\Delta\xi = \xi_{out}/512 \sim 10^{-2}$  mm. Уменьшение шага интегрирования, а также использование численных алгоритмов более высокого порядка, не приводило к измерению результатов. В рамках настоящего исследования, целью применения квазиодномерной модели (5.18)–(5.20) было нахождение такого сочетания размеров  $D_b$ ,  $r_1$  и  $r_2$ , при котором наблюдается плавное ускорение сжатого газа до сверхзвуковых скоростей без локальных понижений скорости.

Для дальнейшего применения модели (5.18)–(5.20) предположим, что на выходе из межлопаточных каналов, т.е. в сечении  $\Gamma_{in}$  на рис. 5.18, газовый поток достигает дозвуковой скорости  $|V| = 230$  м/с  $\approx 0.7a$ . Принимаются следующие параметры торможения потока:  $T^* = 300$  K,  $p^* = 400$  кПа. В соответствии с результатами численных и экспериментальных исследований,

представленных выше по тексту, пропускная способность соплового ввода должна варьироваться в диапазоне  $G_1 \approx 0.03\ldots0.04$  кг/с. Для указанных исходных данных были подобраны следующие размеры сверхзвуковой части соплового ввода:

$$D_b = 37 \text{ мм} \quad r_1 = 2.5 \text{ мм} \quad r_2 = 5 \text{ мм} \quad (5.21)$$

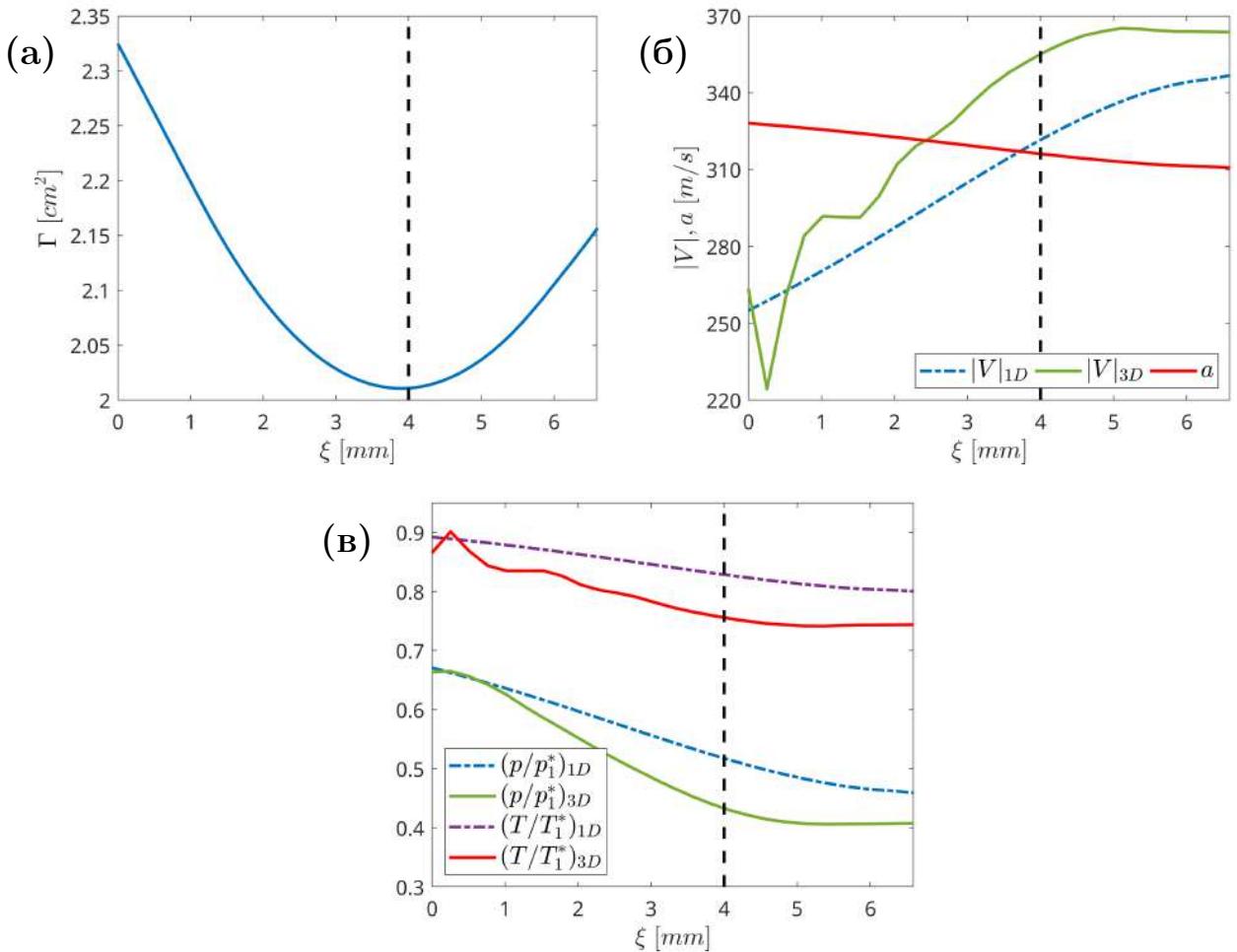


Рис. 5.19. Решение квазиодномерной численной модели (5.18)–(5.20): (а) зависимость площади проходного сечения от продольной координаты  $\Gamma = \Gamma(\xi)$  для размеров соплового ввода (5.21); (б) зависимость полной скорости течения  $|V|$ , а также скорости звука  $a$  от продольной координаты  $\xi$ ; (в) распределение давления и температуры вдоль координаты  $\xi$ . Индексом  $1D$  отмечено решение модели (5.18)–(5.20), в то время как индекс  $3D$  указывает на верификацию результатов с применением трехмерной модели (2.26). Вертикальная пунктирная линия указывает на положение критического сечения  $\Gamma_a$ , имеющего наименьшую площадь, как показано на рис. 5.18.

Расчетное распределение газодинамических параметров вдоль координа-

ты  $\xi$  в пределах сверхзвуковой части соплового ввода (см. рис. 5.18) показано на рис. 5.19. Индексом  $1D$  отмечено решение квазиодномерной модели (5.18)–(5.20), а индексом  $3D$  – решение полной трехмерной численной модели, используемой для верификации результатов (обсуждается ниже по тексту). Подрисунок (а) показывает плавное уменьшение площади проходного сечения сверхзвуковой части соплового ввода вплоть до координаты  $\xi \approx 4$  мм. В окрестности этой координаты ожидается достижение течением скорости звука. Последующее расширение канала для  $\xi > 4$  мм должно вызвать переход течения на сверхзвуковой режим.

Рисунок 5.19(б, синяя штрихпунктирная линия) говорит о плавном повышении скорости потока от 250 м/с до звуковой скорости  $a$  в окрестности критического сечения ( $\xi \approx 4$  мм). Более того, за критическим сечением скорость потока продолжает плавно увеличиваться, что говорит о правильности выбора размеров соплового ввода. Следует отметить падение величины скорости звука  $a$  (5.16) в результате снижения статической температуры газа  $T$ . Подрисунок (в) говорит о плавном снижении статической температуры и давления газа в результате его ускорения, а также из-за потерь давления (5.19). Отмечается падение статического давления более чем в два раза по сравнению с исходным давлением торможения, т.е.  $p(\xi = 6.5) < 0.5p_1^*$ . Это говорит о сверхзвуковом режиме течения газа на выходе из соплового ввода.

### **Верификация результатов при помощи трехмерной модели течения газа**

Для верификации полученного численного решения уравнений (5.18)–(5.20) требуется использовать полную модель трехмерного турбулентного течения газа в вихревой трубе (2.26). Параметры модели подробно обсуждаются в разделе 4.2..

Рисунок 5.20 показывает расчетное распределение числа Маха

$$Ma = \frac{|V|}{a} \quad (5.22)$$

по проточной части двухконтурной вихревой трубы с установленным стандартным дозвуковым сопловым вводом (см. рис. 5.17). Видно, что поток газа ускоряется до звуковой скорости ( $Ma = 1$ ) на выходе из сужающихся межлопаточных каналов. Вследствие того, что звуковой поток газа оказывается недорасширенным, происходит неконтролируемый переход на сверхзвуковой режим течения уже за сопловым вводом непосредственно в камере энергоразделения. Это приводит к формированию шести зон высоких скоростей, отчетливо видимых на рис. 5.20. Область камеры энергоразделения, в которой сохраняется сверхзвуковой режим течения обозначена на рисунке длиной  $L_s$ . В случае стандартного соплового ввода данная длина составила  $L_s \approx 0.4D$ .

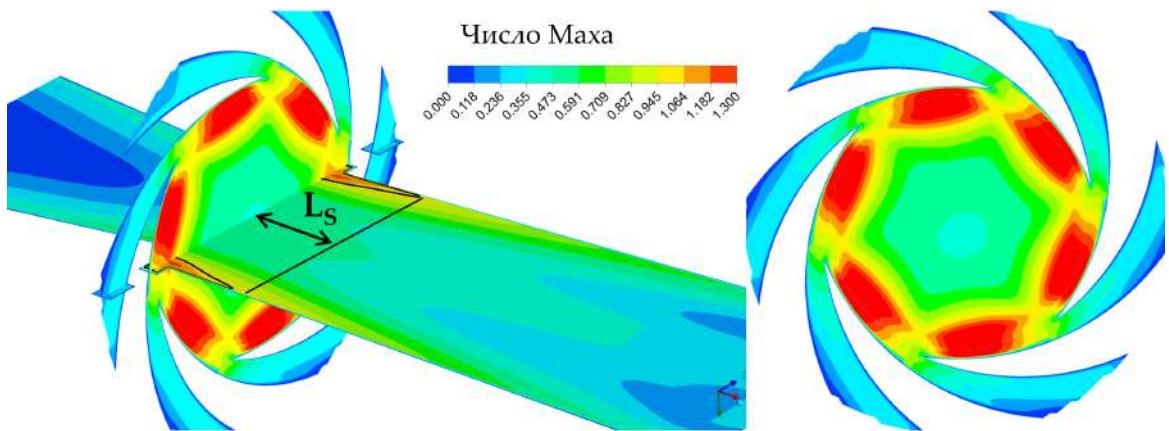


Рис. 5.20. Распределение числа Маха (5.22) по проточной части двухконтурной вихревой трубы с установленным стандартным дозвуковым сопловым вводом. Граница  $Ma = 1$  отмечена сплошной линией.

Установка сверхзвукового соплового ввода с выбранными размерами (5.21) формирует равномерное осесимметричное течение с плавным переходом с дозвукового на сверхзвуковой режим, что хорошо видно на рис. 5.21. В связи с тем, что данные переход происходит внутри соплового ввода контролируемым образом, ожидается уменьшение необратимых потерь энергии. В результате, область сверхзвуковых скоростей внутри камеры энергоразде-

ления сохраняется на большем расстоянии  $L_s \approx 0.55D$ , что примерно на 38% больше по сравнению со случаем использования дозвукового ввода.

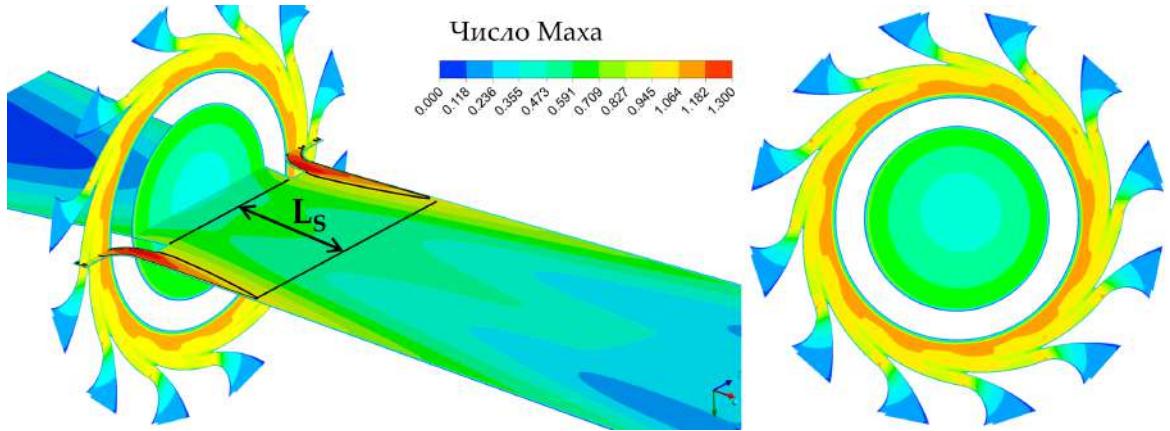


Рис. 5.21. Распределение числа Маха (5.22) по проточной части двухконтурной вихревой трубы с установленным сверхзвуковым сопловым вводом:  $D_b = 37$  мм.

Можно отметить, что фактическое трехмерное течение газа в сверхзвуковой части соплового ввода существенно отличается от решения упрощенной квазиодномерной модели (5.18)–(5.20), как видно из рис. 5.19 (б) и (в). Это связано, прежде всего, с влиянием течения в камере энергоразделения, не учтенного в квазиодномерной модели. Также это можно связать с расслоением газодинамических параметров по поперечным сечениям  $\Gamma$ , что не учитывается в упрощенной одномерной постановке. Таким образом, уравнения (5.18)–(5.20) могут быть использованы только для предварительных расчетов с последующей верификацией.

Интересный феномен возникает в том случае, если размеры сверхзвукового соплового ввода выбраны неверно. В качестве примера, рис. 5.22 показывает течение в вихревой трубе для случая завышенного диаметра  $D_b = 42$  мм (по сравнению с  $D_b = 37$  мм на рис. 5.21). Вместо плавного роста скорости наблюдается крайне нестационарное несимметричное течение. Число Маха в некоторых областях подскакивает до  $Ma > 1.8$ , в то время как в других частях оно падает ниже единицы ( $Ma < 1$ ). Подобное явление (срыв потока со скачком уплотнения) можно наблюдать в классическом сопле Лаваля с перерасширенной площадью выходного сечения.

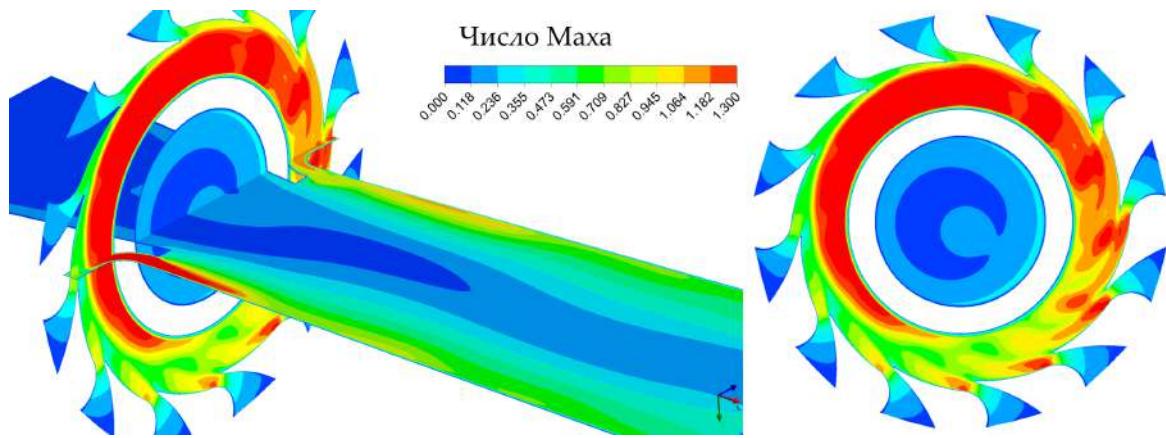


Рис. 5.22. Течение в сверхзвуковом сопловом вводе с неверно выбранными размерами:  $D_b = 42$  мм.

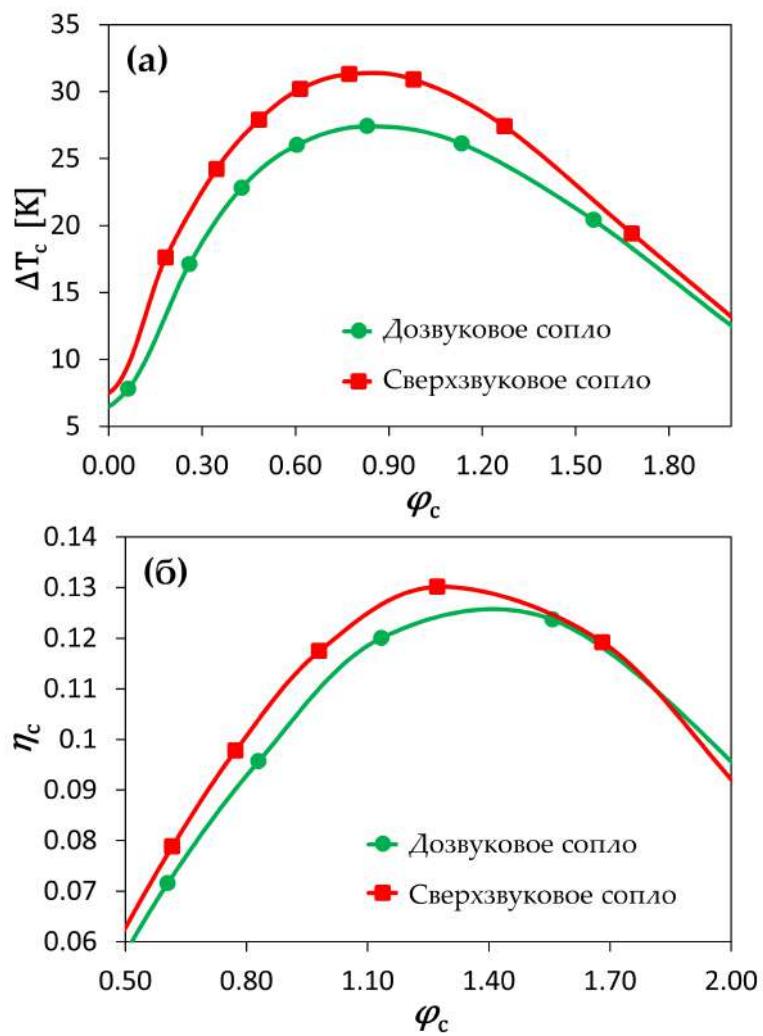


Рис. 5.23. Сравнение интегральных характеристик двухконтурной вихревой трубы с установленными стандартным и сверхзвуковым сопловыми вводами: (а) степень понижения температуры (2.1); (б) холодильный КПД (2.6).

Интегральные характеристики  $\Delta T_c(\varphi_c)$  и  $\eta_c(\varphi_c)$  двухконтурной вихревой трубы с разными сопловыми аппаратами показаны на рис. 5.23. Видно, что более эффективных разгон газа при помощи нового сверхзвукового соплового ввода приводит к некоторому росту энергоэффективности вихревой трубы. А именно, замена стандартного соплового ввода на сверхзвуковой приводит к падению температуры холодного потока примерно на  $5^{\circ}C$ , а также росту холодильного КПД вихревой трубы примерно на 1%.

Следует подчеркнуть, что запас давления в рассматриваемом случае ( $p_1^* = 400$  кПа) является относительно небольшим, что не позволяет перейти в область больших чисел Маха ( $Ma > 2...3$ ). С повышением давления  $p_1^*$  ожидается значительный рост чисел Маха и еще больший рост энергоэффективности вихревой трубы со сверхзвуковым сопловым вводом по сравнению со стандартной трубой.

Фотография экспериментального образца соплового ввода нового типа показана на рис. 5.24. Принцип действия и конструкция соплового ввода защищены патентом РФ на изобретение [369].



Рис. 5.24. Фотография экспериментального образца соплового ввода нового типа [369]

### 5.3.2. Развихритель холодного потока

Скорость газа, формирующего холодный поток вихревой трубы, в сечении диафрагмы достигает значительных околозвуковых или даже сверхзвуковых величин. Для выхода этого потока в атмосферу или в трубопровод требуется понизить скорость газа. Для этого в настоящее время применяют диффузор, в котором происходит плавное увеличение площади проходного сечения. В работах [371, 375] было установлено, что геометрия диффузора холодного потока существенным образом влияет на характеристики вихревой трубы. Неэффективное торможение холодного потока приводит к завышенным потерям давления в диффузоре и, соответственно, к понижению полезного перепада давления на вихревой трубе.

Неэффективность классического диффузора в процессе торможения холодного потока газа может быть связана с наличием высокой тангенциальной (вращательной) компоненты скорости. Расширение поперечного сечения не может прямым образом повлиять на данную компоненту. Очевидно, что в классическом диффузоре гашение тангенциальной скорости осуществляется, в том числе, посредством трения газа о стенки диффузора приводя к потери этой части кинетической энергии. Можно предположить, что выпрямление потока перед диффузором при помощи специального лопаточного аппарата (развихрителя) [376] должно повысить эффективность торможения газа и улучшить характеристики вихревой трубы.

В настоящем исследовании рассмотрены три различных конфигурации лопаточного развихрителя холодного потока вихревой трубы, показанные на рис. 5.25 и обозначенные номерами 1, 2 и 3. Известно, что распределение тангенциальной скорости в сечении диафрагмы вихревой трубы близко к линейному [125, 126, 127, 128, 129, 130], а вращение газа в приосевой зоне (центре) практически отсутствует. Исходя из этого, в первом случае лопатки располагаются только на внешней части течения, а центральная часть заполнена

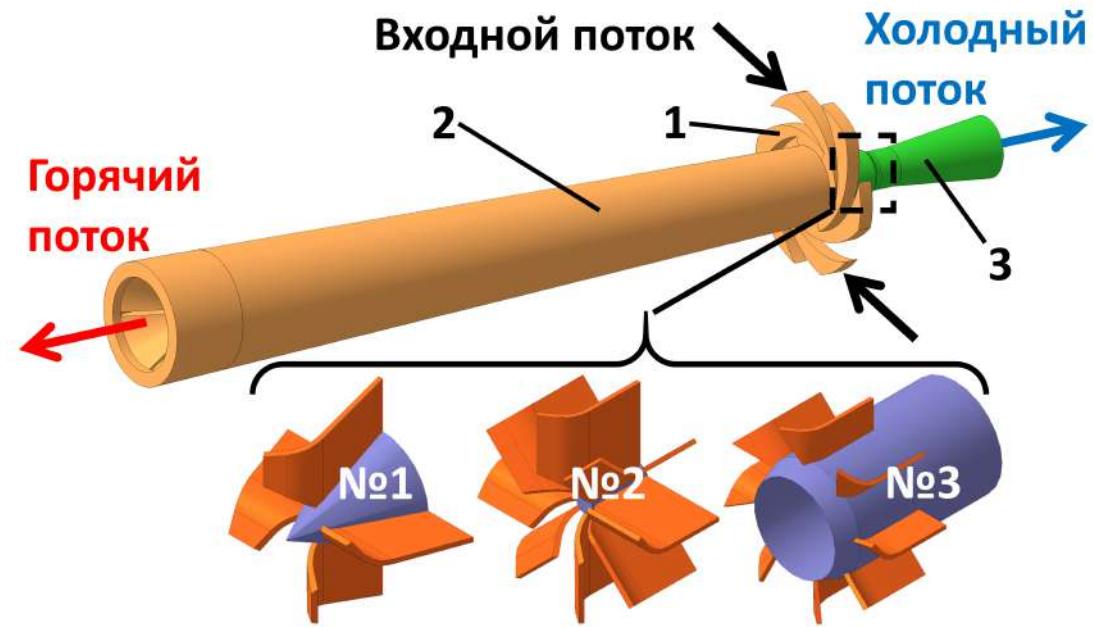


Рис. 5.25. Схема расположения развижителя холдного потока вихревой трубы.  
Исследуемые конфигурации развижителя обозначены номерами 1,2 и 3.

обтекателем. Напротив, в развижителе №2 лопатки лопатки заполняют все проходное сечение. Развижитель №3, в отличие от №1, пропускает центральную часть потока через себя без воздействия на нее. Это позволяет сохранить осевую скорость этой части потока с учетом того, что тангенциальная скорость невысока.

Разделительная коническая вихревая труба, рассмотренная в разделе 4.1., использовалась в качестве базовой конфигурации проточной части. Размеры вихревой трубы и граничные условия сведены в таблицы 4.1 и 4.2. Влияние развижителей различной конфигурации на энергетические характеристики вихревой трубы исследовалось при помощи численной модели (2.26). Параметры модели и расчетных сеток подробно обсуждаются в разделе 4.1..

Рисунок 5.26(а) показывает распределение скорости по продольному разрезу диффузора холдного потока для базовой (начальной) конфигурации, т.е. в отсутствии какого-либо развижителя холдного потока. Видно, что скорости достигают значительных величин и превышают 250 м/с. Большие тангенциальные скорости вызывают действие центробежных сил, что приводит

к падению давления в приосевой части диффузора ниже давления окружающей среды. В результате возникает подсос газа в центр диффузора и крупномасштабная циркуляционная зона, отчетливо изображенная на рисунке. В свою очередь, выход охлажденного газа из вихревой трубы осуществляется только по внешней части поперечного сечения диффузора. Очевидно, подобная организация течения является неэффективной и может вызывать большие необратимые потери давления.

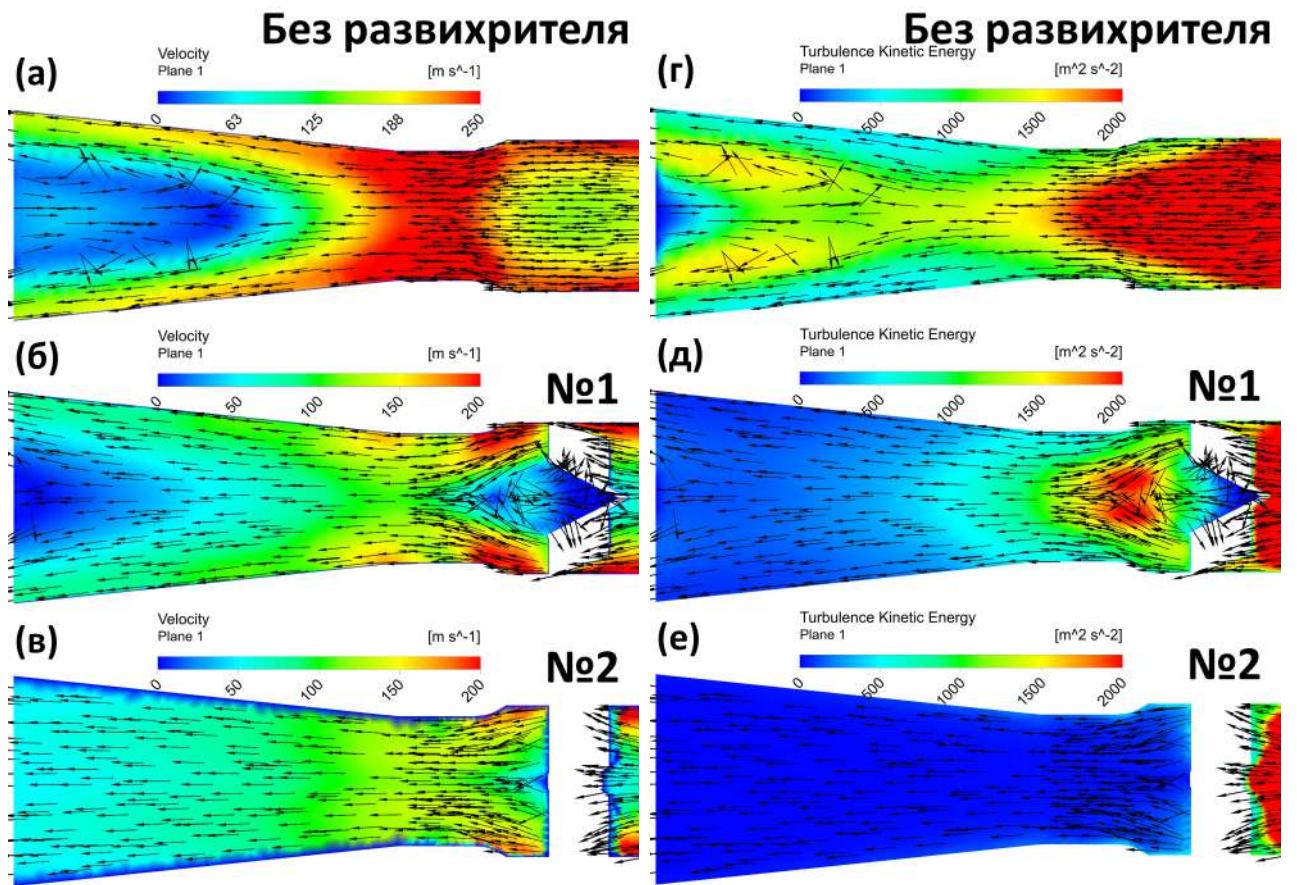


Рис. 5.26. Расчетное распределение (а,б,в) модуля скорости  $|V|$  и (г,д,е) кинетической энергии турбулентности  $k$  по продольному сечению развиhrителей различной конфигурации в соответствии с рис. 5.25.

Из рис. 5.26(б) видно, что развиhrитель №1 существенным образом уменьшает модуль скорости за счет снижения тангенциальной компоненты. Это приводит к очевидному уменьшению циркуляционной зоны. Более того, развиhrитель №2 (подрисунок в) еще больше смягчает течение и полностью исключает циркуляционную зону приводя к равномерному распределению скоп

ности в каждом поперечном сечении. При этом, модуль скорости падает до величин  $|V| < 150$  м/с. Развихритель №2 также позволяет практически полностью остановить вращение потока.

На рис. 5.26 (г), (д) и (е) исследуется распределение кинетической энергии турбулентности  $k$  в каждом из рассмотренных развихрителей. Наибольшая турбулизация течения обнаружена в том случае, когда лопаточный развихритель полностью отсутствует. Установка развихрителей №1 и 2 вызывает драматическое падение энергии турбулентности, что особенно выражено в случае развихрителя №2. Принимая во внимание непосредственное влияние энергии  $k$  на турбулентную вязкость  $\mu_t$  согласно (2.26), можно ожидать соответствующее снижение необратимых потерь энергии как в случае использования развихрителя №1, так и №2.

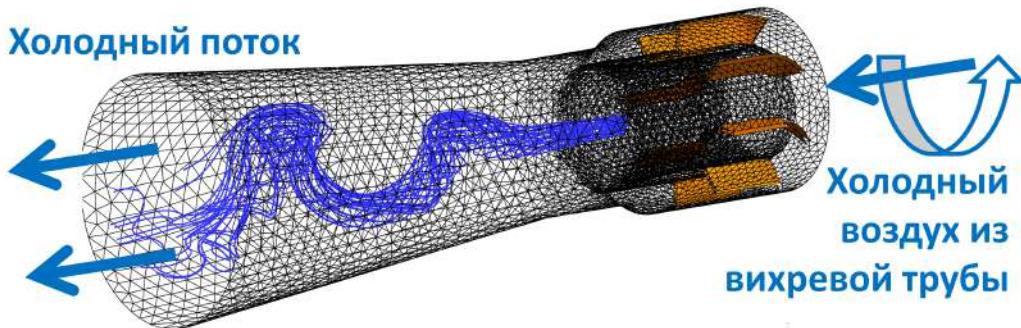


Рис. 5.27. Вторичная вихревая структура, наблюдаемая в диффузоре холодного потока за установленным развихрителем №3.

Несмотря на то, что тангенциальные скорости в приосевой части течения достаточно малы и не требуют снижения, развихритель №3 не показал хороших результатов. Однако он обнаружил интересное физическое явление. Его установка привела к дестабилизации потока газа. В центральной части диффузора, в которой наблюдались возвратные течения, образовалась вторичная вихревая структура, показанная линиями тока на рис. 5.27. Дестабилизация течения привела к его еще большей турбулизации, что негативным образом сказалось на характеристики вихревой трубы.

Зависимость холодильного КПД вихревой трубы (2.6) от доли холодного

потока (2.3)  $\eta_c = \eta_c(\varphi_c)$  исследуется на рис. 5.28(а). Как ожидалось, установка развихрителя №3 заметно снизила энергоэффективность вихревой трубы, что связано с дестабилизацией течения. Наибольший прирост холодильного КПД по сравнению с базовой (начальной) конфигурацией вихревой трубы был обнаружен при установке развихрителя №2. Величина холодильного КПД увеличилась примерно на 1...2% (с  $\eta_c \approx 0.11$  до  $\eta_c \approx 0.125$ ).

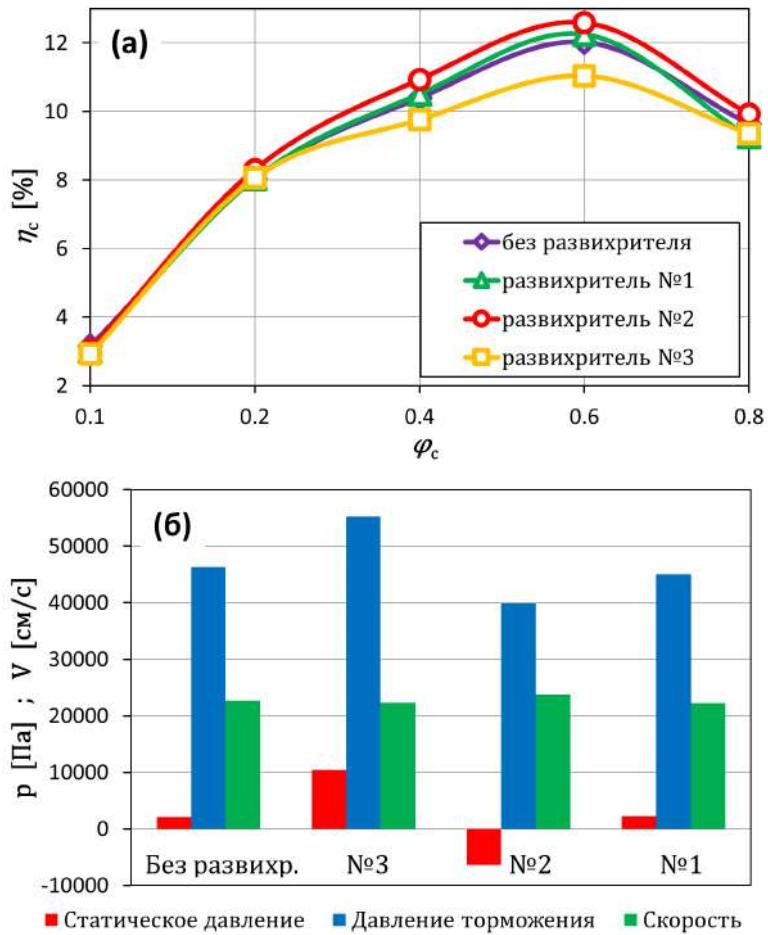


Рис. 5.28. Зависимость (а) холодильного КПД  $\eta_c$  вихревых труб с различными развихрителями от доли холодного потока  $\varphi_c$ . Зависимость (б) газодинамических параметров, осредненных по сечению диафрагмы, от типа установленного развихрителя.

Среднеинтегральные значения статического давления  $p$ , давления торможения  $p^*$  и модуля скорости  $|V|$  в сечении диафрагмы при использовании развихрителей различной конфигурации (см. рис. 5.25 и 4.1) представлены на рис. 5.28(б). Диаграмма показывает, что скорость  $|V|$  в сечении диафрагмы, т.е. непосредственно перед развихрителем и диффузором холодного потока,

остается неизменной для всех рассмотренных случаев. Использование наиболее эффективного развихрителя №2 приводит к заметному падению давлений  $p$  и  $p^*$  в сечении диафрагмы. Этим повышается полезный перепад давления на вихревой трубе, используемый в процессе энергоразделения Ранка-Хилша, что объясняет повышение энергоэффективности вихревой трубы при использовании развихрителя №2.

Напротив, развихритель №3 вызывает рост давлений  $p$  и  $p^*$  в сечении диафрагмы и соответствующее уменьшение полезного перепада давления, что также хорошо согласуется с рис. 5.28(а). Развихритель №1 занимает некоторое промежуточное положение.

Следует подчеркнуть, что выбранные размеры и форма использованных развихрителей являются предварительными, выбранными на основе инженерных оценок. Исходя из этого, можно предположить наличие некоторого резерва для еще более значительного повышения энергоэффективности вихревой трубы после тщательной оптимизации развихрителя №2.

### 5.3.3. Диффузор горячего потока

В отличие от холодного потока вихревой трубы, имеющего высокую скорость в сечении диафрагмы, горячий поток выводится из камеры энергоразделения с противоположной стороны и имеет значительно меньшие скорости. Поэтому, его эффективное торможения представляет более простую задачу. В двухконтурной вихревой трубе торможение горячего потока осуществляется при помощи радиального щелевого диффузора [129, 187, 197, 198]. Основным параметром данного диффузора является зазор  $\delta$ , как показано на рис. 5.29 и 2.4.

В настоящем разделе используется численная модель (2.26) для исследования влияния зазора  $\delta$  на характеристики двухконтурной вихревой трубы. Параметры численной модели детально обсуждаются в разделе 4.2..

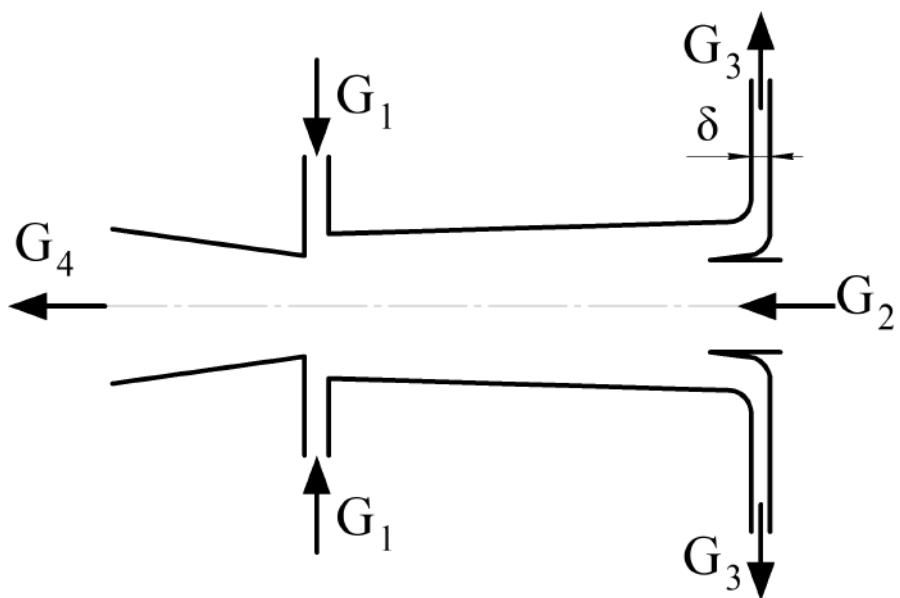


Рис. 5.29. Схема двухконтурной вихревой трубы со щелевым диффузором горячего потока размером  $\delta$  [129], см. также рис. 2.4.

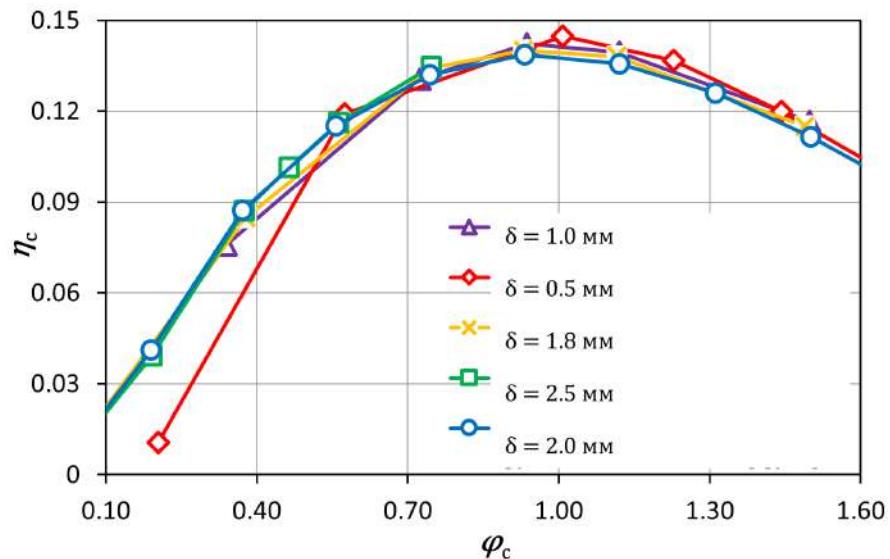


Рис. 5.30. Зависимость холодильного КПД  $\eta_c$  двухконтурной вихревой трубы от доли холодного потока  $\varphi_c$  при различных размерах щели диффузора горячего потока  $\delta$  (см. рис. 5.29).

На рис. 5.30 показаны расчетные величины холодильного КПД  $\eta_c$  вихревой трубы в размером щелевого диффузора, варьируемым в диапазоне  $\delta = [0.5, 2]$  мм. Несмотря на исходные предположения, расчеты показали слабое влияние зазора  $\delta$  на энергоэффективность вихревой трубы. Тем не менее, выбор малого размера  $\delta = 0.5$  мм дал некоторое повышение холодильного

КПД по сравнению с большим зазором  $\delta > 0.5$  мм. Согласно графикам на рис. 5.30, повышение КПД составило примерно 0.5%.

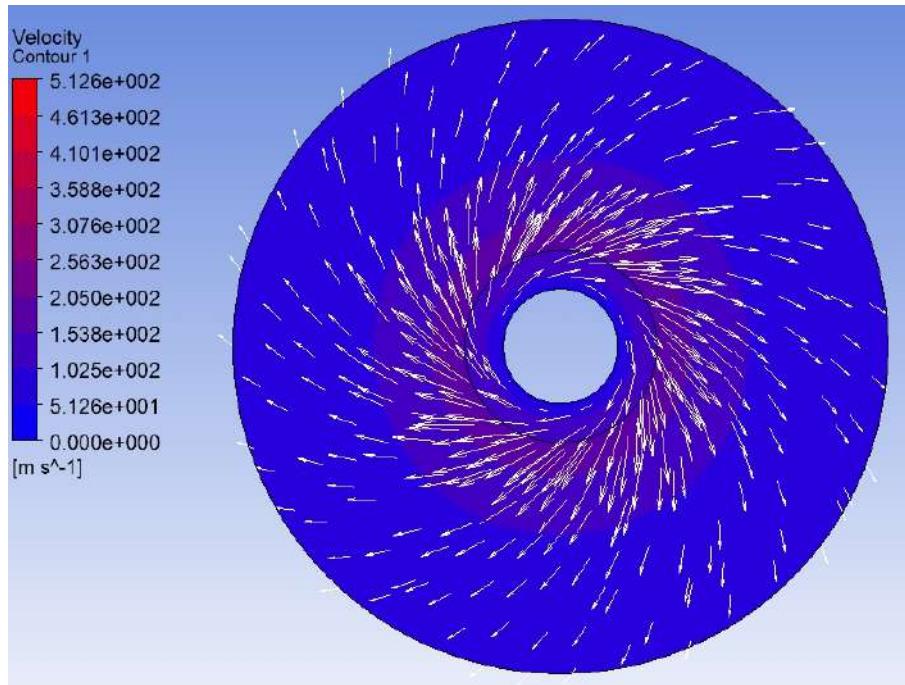


Рис. 5.31. Расчетная картина течения газа (векторное поле скоростей) в радиальном щелевом диффузоре с размером  $\delta = 2.5$  мм.

Рисунок 5.31 показывает расчетную картину течения в радиальном щелевом диффузоре с размером  $\delta = 2.5$  мм. Видно, что на выходе из камеры энергоразделения горячий поток газа имеет достаточно большую тангенциальную (вращательную) компоненту скорости на уровне 300 м/с. По мере продвижения вдоль щелевого диффузора, радиус вращения линейно увеличивается вызывая соответствующее затухание вращения газа. Также вклад вносит торможение газа о стенки диффузора. В результате, на выходе из диффузора скорость горячего потока газа падает ниже 40 м/с.

#### 5.4. Промышленная верификация результатов исследования

На основании результатов исследований, представленных в настоящей диссертации, была разработана линейка вихревых труб, имеющих повышенную энергетическую эффективность. Данные вихревые трубы являются со-

ставными частями установок, предназначенных для выполнения различных задач в промышленности. Проектирование как вихревых труб, так и установок на их основе, было выполнено в конструкторском бюро ООО “КБ “ЧКЗ-ЮГСОН”, а также в АО “КЭНПО”.

#### 5.4.1. Вихревые воздушные теплогенераторы

Данный класс вихревых труб предназначен для использования в качестве источника горячего воздуха. Принцип работы заключается в следующем: нагретый в процессе сжатия в компрессоре сжатый воздух, минуя конечный холодильник, подается на вход вихревой трубы. В процессе энергоразделения температура части воздуха, покидающего вихревую трубу в виде горячего потока, поднимается до  $+80\dots +210^{\circ}\text{C}$ . Далее полученный горячий воздух используется для отогревания и размораживания элементов трубопроводов, запорно-регулирующей арматуры, различных поверхностей, отопления производственных и бытовых помещений и т.п.

Таблица 5.2  
Измеренные на испытаниях характеристики разработанных и изготовленных вихревых теплогенераторов малого типоразмера

	ВТ 3-6	ВТ 5-90
Избыточное давление воздуха на входе, МПа	0.6	0.6
Расход воздуха на входе, $\text{нм}^3/\text{мин}$	0.3	1.5
Масса вихревой трубы, кг	0.4	1.4
Доля холодного потока $\varphi_c$	0.6	0.6
Изоэнтропный КПД $\eta_s$	0.3	0.36
Температура воздуха на входе, $^{\circ}\text{C}$	+20	+60
Температура горячего потока, $^{\circ}\text{C}$	+75	+135
Температура холодного потока, $^{\circ}\text{C}$	-18	+8.1

Различные вихревые терплогенераторы отличаются типоразмером и, соответственно, пропускной способностью (производительностью горячего воздуха). В таблицу 5.2 сведены измеренные на испытаниях технические харак-

Таблица 5.3

Измеренные на испытаниях характеристики разработанных и изготовленных вихревых теплогенераторов среднего типоразмера

	ВТ 30Р	РЕСШ.4414		
Избыточное давление воздуха на входе, МПа	0.5	0.65		
Расход воздуха на входе, $\text{нм}^3/\text{мин}$	5	14		
Масса вихревой трубы, кг	10.3	46		
Доля холодного потока $\varphi_c$	0.53	0.6	0.3	0.75
Изоэнтропный КПД $\eta_s$	0.45	0.41	0.53	0.24
Температура воздуха на входе, $^{\circ}\text{C}$	+59	+62	+64	+71
Температура горячего потока, $^{\circ}\text{C}$	+127	+145	+97	+187
Температура холодного потока, $^{\circ}\text{C}$	-1	+7	-14	+34

теристики двух вихревых труб малого типоразмера. В таблице 5.3 приведены измеренные характеристики вихревых труб среднего типоразмера.

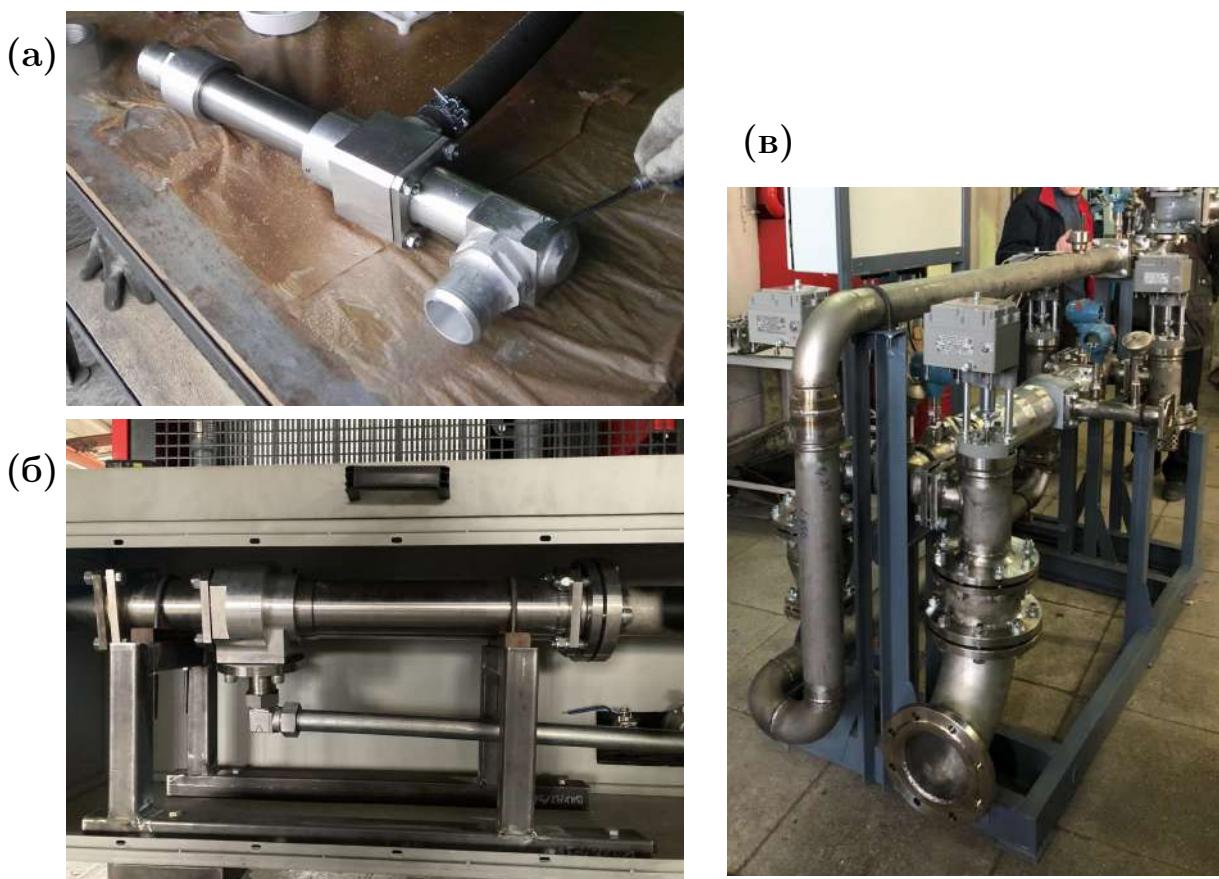


Рис. 5.32. Фотографии опытных образцов вихревых труб, сделанные на заводе-изготовителе: (а) ВТ 30Р и (б, в) РЕСШ.4414.

Фотографии опытных образцов вихревых труб ВТ 30Р и РЕСШ.4414 показаны на рис. 5.32. Измеренные на заводе-изготовителе характеристики данных вихревых труб приведены на графиках рис. 5.33. Из графиков следует, что изоэнтропный КПД промышленных образцов вихревых труб в режиме наибольшей холодопроизводительности (при доле холодного потока  $\varphi_c \approx 0.6$ ) составил  $\eta_s \approx 0.4...0.41$ . Также графики показывают, что изменение доли холодного потока в диапазоне  $0.3 \leq \varphi_c \leq 0.8$  позволяет варьировать температурой горячего потока вихревой трубы РЕСШ.4414 в диапазоне  $+100^\circ\text{C} \leq T_h \leq +200^\circ\text{C}$ .

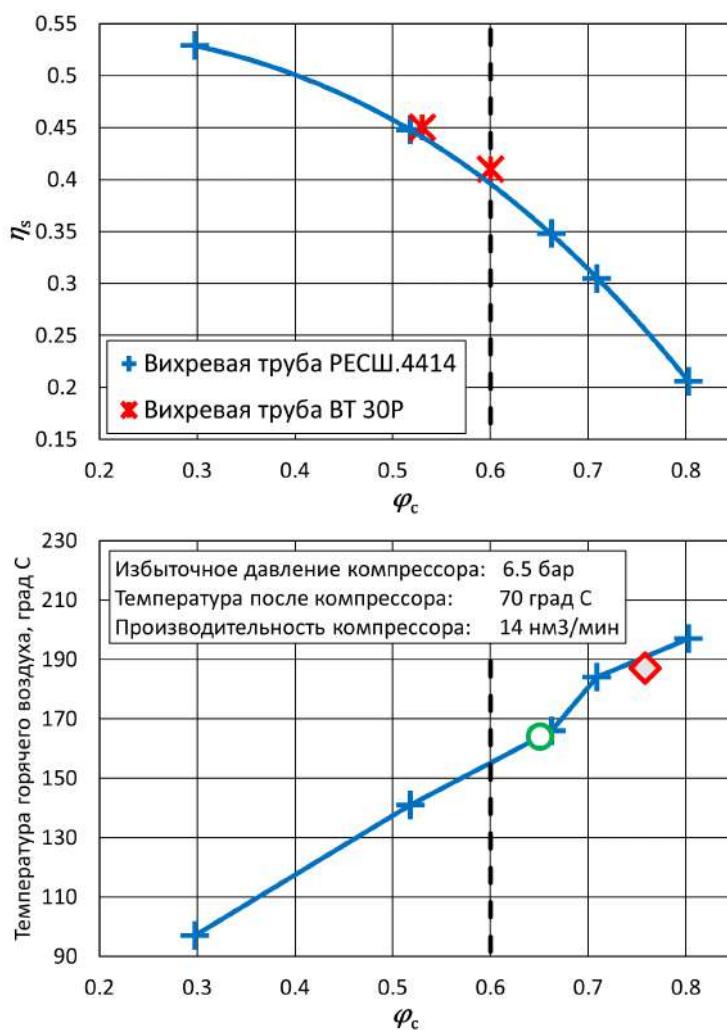


Рис. 5.33. Измеренные на заводе-изготовителе характеристики промышленных образцов вихревых труб ВТ 30Р и РЕСШ.4414: (а) зависимость изоэнтропного КПД  $\eta_s$  от доли холодного потока  $\varphi_c$ ; (б) зависимость температуры горячего воздуха  $T_h$  от доли холодного потока  $\varphi_c$ .

### 5.4.2. Вихревые холодогенераторы для установок утилизации попутного нефтяного газа

Установки на базе данных вихревых труб предназначены для сепарации попутного нефтяного газа (ПНГ) на фракции. Принцип работы установок сепарации ПНГ заключается в вымораживании влаги и высококипящих углеводородов. В результате на выход из установки поступает очищенный газ с высокой концентрацией метана. Основным источником холода является вихревая труба.

Основная особенность технологического процесса сепарации ПНГ заключается в переменной производительности установки. В этой ситуации для минимизации потери эффективности охлаждения газа в вихревой трубе используется регулируемый сопловой закручивающий аппарат.

Технические характеристики разработанных и изготовленных промышленных образцов вихревых труб сведены в таблицы 5.4 и 5.5. Фотография образца вихревой трубы ВТ 30-50 с места ее эксплуатации представлена на рис. 5.34.

Таблица 5.4  
Измеренные на испытаниях характеристики разработанных и изготовленных вихревых труб для установок сепарации попутного нефтяного газа (ПНГ)

	ВТ 30-50	ДВТР 40-9000	ВТ 63Р
Избыточное давление газа на входе, МПа	3	4	2.5...5
Масса вихревой трубы, кг	0.6	138	133
Доля холодного потока $\varphi_c$	0.6	0.6	0.6
Изоэнтропный КПД $\eta_s$	0.3	0.3	0.36
Температура газа на входе, $^{\circ}\text{C}$	-25...+22	+22	-24...-6
Температура горячего потока, $^{\circ}\text{C}$	+20...+70	+110	+3...+27
Температура холодного потока, $^{\circ}\text{C}$	-65...-18	-18	-55...-40

Таблица 5.5  
Результаты испытания опытного образца вихревой трубы ДВРТ 40-9000

Степень открытия соплового ввода, %	1	20	40	60	80	100
Давление на входе, МПа	10	10	10,5	10	10	10
Температура на входе, °C	16	16	16	16	16	16
Температура горячего потока, °C	60	78	86	90	93	86
Температура холодного потока, °C	-25	-23	-24	-27	-28	-21
Доля холодного потока $\varphi_c$	0.59	0.61	0.64	0.63	0.64	0.65
Изоэнтропный КПД $\eta_s$	0.28	0.27	0.28	0.3	0.28	0.26



Рис. 5.34. Фотография образца разделительной вихревой трубы ВТ 30-50 с места ее эксплуатации.

## 5.5. Выводы по главе

1. Метод минимизации генерации энтропии был использован для исследования необратимых потерь энергии в вихревом течении газа и анализа существующих резервов повышения энергоэффективности вихревых труб. Распределение вычисленных полей порождения энтропии показало существование паразитной зоны в центральной части камеры энергоразделения, которая не участвует в эффекте энергоразделения Ранка-Хилша или вносит в него отрицательный вклад. Было сделано

предположение о необходимости уменьшения диаметров диафрагмы  $d_a$  и сопла ввода дополнительного потока  $d_b$  для исключения данной паразитной зоны.

2. Серия вычислительных экспериментов была выполнена на высокопроизводительном кластере “УРАН” Уральского отделения РАН с целью проведения параметрического анализа влияния размеров камеры энергоразделения на характеристики вихревых труб. Было найдено подтверждение необходимости уменьшения диаметра диафрагмы и сопла ввода дополнительного потока до  $d_a = d_b \approx 18\ldots19$  мм. Более того, одновременное уменьшение диаметра всей камеры энергоразделения до  $D = 25\ldots27$  мм усиливает эффект и приводит к общему росту холодильного КПД вихревой трубы примерно на 2…3%. Также параметрический анализ показал необходимость выдерживания длины камеры энергоразделения равной  $L = 3D\ldots6D$  и угла ее конусности  $\alpha = 0^\circ\ldots4^\circ$ .
3. Была создана экспериментальная установка для исследования двухконтурной и разделительной вихревой трубы с целью верификация основных положений, найденных при помощи вычислительных экспериментов. Измерения подтвердили необходимость уменьшения диаметров диафрагмы и сопла ввода дополнительного потока до  $d_a = d_b \approx 18$  мм. Также установлено, что повышения холодильного КПД можно достичь путем увеличения пропускной способности основного соплового ввода с базовой величины  $G_1 = 0.03$  кг/с до  $G_1 \approx 0.04$  кг/с (то есть, примерно на 30%). Таким образом, применение регулируемого соплового ввода переменной пропускной способности может оказывать положительное влияние на эффективность вихревой трубы.
4. Предложен и запатентован [369] принципиально новый тип соплового ввода вихревой трубы, позволяющий повысить ее эффективность при работе на больших перепадах давления  $\Delta p = p_{\text{вход}}^* - p_{\text{хол}}^* \gg 200$  кПа. Сверхзвуковой сопловой ввод отличается от стандартного дозвуково-

го наличием дополнительного сегмента, выполненного в виде аналого сопла Лаваля и расположенного непосредственно за сужающимися межлопаточными каналами. Скорость газа в новом сверхзвуковом сегменте соплового ввода плавно переходит в сверхзвуковой диапазон за счет расширения площади поперечного сечения и одновременного снижения радиуса вихревого течения. Более того, форма проточной части сверхзвукового соплового аппарата позволяет задать осевое направление течения газа на входе в камеру энергоразделения вихревой трубы. Выполненные вычислительные эксперименты показали, что даже на небольших перепадах давления  $\Delta p \approx 400$  кПа установка правильно рассчитанного сверхзвукового соплового ввода дает увеличение холодильного КПД.

5. Исследован способ более эффективного торможения высокоскоростного потока газа на холодном выходе вихревой трубы за счет установки спрямляющего лопаточного аппарата (развихрителя) непосредственно перед расширяющимся диффузором холодного потока. Наиболее эффективный вариант развихрителя позволил успокоить течение газа на выходе холодного потока и полностью исключить циркуляционную зону возвратного течения. Также развихритель позволил полностью прекратить вращение газа и эффективно уменьшить осевую скорость до  $|V| \leq 50$  м/с. Применение данного развихрителя позволило заметно уменьшить давление газа в сечении диафрагмы вихревой трубы и, следовательно, увеличить полезный перепад давления, а также величину холодильного КПД.
6. Исследован радиальный щелевой диффузор, предназначенный для торможения газа на выходе горячего потока вихревой трубы. Найдена величина щелевого зазора  $\delta \approx 0.5$  мм, дающая увеличение холодильного КПД вихревой трубы по сравнению с базовым вариантом без диффузора горячего потока.

7. Комбинация всех предложенных усовершенствований проточной части вихревых труб была использована при проектировании линейки промышленных образцов вихревых труб, находящихся в настоящее время в эксплуатации. Вихревые теплогенераторы ВТ 3-6, ВТ 5-90, ВТ 30Р и РЕСШ.4414 были разработаны для нагрева потока воздуха до температуры более  $200^{\circ}\text{C}$ . Напротив, вихревые холодогенераторы ВТ 30-50, ДВТР 40-9000 и ВТ 63Р предназначены для охлаждения попутного нефтяного газа (ПНГ) в установках по его сепарации на фракции. Все промышленные образцы вихревых трубы были испытаны на заводах-изготовителях, а их измеренные характеристики приведены в конце настоящей главы диссертации.
8. Основные результаты исследований, представленные в настоящей главе, опубликованы доктором физико-математических наук, профессором диссидентом и его соавторами в ряде международных и российских статей [135, 139, 140, 141, 235, 367, 377, 378, 379, 380, 381, 382], а также обсуждены на международных и всероссийских конференциях [383, 384, 385, 386, 387, 388]. Получены патенты РФ [138, 369, 389].

# ГЛАВА 6

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ГИДРОВОЛНОВОМ ЛОТКЕ С ВОЛНОПРОДУКТОРОМ ИСПОЛЬЗУЯ МОДИФИЦИРОВАННУЮ МОДЕЛЬ

### **6.1. Исследование и калибровка модели турбулентной вязкости для обрушающихся волн**

Модель турбулентной вязкости для обрушающихся волн состоит из двух основных компонент:

- Эмпирическая модель (параметризация) величины турбулентной вязкости  $\nu_t$  согласно уравнениям (3.11) и (3.14).
- Кинематический критерий обрушения гребня волны (3.17), с помощью которого определяется момент начала процесса обрушения волны и, следовательно, пространственно-временная область действия вычислённой турбулентной вязкости  $\nu_t$  согласно рис. 3.10.

В соответствии с этим, прежде всего, требуется выполнить валидацию кинематического критерия обрушения, а также экспериментально измерить величину  $B_x$  в уравнении (3.17). После этого требуется исследовать точность модели однофазного квазипотенциального течения (3.9), дополненной уточненным кинематическим критерием обрушения (3.17) и полуэмпирической моделью турбуленной вязкости (3.11) и (3.14).

#### **6.1.1. Комбинация лабораторного и численного гидроволновых лотков**

Экспериментальные исследования проводились в большом гидроволновом лотке Тель-Авивского университета (Израиль), схема которого изображена на рис. 6.1. Длина и ширина гидроволнового лотка составляют  $L = 18$  м и

$s = 1.2$  м, соответственно. Лоток заполнялся водой до уровня  $h = 0.6$  м. Фотография экспериментальной установки показана на рис. 6.2.

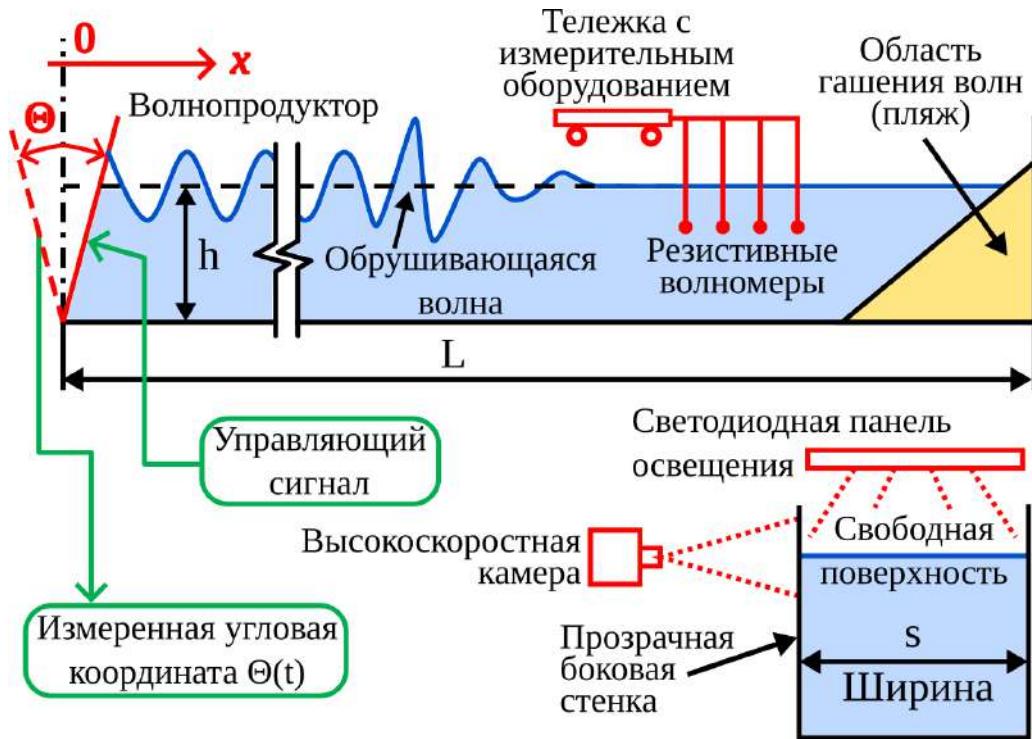


Рис. 6.1. Принципиальная схема лабораторного гидроволнового лотка Тель-Авивского университета (Израиль). Установка состоит из лотка с прозрачными боковыми стенками, волнопродуктором с компьютерным управлением, подвижной тележки с установленными на ней резистивными волномерами, светодиодной панели освещения и высокоскоростной камеры, фиксирующей мгновенную форму бегущей волны через прозрачную боковую стенку.

Экспериментальная установка оборудована шарнирно закрепленным волнопродуктором, управляемым в автоматическом режиме с компьютера. Сформированный на компьютере управляющий сигнал подается на волнопродуктор, который в реальном времени возвращает его мгновенную угловую координату  $\Theta$ . Измерения угловой координаты  $\Theta(t)$  синхронизируются во времени с остальными измерениями и записывается в текстовый файл на компьютере. Следует отметить, что точность измерения координаты  $\Theta$  должна быть достаточной для вычисления мгновенной угловой скорости  $\dot{\Theta}$  и ускорения  $\ddot{\Theta}$ . Координата  $\Theta = 0$  соответствует вертикальному положению плоскости волнопродуктора.

С противоположной стороны лабораторного гидроволнового лотка распо-

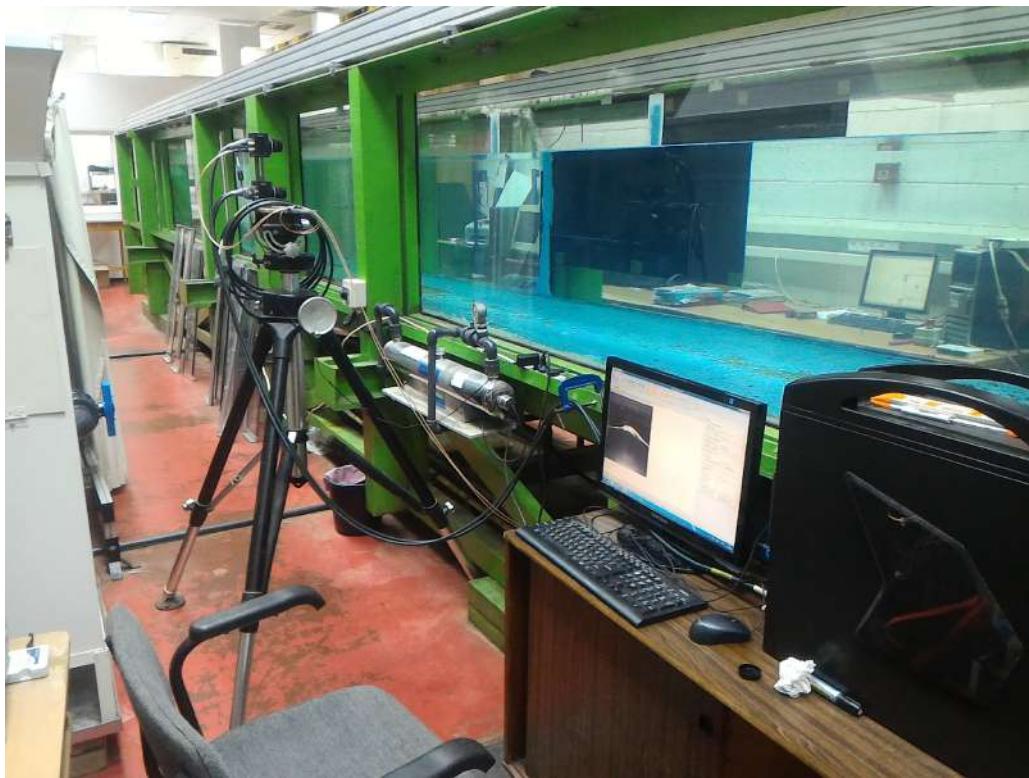


Рис. 6.2. Фотография лабораторной установки (гидроволнового лотка) в Тель-Авивском университете (Израиль). Фотография сделана во время проведения экспериментов лично соискателем.

ложен наклонный “пляж”, предназначенный для гашения волн и минимизации их отражения от дальней стенки, как показано на рис. 6.1 Длина “пляжа” составляет 3 метра. Для большей уверенности в отсутствии отраженных волн, эксперименты были спланированы таким образом, чтобы измерения были завершены до того момента, когда волновой пакет достигает дальней стенки лотка.

Экспериментальная установка оборудована тележкой с измерительным оборудованием, положение которой вдоль лотка контролируется с компьютера при помощи высокоточного энкодера. На тележке располагаются четыре аналоговых волномера резистивного типа. Расстояние между соседними волномерами составляет 0.4 м. Калибровка волномеров осуществлялась непосредственно перед началом эксперимента в автоматическом режиме путем изменения вертикального положения волномеров.

Подъем свободной поверхности  $\eta(t)$ , измеренный волномерами, а так-

же мгновенная угловая координата волнопродуктора  $\Theta(t)$  записываются в текстовый файл через равные интервалы времени  $T_0/128$ , где  $T_0$  - характерный период исследуемой волны. Следует отметить, что функция  $\eta(t) = \eta(t, x = x_p)$  представляет собой форму волны, измеренную в заданной координате  $x = x_p$ , в которой располагается волномер. Формула (1.58) представляет собой выражение для данной функции в рамках наиболее простой линейной теории поверхностных волн.

Для экспериментальной валидации кинематического критерия обрушения гребня волны (3.17) и определения эмпирической постоянной  $B_x$  требуется измерить три величины:

1. Момент обрушения (координату  $x_{br}$  на рис. 3.10), который фиксируется при помощи высокоскоростной камеры через прозрачные боковые стенки лотка, как показано на рис. 6.1 и 6.2.
2. Мгновенную скорость распространения гребня волны  $V_{cr}$  в момент начала его обрушения, которая также может быть определена при помощи высокоскоростной съемки.
3. Мгновенную Лагранжеву скорость жидкой частицы  $V_{fl}$ , расположенной на гребне волны непосредственно в момент начала его обрушения.

Наибольшую сложность для измерения в лаборатории представляет скорость  $V_{fl}$ . Для ее определения используются чрезвычайно сложные методики, такие как Particle Tracking Velocimetry (PTV) [344] и Thermal Image Velocimetry (TIV) [341]. Несмотря на предпринятые усилия по уменьшению неопределенности измерения скорости  $V_{fl}$ , остаются разногласия относительно величины порога  $B_x$  в выражении (3.17).

В настоящей диссертации предпринята попытка существенного сокращения неопределенности измерения скорости жидкой частицы  $V_{fl}$  путем комбинации экспериментальных измерений с численными данными, полученными при помощи численного гидроволнового лотка. Для этого используются преимущества Метода Границных Элементов в модели однофазного квазипотен-

циального течения (рис. 3.8), которые заключаются в том, что он позволяет определить величины лагранжевых скоростей жидких частиц, расположенных непосредственно на свободной поверхности (граница  $\Gamma_{fs}$  на рис. 3.8), в том числе на гребне обрушающейся волны. Таким образом, в данном методе естественным образом решается проблема определения скорости  $V_{fl}$ .

Следует подчеркнуть, что в начальной серии численных и лабораторных экспериментов модель двухфазного течения на основе метода Volume-of-Fluid (VOF) не используется, но будет задействована в дальнейшем.

Очевидно, что комбинирование результатов измерений в лабораторной установке с численными данными требует сопряжения экспериментов и расчетов Методом Границных Элементов. Для этого экспериментальные измерения угловой координаты  $\Theta(t)$ , скорости  $\dot{\Theta}(t)$  и ускорения  $\ddot{\Theta}(t)$  (рис. 6.1) используются для перемещения численного волнопродуктора как показано на рис. 3.8. Этим обеспечивается полное совпадение режимов работы волнопродуктора, а также условий генерации поверхностных волн, между численным и лабораторным гидроволновыми лотками.

### 6.1.2. Кинематические параметры обрушающегося гребня

В данной серии лабораторных и численных экспериментов используются две простейших функции для движения волнопродуктора  $\Theta(t)$ :

$$\Theta_1(t) = \vartheta_1 \cos(\omega_0 t - \pi/2) \quad (6.1)$$

$$\Theta_2(t) = \frac{\vartheta_2}{2} (\cos((\omega_0 - \Delta\omega)t) + \cos((\omega_0 + \Delta\omega)t + \pi)) \quad (6.2)$$

Обе функции создают в непосредственной близости от волнопродуктора волновые пакеты, характеризующиеся узким спектром: монохроматическую и бихроматическую свободные волны, соответственно. В выражениях выше  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  - амплитуды движения волнопродуктора;  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  - круговая частота

несущей волны;  $\Delta\omega$  - ширина спектра бихроматической волны.

Период несущей волны выбран равным  $T_0 = 0.7$  с. Использование дисперсионного соотношения (1.61) линейной теории волн позволяет определить волновое число несущей волны  $\kappa_0 = 8.21 \text{ м}^{-1}$ . Соответственно, длина несущей волны составляет  $\lambda_0 = 2\pi/\kappa_0 = 0.765$  м. Безразмерная глубина волнового лотка определяется как  $\kappa_0 h = 4.93$  ( $h = 0.6$  м), что соответствует режиму глубокой воды [69]. Ширина спектра бихроматической волны выбрана равной  $\Delta\omega/\omega_0 = 0.03$ .

Оба волновых пакета распространяются с групповой скоростью  $c_g = 0.547$  м/с (3.16). Амплитуды движений волнопродуктора  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  выбраны таким образом, чтобы в максимальная крутизна волны вблизи волнопродуктора, заданная выражением (1.57), составила  $\epsilon_1 = 0.22$  и  $\epsilon_2 = 0.24$  для первого и второго волновых пакетов, соответственно. На рис. 6.3 показаны экспериментальные измерения угловых координат  $\Theta$  и ускорений  $\ddot{\Theta}$  для бихроматического движения волнопродуктора (6.2).

В связи с тем, что условие применимости линейной теории волн  $\epsilon \ll 1$  не выдерживается, в исследуемых волновых пакетах наблюдаются чрезвычайно выраженные нелинейные эффекты, приводящие к изменению формы волны по мере ее распространения вдоль гидроволнового лотка. Ожидается, что нелинейные эффекты приведут к росту высоты одного из гребней одновременно с увеличением его крутизны  $\epsilon$ . При достижении крутизны гребня  $\epsilon > 0.3$  ожидается его обрушение, являющееся предметом настоящего исследования. Как было указано выше, требуется определить координату обрушающегося гребня  $x_{br}$ , а также скорости  $V_{cr}$  и  $V_{fl}$  в момент его обрушения.

Лабораторные измерения подъема свободной поверхности  $\eta(t, x = \text{const})$ , записанные в различных координата  $x$  вдоль гидроволнового лотка (рис. 6.1), показаны на рис. 6.4. Для сравнения полученных экспериментальных данных с численным моделированием на основе Метода Границных Элементов (BEM) требуется определить функцию  $\eta(t, x = \text{const})$  в фиксированных за-

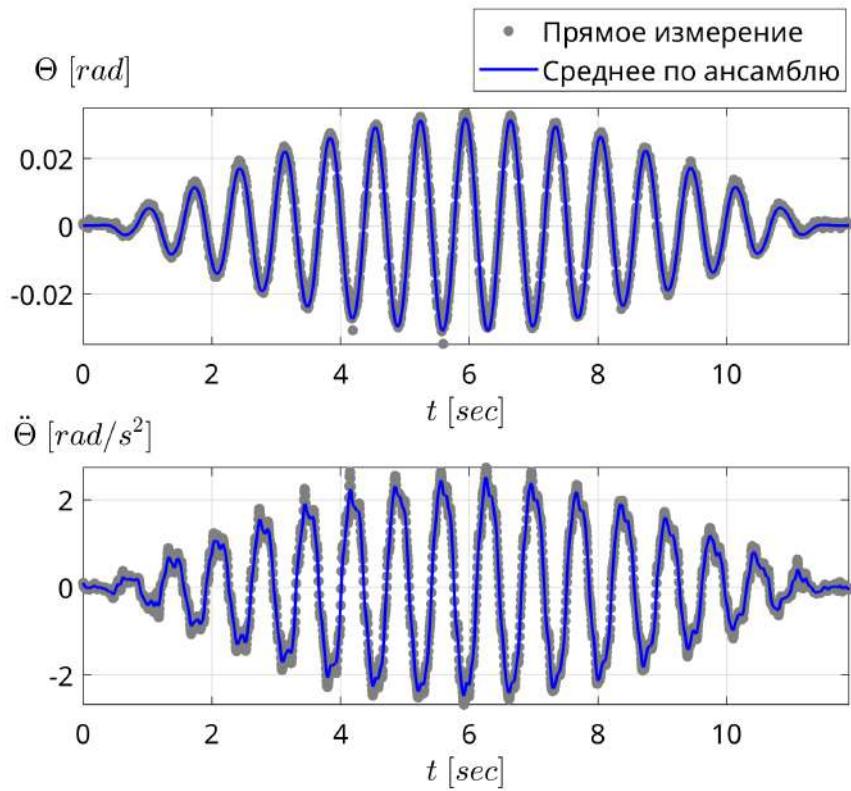


Рис. 6.3. Угловые координаты  $\Theta$  и ускорения  $\ddot{\Theta}$  волнопродуктора, измеренные для бихроматического волнового пакета (6.2).

ранее заданных координатах  $x$ . Это усложняется тем, что математическая модель (3.9) использует лагранжеву формулировку. То есть, узлы расчетной сетки находятся в непрерывном движении, а их координаты  $x$  не фиксированы. Для обхода данной сложности и оценки функции  $\eta(t, x = \text{const})$  использовалась интерполяция кубическим полиномом между узлами расчетной сетки метода ВЕМ.

Волновой пакет, полученный при помощи монохроматического движения волнопродуктора (6.1), изображен на рис. 6.4(а). Вблизи волнопродуктора ( $x = 0.4$  м) зафиксирован периодический симметричный волновой пакет, близкий к монохроматическому. По мере распространения волнового пакета в направлении от волнопродуктора (с увеличением координаты  $x$ ) его форма заметно меняется, что вызвано нелинейным эффектами, как предполагалось выше по тексту. Наблюдается быстрый рост гребня волны, расположенного у передней кромки волнового пакета, которая показана пунктирной линией

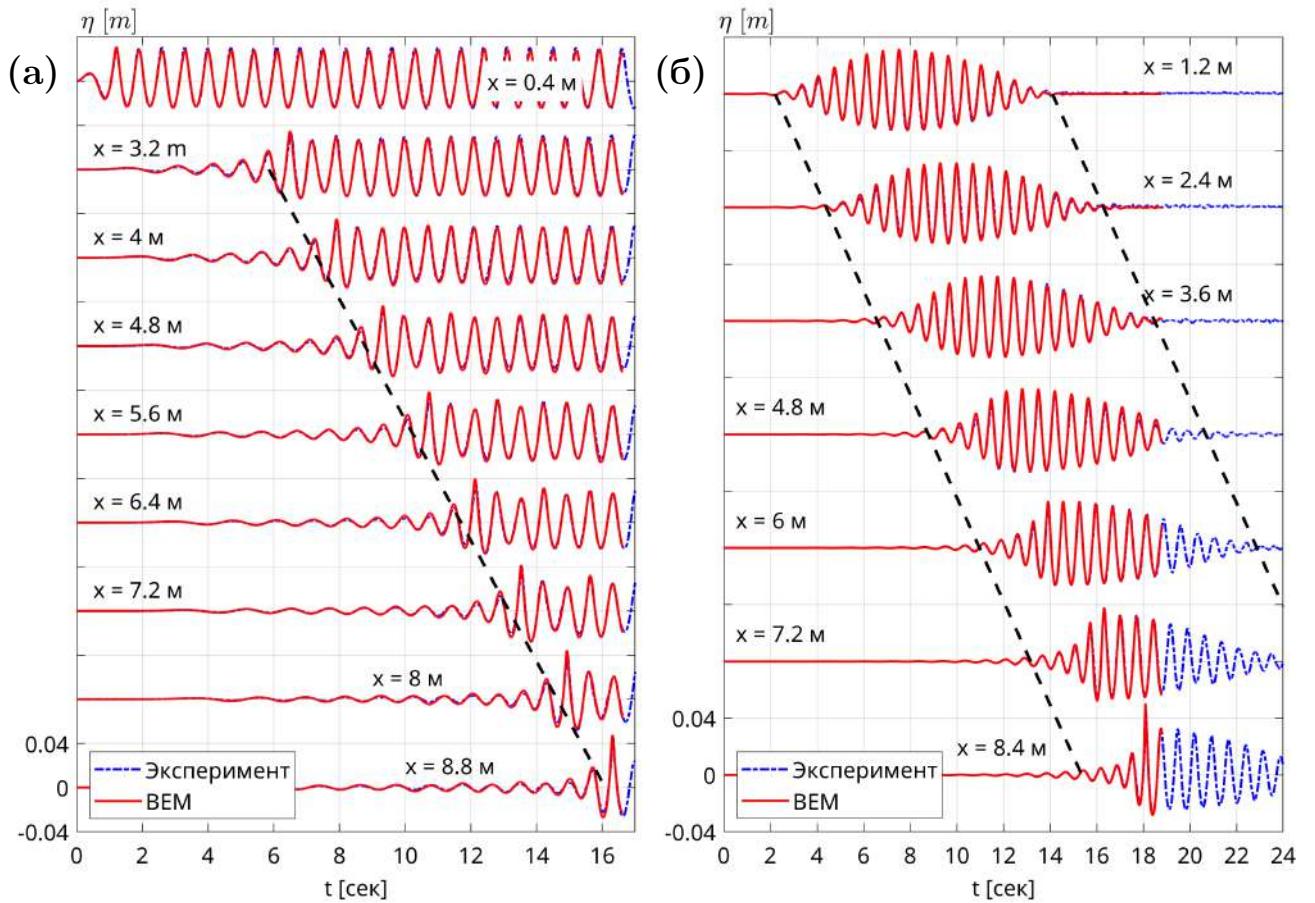


Рис. 6.4. Подъем свободной поверхности  $\eta(x = \text{const}, t)$ , измеренный в различных координатах вдоль лабораторного гидроволнового лотка (рис. 6.1) при помощи волнометров. Лабораторные измерения сравниваются с результатами численных экспериментов на основе Метода Границных Элементов (ВЕМ). Пространственная координата  $x$  отсчитывается от положения волнопродуктора, как показано на рис. 3.8 и 6.1. Использовано (а) монохроматическое (6.1) и (б) бихроматическое (6.2) движение волнопродуктора.

на рис. 6.4(а). Как будет показано далее, высота данного гребня достигает предельной величины в координате  $x_{br} = 8.97 \pm 0.014$  м в момент времени  $t_{br} \approx 16.7$  с, после чего наблюдается обрушение данного гребня.

Волновой пакет, сгенерированный бихроматическим движением волнопродуктора (6.2), показан на рис. 6.4(б). На данном рисунке пунктирными линиями изображено положение как передней, так и задней кромки волнового пакета. Вблизи волнопродуктора ( $x = 1.2$  м) полученный волновой пакет обладает ярко выраженной симметрией. Однако, как и в предыдущем случае, данная симметрия быстро нарушается по мере распространения волнового

пакета вниз по гидроволновому лотку. Так, для координат  $x \geq 6$  м становится очевидным, что высокие волны собираются ближе к передней кромки волнового пакета. В координате  $x_{br} = 8.43 \pm 0.014$  м в момент времени  $t_{br} \approx 18$  с образуется чрезвычайно высокий обрушающийся гребень, который виден на рис. 6.4(б).

Особенно следует подчеркнуть очень близкое совпадение результатов численного моделирования с лабораторными измерениями для обоих волновых пакетов вплоть до момента обрушения волны. Следовательно, численную модель однофазного квазипотенциального течения на основе Метода Границых Элементов (ВЕМ) можно использовать для дальнейшего исследования кинематических характеристик обрушающегося гребня волны. Однако для этого недостаточно графиков временно́й эволюции волн  $\eta(x = \text{const}, t)$ , представленных на рис. 6.4. Требуется рассмотреть пространственную эволюцию волнового пакета, то есть функцию подъема свободной поверхности в фиксированный момент времени:  $\eta(x, t = \text{const})$ . Экспериментальное измерение такой функции невозможно волномерами и, в общем случае, является чрезвычайно сложной задачей. В рамках настоящего исследования указанное измерение было выполнено при помощи высокоскоростной съёмки через прозрачную боковую стенку гидроволнового лотка, как показано на рис. 6.2.

На рис. 6.5(а) представлены фотографии, показывающие формирование обрушающегося гребня, сгенерированного монохроматическим движением волнопродуктора (6.1). Пост-обработка снимков сделана при помощи инструментов Matlab. На горизонтальной оси отложены координаты, отсчитанные от места расположения волнопродуктора. В момент времени  $t = 16.22$  сек наблюдается начальная стадия роста волны. Начиная с  $t = 16.47$  сек отчетливо прослеживается несимметричная форма гребня волны, вызванная сильными нелинейными эффектами. В момент  $t = 16.72$  сек отчетливо видно формирование выпуклости на гребне волны, вызванное действие сил поверхностного натяжения [390]. Непосредственно за этим следует обрушение гребня

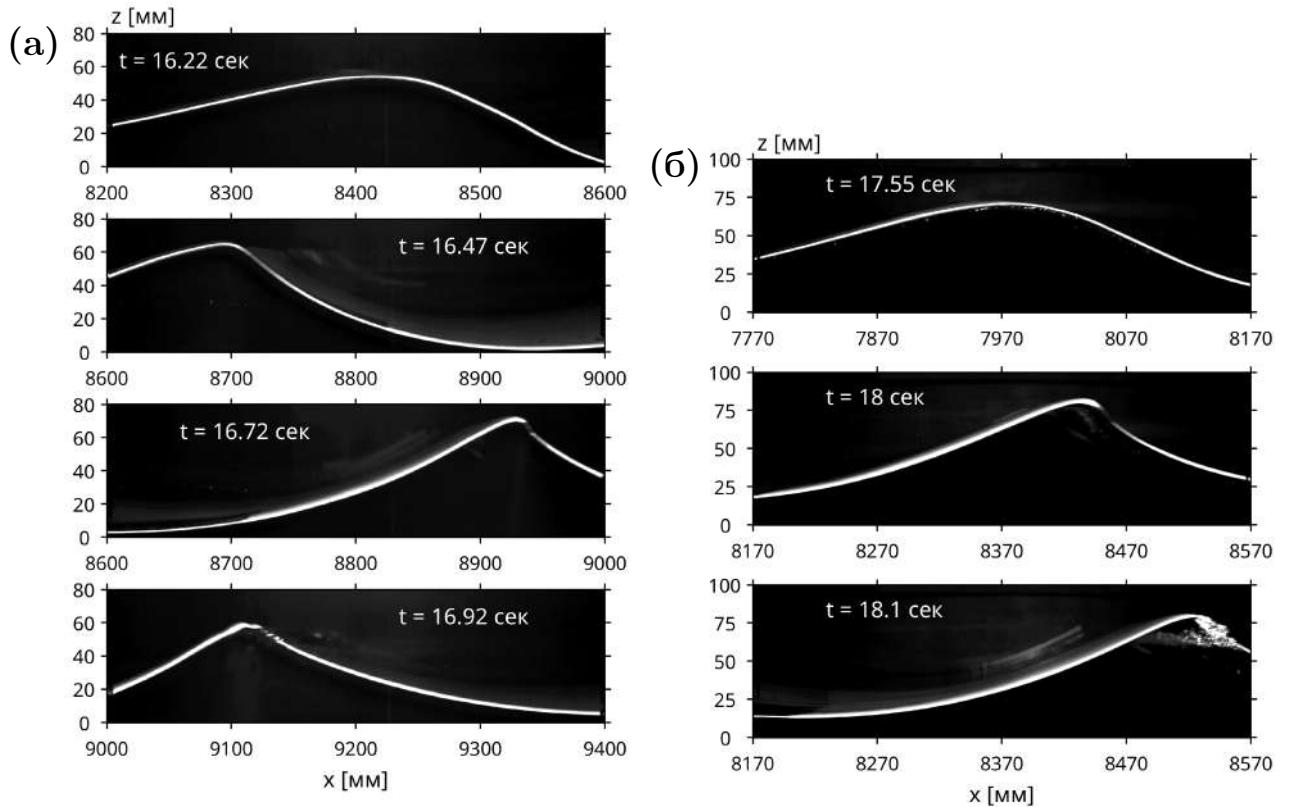


Рис. 6.5. Фотографии, показывающие формирования обрушающегося гребня волны, полученные при помощи высокоскоростной съемки в лабораторном гидроволновом лотке (см. рис. 6.2): (а) волновой пакет, полученный монохроматическим движением волнопродуктора (6.1) и (б) бихроматическим движением волнопродуктора (6.2). Гребень волны движется слева направо.

( $t = 16.92$  сек). По полученным снимкам можно установить координату гребня в момент начала его обрушения:  $x_{br} = 8.97 \pm 0.014$  м.

Рисунок 6.5(б) показывает формирование обрушающегося гребня, полученного бихроматическим движением волнопродуктора (6.2). Момент времени  $t = 17.55$  сек соответствует началу формирования высокого обрушающегося гребня волны. При  $t = 18$  сек также видно формирование капиллярной выпуклости непосредственно на гребне, после чего следует обрушение волны ( $t = 18.1$  сек). В данном случае момент обрушения более очевиден в связи с возникновением перемешивания воды и воздуха, что отчетливо видно на последней фотографии рис. 6.5(б) ( $t = 18.1$  сек). Анализ результатов высокоскоростной съемки для бихроматического движения волнопродуктора позволяет установить координату гребня в момент начала его обрушения:

$x_{br} = 8.43 \pm 0.014$  м.

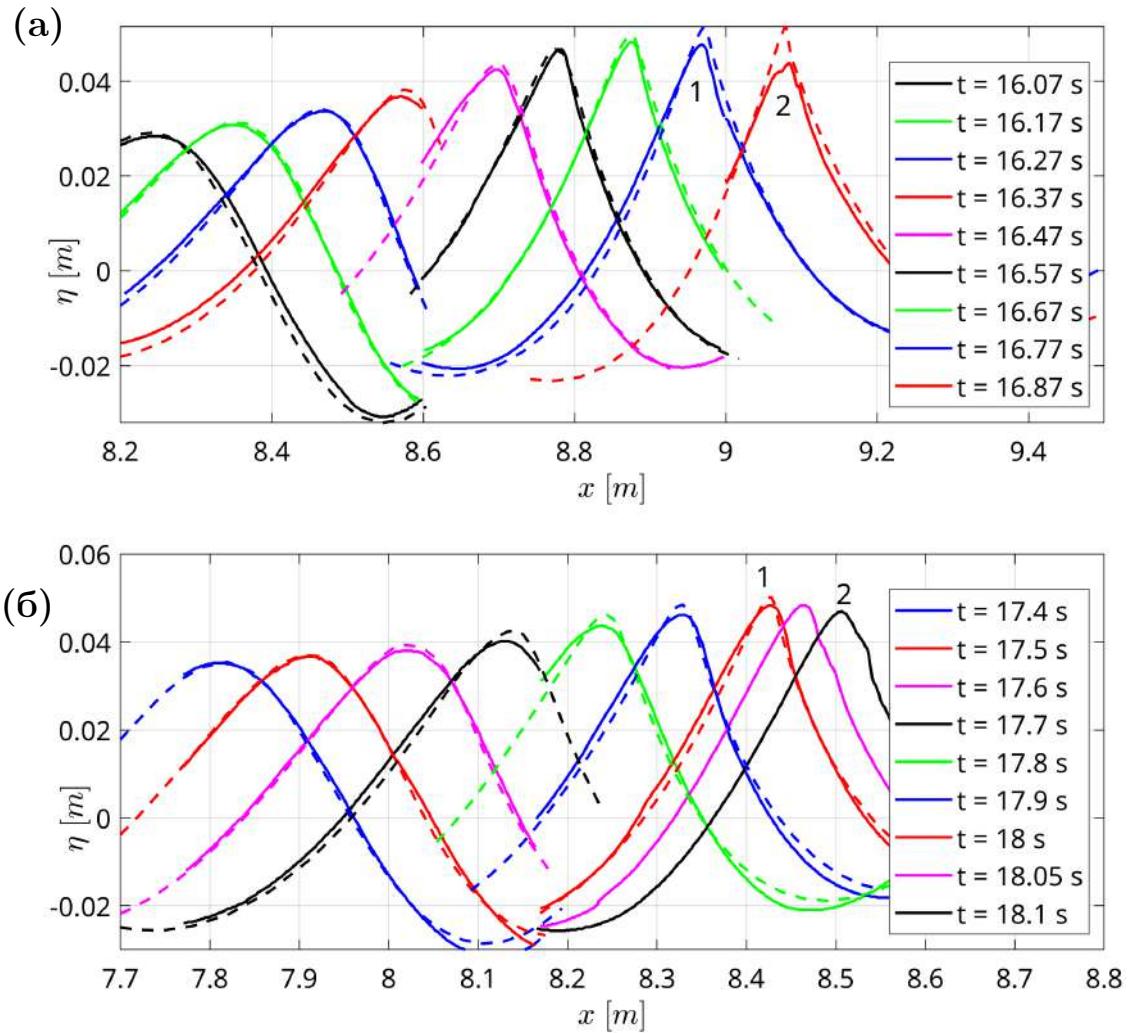


Рис. 6.6. Пространственная эволюция  $\eta(x, t = \text{const})$  гребня волны, сгенерированного (а) монохроматическим (6.1) и (б) бихроматическим (6.2) движением волнопротектора.

На рисунке сравниваются результаты численного моделирования на основе Метода Границных Элементов (ВЕМ, пунктирные линии) с лабораторными измерениями при помощи высокоскоростной съемки (сплошные линии).

Результаты высокоскоростной съемки (рис. 6.5) были оцифрованы с высоким пространственным и временным разрешением при помощи инструментов Matlab. Полученная таким образом функция  $\eta(x, t = \text{const})$ , отражающая пространственную эволюцию обрушающегося гребня волны, сравнивается с результатами численного моделирования на рис. 6.6. Видно, что для обоих волновых пакетов наблюдается очень хорошее количественное и качественное совпадение результатов математической модели с лабораторными измерениями. Гребень волны, обозначенный цифрой 1, соответствует момен-

ту непосредственно перед началом обрушения. Цифрой 2 обозначен гребень, находящийся в процессе обрушения.

Столь высокая точность численной модели позволяет определять кинематические параметры обрушающегося гребня волны, такие как скорости  $V_{fl}$  и  $V_{cr}$ , опираясь только на результаты моделирования. С другой стороны, координата начала обрушения гребня волны  $x_{br}$  измерена экспериментально, как указано выше по тексту. Высота наиболее высокого гребня волны  $h_{cr}^{max}$ , скорость жидкой частицы, расположенной на самом высоком гребне волны  $V_{fl}$ , и скорость распространения самого высокого гребня волны  $V_{cr}$  были оценены на основе результатов численного моделирования и представлены на рис. 6.7 для монохроматического движения волнопродуктора (6.1). Для сравнения, на графики также нанесены фазовая  $c_p$  (3.15) и групповая  $c_g$  (3.16) скорости волнового пакета. В наиболее простой линейной теории поверхностных волн пренебрежимо малой высоты ( $\epsilon \ll 1$ ) [69], горизонтальная скорость жидких частиц характеризуется величиной  $a_0\omega_0$  (см. формулу (1.58)), которая также показана на графиках для анализа. Здесь  $a_0$  - амплитуда линейной волны.

На рис. 6.7 можно заметить, что вблизи волнопродуктора ( $x \sim 3$  м), где наблюдается умеренная высота волн  $h_{cr}^{max}$ , фактическая скорость распространения гребня  $V_{cr}$  близка к оценке линейной теории поверхностных волн, т.е.  $V_{cr} \sim c_p$ . Более того, скорость жидких частиц на гребне волны также близка к оценке линейной теории:  $V_{fl} \sim a_0\omega_0$ . По мере распространения волнового пакета вдоль гидроволнового лотка, высота наиболее высокого гребня  $h_{cr}^{max}$  увеличивается в 1.4 раза и достигает наибольшей величины в районе  $x \sim 9$  м.

По мере приближения к области обрушения волны, скорости  $V_{cr}$  и  $V_{fl}$  начинают значительно отклоняться от оценок линейной теории. Более того, это отклонение носит осцилляционный характер и вызвано влиянием нелинейностей в (3.9). В координате  $x_c \approx 9.08$  м скорость жидкой частицы  $V_{fl}$  впервые превышает скорость гребня волны  $V_{cr}$ . То есть, жидкость начинает

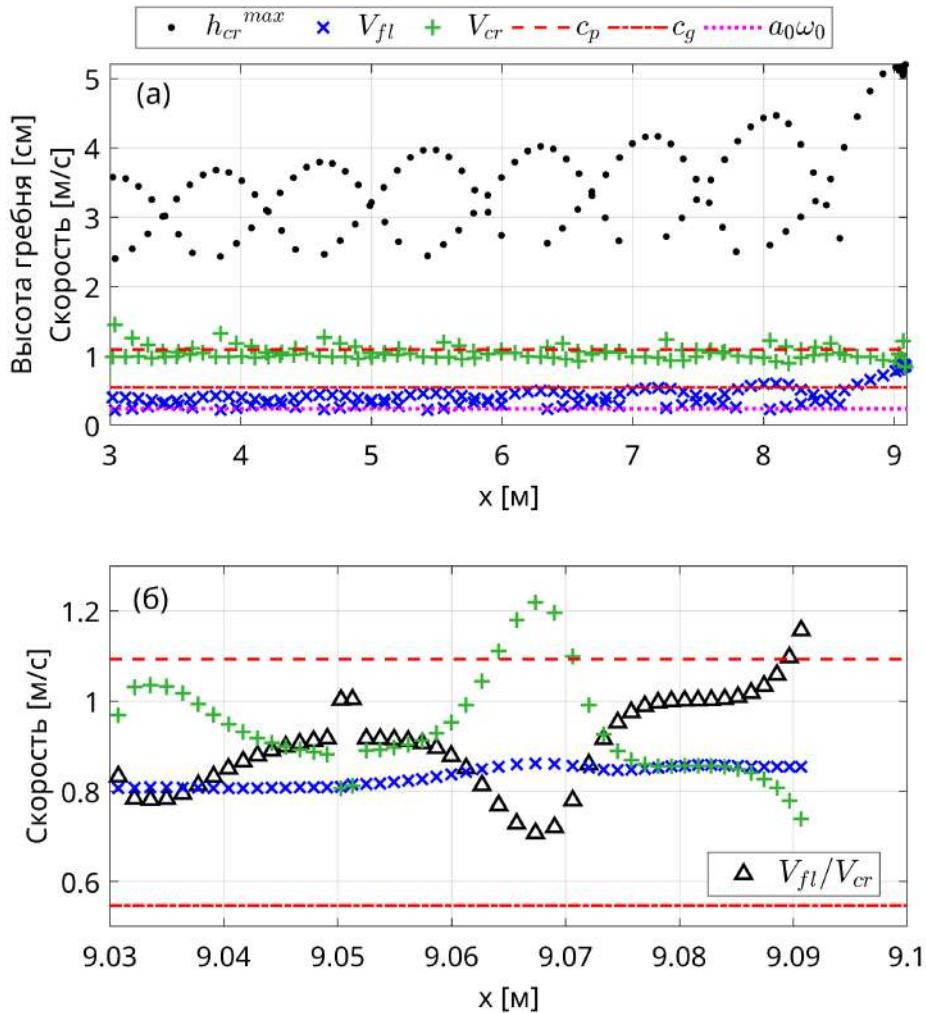


Рис. 6.7. Расчетные кинематические параметры наиболее крутого и высокого гребня в волновом пакете, сгенерированном монохроматическим движением волнопродуктора (6.1): (а) в масштабе всей длины гидроволнового лотка; (б) увеличенная область обрушения гребня волны. Обрушающийся гребень волны наблюдается экспериментально в координате  $x_{br} = 8.97 \pm 0.014$  м.

двигаться быстрее гребня и, таким образом, стремится оторваться от свободной поверхности. Полученная координата очень близка к экспериментально зафиксированному месту обрушения гребня  $x_{br} \approx 8.97$  м. Отклонение составляет всего лишь  $(x_c - x_{br}) \approx 0.0055L$ , то есть 0.55% от длины гидроволнового лотка  $L$ .

Таким образом, полученные данные говорят о том, что обрушение гребня возникает в точности в тот момент, когда скорости  $V_{fl}$  и  $V_{cr}$  сравниваются. Это доказывает начальную гипотезу, выдвинутую в разделе 3.2.3., а также позволяет оценить постоянную калибровки кинематического критерия (3.17)

равной  $B_x \approx 1$ .

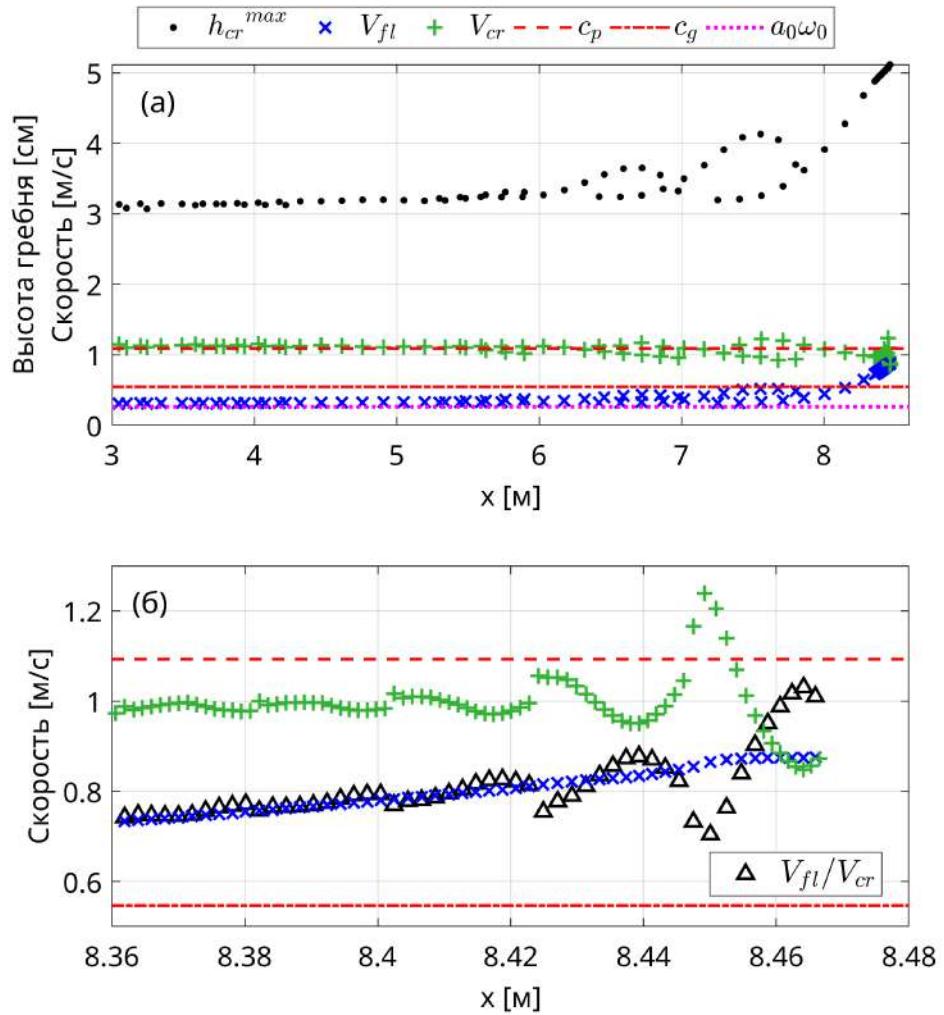


Рис. 6.8. Как на рис. 6.7 для бихроматического движения волнопродуктора (6.2).

Аналогичные результаты для бихроматического волнового пакета (6.2) показаны на рис. 6.8. Несмотря на то, что волновой пакет быстро становится несимметричным (см. рис. 6.4(б)), высота наиболее высокого гребня  $h_{cr}^{max}$  долго не меняется вплоть до  $x \leq 6$  м. После этого возникает очень быстрый рост гребня. Величина  $h_{cr}^{max}$  увеличивается более чем в 1.65 раз. Вблизи волнопродуктора ( $x < 6$  м) фактическая скорость гребня  $V_{cr}$  также остается близкой к фазовой скорости  $c_p$ , а скорость жидкой частицы  $V_{fl}$  близкой к величине  $a_0\omega_0$ .

После координаты  $x \geq 8$  м скорость жидкой частицы  $V_{fl}$  начинает резко нарастать при одновременном падении скорости гребня волны  $V_{cr}$ . Особенно

следует подчеркнуть возникновение колебаний данных скоростей по мере их сближения, что говорит о нарастании неустойчивости системы, как подробно обсуждается в работах [339, 340]. В координате  $x_c \approx 8.46$  м скорости  $V_{fl}$  и  $V_{cr}$  сравниваются, что говорит о выполнении кинематического критерия обрушения  $V_{fl}/V_{cr} \sim 1$ . Данная координата практически точно совпадает с экспериментально полученной координатой визуального обнаружения обрушения гребня  $x_{br} \approx 8.43$  м. Погрешность не превышает 0.15% от длины гидроволнового лотка  $L$ , а именно  $(x_c - x_{br}) \approx 0.0015L$ .

### **6.1.3. Поле скоростей под обрушающимся волновым пакетом и промежуточные выводы**

Для наглядной демонстрации нарастания скорости жидкой частицы  $V_{fl}$  по мере приближения к моменту обрушения гребня, на рис. 6.9 показано поле скоростей под бихроматическим волновым пакетом (6.2). Поле скоростей получено на основе результатов численного моделирования Методом Границных Элементов (ВЕМ) и полностью соответствует данным на рис. 6.8. Видно, что на удалении от координаты обрушения гребня  $x_{br} \approx 8.43$  м величины скоростей достаточно умеренные и не превышают 0.1 м/с; см. рис. 6.9(а). По мере эволюции волнового пакета, скорости постепенно нарастают, как видно из рис. 6.9(б). На рис. 6.9(в) показан момент обрушения гребня волны. Видно, что высота и крутизна гребня в этот момент резко увеличиваются, что также сопровождается ростом скоростей жидких частиц до величин, превышающих 0.6 м/с.

Проведенный анализ двух независимых серий численных и лабораторных экспериментов позволяет сделать вывод о верности кинематического критерия обрушения волн (3.17), что хорошо согласуется с литературой [115, 116, 117, 341, 344, 345, 346]. Тем не менее, для увеличения точности данного критерия в рамках модели на основе Метода Границных Элементов

(ВЕМ) предлагаются корректировка калибровочной постоянной  $B_x \approx 1$ :

$$\frac{V_{fl}}{V_{cr}} \geq (B_x \approx 1) \quad (6.3)$$

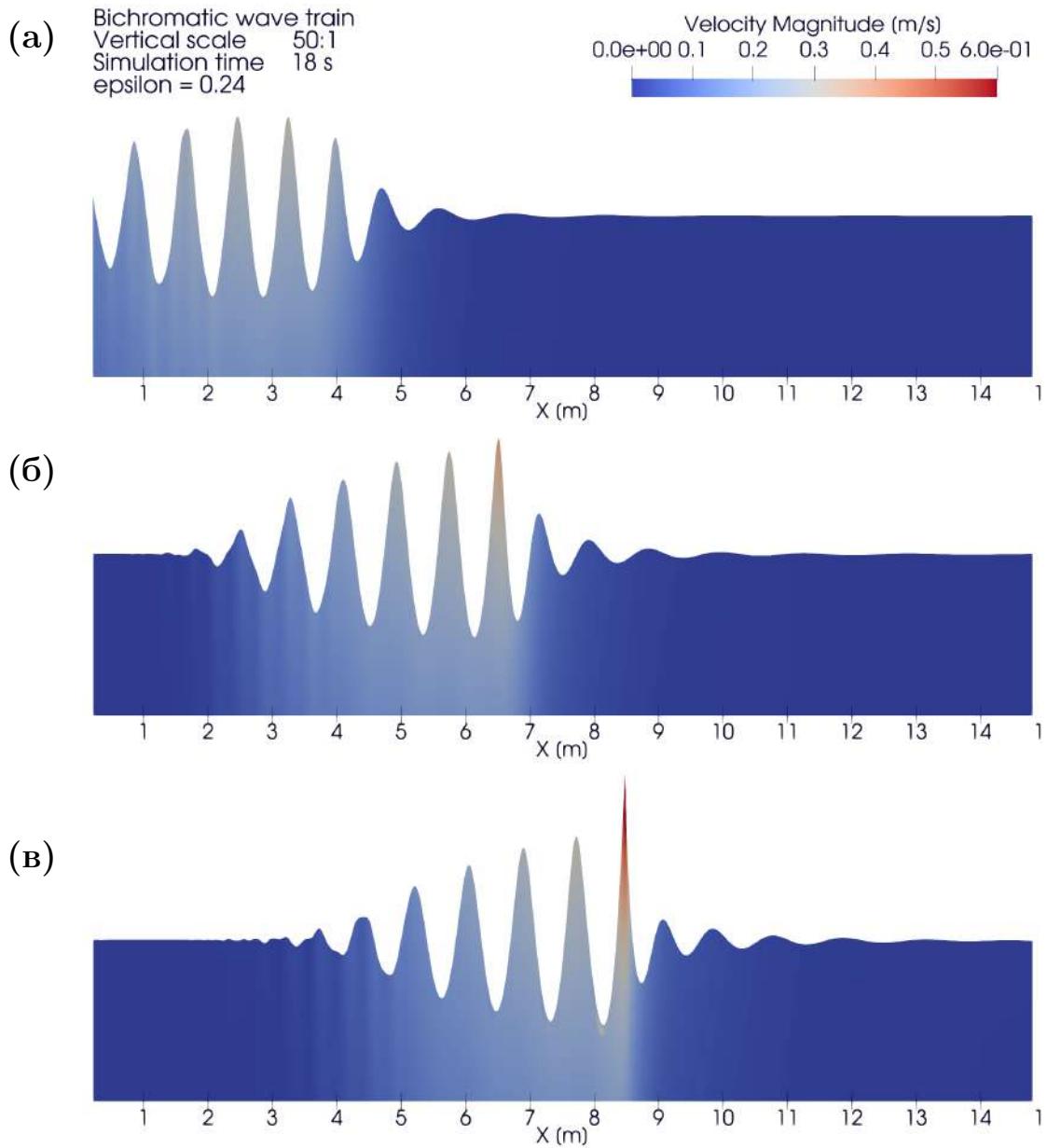


Рис. 6.9. Поле скоростей, связанное с волновым пакетом, сгенерированным бихроматическим движением волнопродуктора (6.2). Поле показано на продольном сечении численного гидроволнового лотка в различные моменты времени: (а)  $t = 10$  сек; (б)  $t = 15$  сек; (в)  $t = 18.1$  сек. Поле скоростей получено при помощи числовой модели на основе Метода Границных Элементов (ВЕМ). Вертикальный масштаб 50:1.

## 6.2. Диссипация энергии волны в модели турбулентной вязкости

### 6.2.1. Генерация волнового пакета с гауссовой огибающей

После валидации кинематического критерия обрушения волн, а также определения величины калибровочной постоянной  $B_x \approx 1$  в (3.17), требуется провести исследование точности эмпирической модели турбулентной вязкости (см. уравнения (3.11) и (3.14)), работающей в комбинации с кинематическим критерием обрушения. С этой целью требуется генерация волновых пакетов, в которых наблюдается обрушение волн разной силы. Это можно сделать используя волновой пакет с гауссовой огибающей [391]. Временная форма такого волнового пакета в фокальной точке  $x_f$  (в точке линейного фокуса) запишется:

$$\eta(x = x_f, t) = \zeta_0 \underbrace{\exp \left\{ - \left( \frac{t}{mT_0} \right)^2 \right\}}_{\text{огибающая}} \underbrace{\cos(\omega_0 t)}_{\text{модуляция}}, \quad (6.4)$$

где  $m = 0.6$  - параметр, характеризующий ширину спектра волнового пакета, имеющего также форму гауссовой кривой;  $\zeta_0$  - параметр высоты волны;  $T_0 = 0.7$  сек и  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  - период и круговая частота для пика спектра. В соответствии с линейным дисперсионным соотношением (1.61), длина волны и соответствующее ей волновое число для пика спектра равны:  $\lambda_0 = 0.765$  м и  $\kappa_0 = 2\pi/\lambda_0$ . Безразмерная глубина воды составляет  $\kappa_0 h = 4.93$ , что соответствует режиму глубокой воды согласно [69].

Дискретное спектральное представление волнового пакета (6.4) в рамках линейной теории волн можно записать пользуясь выражением (1.62):

$$\eta(x, t) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} a_j(\omega_j, \kappa_j) e^{i(\kappa_j x - \kappa_j x_f - \omega_j t)} + \text{к.с.}, \quad (6.5)$$

где  $x_f = 8.5$  м - фокальная точка;  $a_j(\omega_j, \kappa_j)$  - действительная амплитуда гар-

моники с частотой  $\omega_j$  и волновым числом  $\zeta_j$ ; “к.с.” - комплексное сопряжение. Форма дискретного спектра, полученная из (6.4) при помощи быстрого преобразования Фурье (FFT), показана на рис. 6.10.

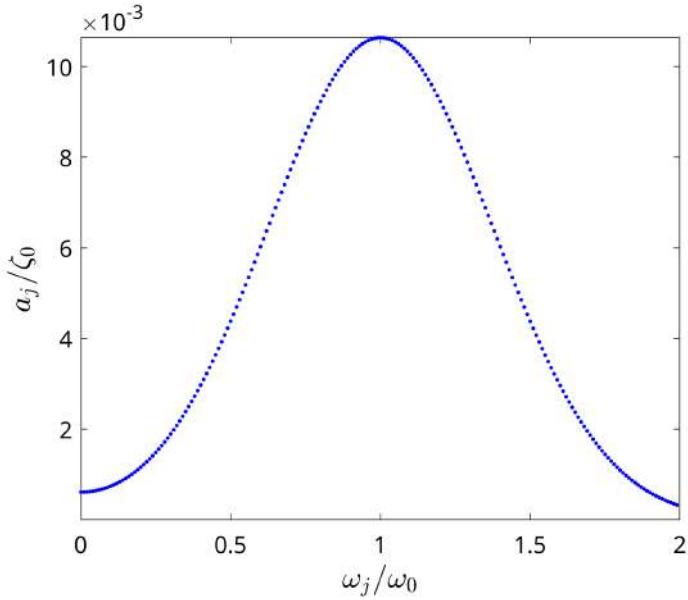


Рис. 6.10. Обезрезмеренный дискретный спектр (6.5) гауссового волнового пакета, полученный при помощи быстрого преобразования Фурье (FFT) на основе формы волны (6.4). На графике  $a_j$  - амплитуда гармоники с частотой  $\omega_j$ .

Величина фазовой скорости  $c_p$  (3.15) для режима глубокой воды ( $h \rightarrow \infty$ ) оценивается как [69]:

$$c_p = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\omega}{\zeta} = \lim_{h \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{g \tanh(\zeta h)}{\zeta}} = \sqrt{\frac{g}{\zeta}} = \sqrt{\frac{g \lambda}{2\pi}} \quad (6.6)$$

Из данного выражения видно, что скорость распространения выделенной гармоники спектра тем выше, чем больше длина ее волны  $\lambda$ , т.е.  $c_p \sim \lambda^{1/2}$ . Это говорит о том, что длинные волны будут распространяться значительно быстрее коротких. В координате  $x = 0$  (см. рис. 6.1) волнопродуктор будет генерировать сначала короткие волны, а затем длинные, с плавным увеличением длины генерируемой волны. Таким образом, вблизи волнопродуктора ( $x = 0$ ) волновой пакет будет выглядеть таким образом, что короткие волны будут собраны у передней кромки. По мере распространения волнового паке-

та вдоль гидроволнового лотка, длинные волны будут настигать короткие и, в конечном итоге, все гармоники спектра встретятся в точке линейного фокуса  $x = x_f = 8.5$  м. Именно вблизи этой координаты ожидаются наиболее высокие обрушающиеся волны. Причем, высота волн и сила их обрушения регулируются одним единственным параметром в (6.4) - величиной  $\zeta_0$ .

Для исследования выбраны четыре величины параметра  $\zeta_0$ , а именно  $\zeta_0 \zeta_0 = \{0.2, 0.3, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0\}$ . Для пересчета дискретного спектра волны  $a_j(\omega_j, \zeta_j)$  в спектр движения волнопродуктора  $\Theta_j(\omega_j)$  (см. выражения (6.1) и (6.2)) используется простейшая линейная теория волнопродуктора [69]. Согласно данной теории, амплитуда  $j$ -той гармоники движения волнопродуктора  $\widehat{\Theta}_j$  записывается с помощью передаточной функции  $\Lambda = \Lambda(\omega)$ :

$$\widehat{\Theta}_j = \arctan \left( \frac{\Lambda_j}{h} a_j \right) \quad (6.7)$$

Выражение для передаточной функции шарнирно закрепленного волнопродуктора записывается [69]:

$$\Lambda(\omega) = 4 \frac{\kappa h}{\sinh \kappa h} \frac{\sinh 2\kappa h + 2\kappa h}{\kappa h \sinh \kappa h - \cosh \kappa h + 1} \quad (6.8)$$

Тогда зависимость угловой координаты волнопродуктора от времени:

$$\Theta(t) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \widehat{\Theta}_j e^{-i\omega_j t} + \text{к.с.} \quad (6.9)$$

Экспериментальная установка, показанная на рис. 6.1 и 6.2, имеет ряд ограничений. В том числе, она не допускает генерирование волновых пакетов с параметром  $\zeta_0 \zeta_0 > 0.4$ . Таким образом, использование экспериментального гидроволнового лотка для рассматриваемого исследования невозможно. Вместо этого, для  $\zeta_0 \zeta_0 > 0.4$ , экспериментальные измерения заменяются результатами точного моделирования при помощи модели двухфазного течения

на основе метода Volume-of-Fluid (VOF), входящей в состав численного гидроволнового лотка, как показано на рис. 3.8. Таким образом, требуется сравнить результаты однофазной квазипотенциальной модели ВЕМ, дополненной эмпирической моделью турбулентной вязкости и кинематическим критерием обрушения, с точной моделью двухфазного течения VOF.

Рисунок 6.11 показывает эволюцию во времени и пространстве гауссового волнового пакета (6.4) для наименьшей величины параметра крутизны волны  $k_0\zeta_0 = 0.2$ . Особенность данного численного эксперимента заключается в том, что обрушение волн не наблюдается и, следовательно, турбулентная вязкость  $\nu_t = 0$  на протяжении всего расчета.

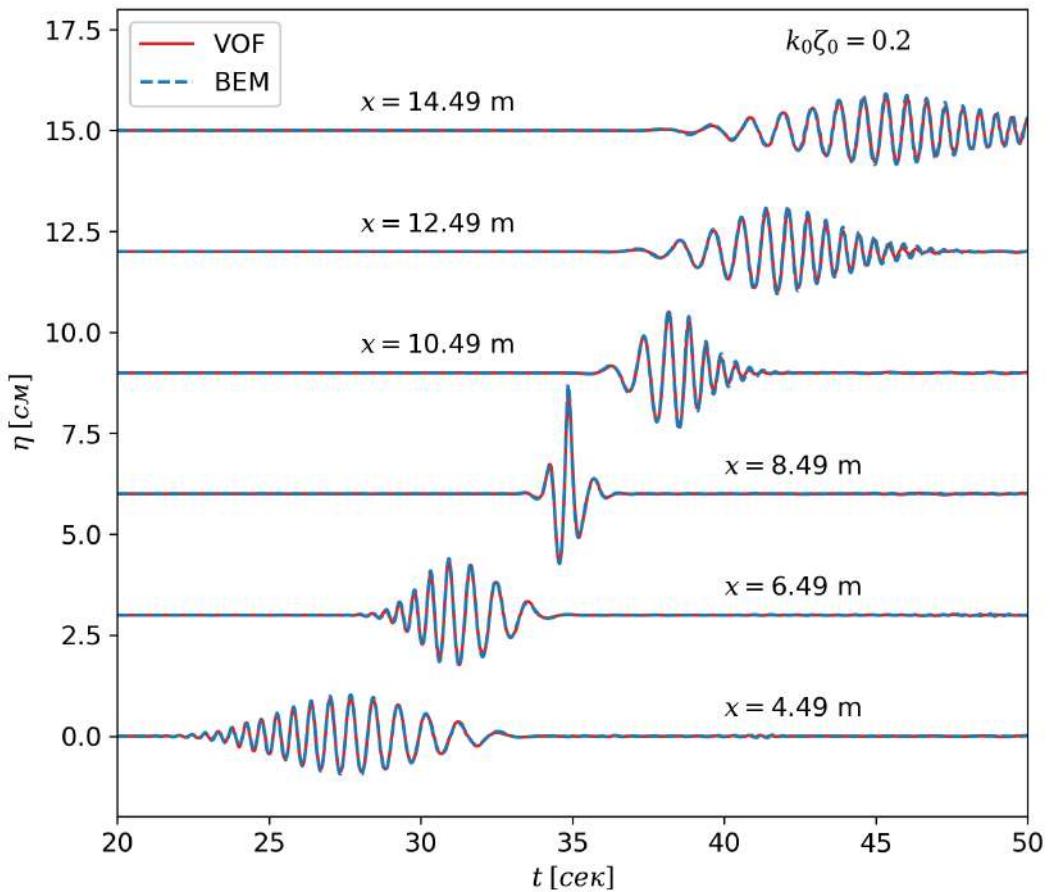


Рис. 6.11. Форма волны (возвышение свободной поверхности) для гауссового волнового пакета (6.4) с параметром  $k_0\zeta_0 = 0.2$ , измеренная в разных координатах  $x$ , отсчитываемых от волнопродуктора. На графике сравниваются результаты моделей двухфазного течения (VOF) и однофазного квазипотенциального течения (ВЕМ).

Прежде всего, следует отметить, что обе численные модели (ВЕМ и VOF)

показали очень близкие результаты, что и ожидалось в случае отсутствия обрушения волн. Вблизи волнопродуктора ( $x = 4.49$  м), волновой пакет является довольно протяженным во времени. Отчетливо видно разделение на длинные и короткие волны; причем, короткие волны приходят в точку измерения раньше длинных. По мере приближения волнового пакета к фокусу  $x = x_f = 8.5$  м, его длина существенно сокращается и достигает минимума непосредственно в фокальной точке. Исходя из сохранения энергии, сокращение длины волнового пакета приводит к росту высоты волн вблизи фокуса, что также отчетливо видно на графиках.

После прохождения фокальной точки  $x = x_f = 8.5$  м, на рис. 6.11 наблюдается обратный процесс. То есть, высота волн сокращается одновременно с увеличением длины волнового пакета. В значительной степени, процесс эволюции волнового пакета является симметричным относительно фокуса. Это также хорошо видно на пространственно-временных контурах, показывающих полную картину эволюции волновых пакетов на рис. 6.12.

Также контуры показывают, что повышение параметра  $\kappa_0\zeta_0$  вызывает увеличение высоты волн вблизи фокальной точки и, в конечном счете, приводит к их обрушению для  $\kappa_0\zeta_0 \geq 0.4$ . С увеличением параметра крутизны волнового пакета  $\kappa_0\zeta_0$  наблюдается расширение области ненулевых значений турбулентной вязкости  $\nu_t > 0$  как в пространстве, так и во времени. В том случае, если параметр  $\kappa_0\zeta_0 = 1.0$ , обрушение вон начинается в непосредственной близости от волнопродуктора и покрывает практически всю длину гидроволнового лотка.

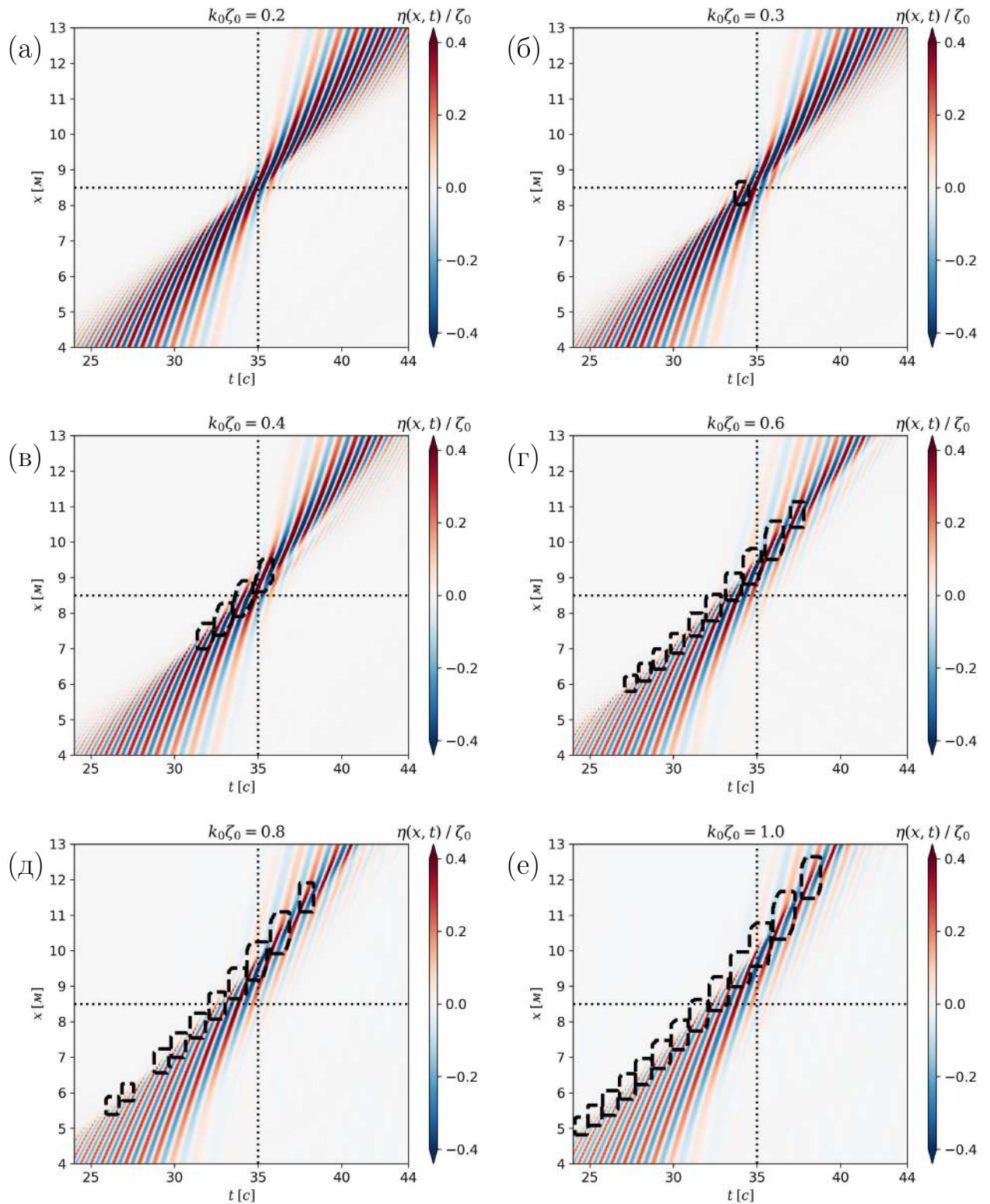


Рис. 6.12. Контуры возвышения свободной поверхности  $\eta(x, t)$ , отражающие полную картину пространственно-временной эволюции всех рассмотренных волновых пакетов.

Результаты получены при помощи однофазной квазипотенциальной модели ВЕМ, дополненной эмпирической моделью турбулентной вязкости и кинематическим критерием обрушения. Пунктирной линией обведены зоны ненулевой турбулентной вязкости, т.е. области, где  $\nu_t > 0$ . Перекрестием обозначено положение линейного фокуса  $(x_f, t_f)$ .

### 6.2.2. Исследование потоков энергии через поперечные сечения гидроволнового лотка

Дальнейший анализ точности модели турбулентной вязкости и кинематического критерия обрушения волн требует рассмотрения потоков энергии, переносимых волновыми пакетами через различные сечения гидроволнового лотка. С учетом того, что обрушение волны локализовано в пространстве, диссипация энергии волнового пакета в энергию вторичных турбулентных течений также ассоциирована с ограниченной в пространстве областью. При прохождении волнового пакета через данную область ожидается заметное уменьшение интегрального потока энергии.

Полный мгновенный поток энергии через поперечное сечение гидроволнового лотка, расположенное в координате  $x$ , запишется [69]:

$$\mathcal{F}^{NL}(x, t) = \int_{-h}^{\eta(x, t)} \left\{ \frac{1}{2} \rho |V|^2 + \rho g z + p \right\} V_x \alpha dz, \quad (6.10)$$

где  $\alpha$  - объемная доля воды, используемая в модели двухфазного течения со свободной поверхностью. В рамках однофазного квазипотенциального течения  $\alpha = 1$ . Верхний индекс  $NL$  обозначает использование полного (точного) выражения из теории нелинейных поверхностных волн.

Использование выражения (6.10) является затруднительным или даже невозможным в лабораторных измерениях. Это связано, прежде всего, со сложностью измерения мгновенного профиля скорости  $V$  и статического давления  $p$  в поперечном сечении лотка. Поэтому, на практике в большинстве случаев применяется упрощенное выражение для мгновенного потока энергии, полученное путем линеаризации задачи, как показано в [69]:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^L(x, t) &\approx \rho g c_{gs} \eta^2(x, t) \\ c_{gs} &= \frac{\sum_j c_{g,j} a_j^2}{\sum_j a_j^2} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Здесь  $c_{gs}$  - спектрально-взвешенная групповая скорость волнового пакета [110];  $c_{g,j}$  - групповая скорость отдельно взятой частотной гармоники (3.16), а  $a_j$  - её амплитуда.

В настоящем исследовании интерес представляет полная энергия, перенесенная волновым пакетом через заданное поперечное сечение за полный интервал времени. Для ее нахождения требуется проинтегрировать мгновенный поток энергии (6.10) или (6.11):

$$\mathcal{E}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x, t) dt \quad (6.12)$$

Величина энергии  $\mathcal{E}$ , полученная в различных численных моделях, исследуется на рис. 6.13.

Графики на рис. 6.13 показывают хорошее совпадение численной модели ВЕМ, опирающейся на полуэмпирическую модель турбулентной вязкости, с точной двухфазной моделью VOF. Исключение составляет волновой пакет с параметром  $k_0\zeta_0 = 0.2$ , показанный на рис. 6.13(a), в котором не наблюдается обрушение волн, а следовательно  $\nu_t = 0$  на протяжении всего расчета. Незначительное падение энергии  $\mathcal{E}$ , наблюдаемое в двухфазной модели VOF, очевидно, не связано с обрушением волн, а вызвано действие вязких (молекулярных) сил трения, не учтенных в квазипотенциальной модели ВЕМ.

Очень хорошее совпадение результатов расчетов говорит о высокой точности исследуемой полуэмпирической модели турбулентной вязкости, а также о высокой точности кинематического критерия обрушения. Более того, графики указывают на достаточно точное соответствие между полностью нелинейной  $\mathcal{E}^{NL}$  и линеаризованной  $\mathcal{E}^L$  оценками интегрального потока энергии. Это говорит о достаточной точности асимптотической оценки (6.11) и ее применимости на практике.

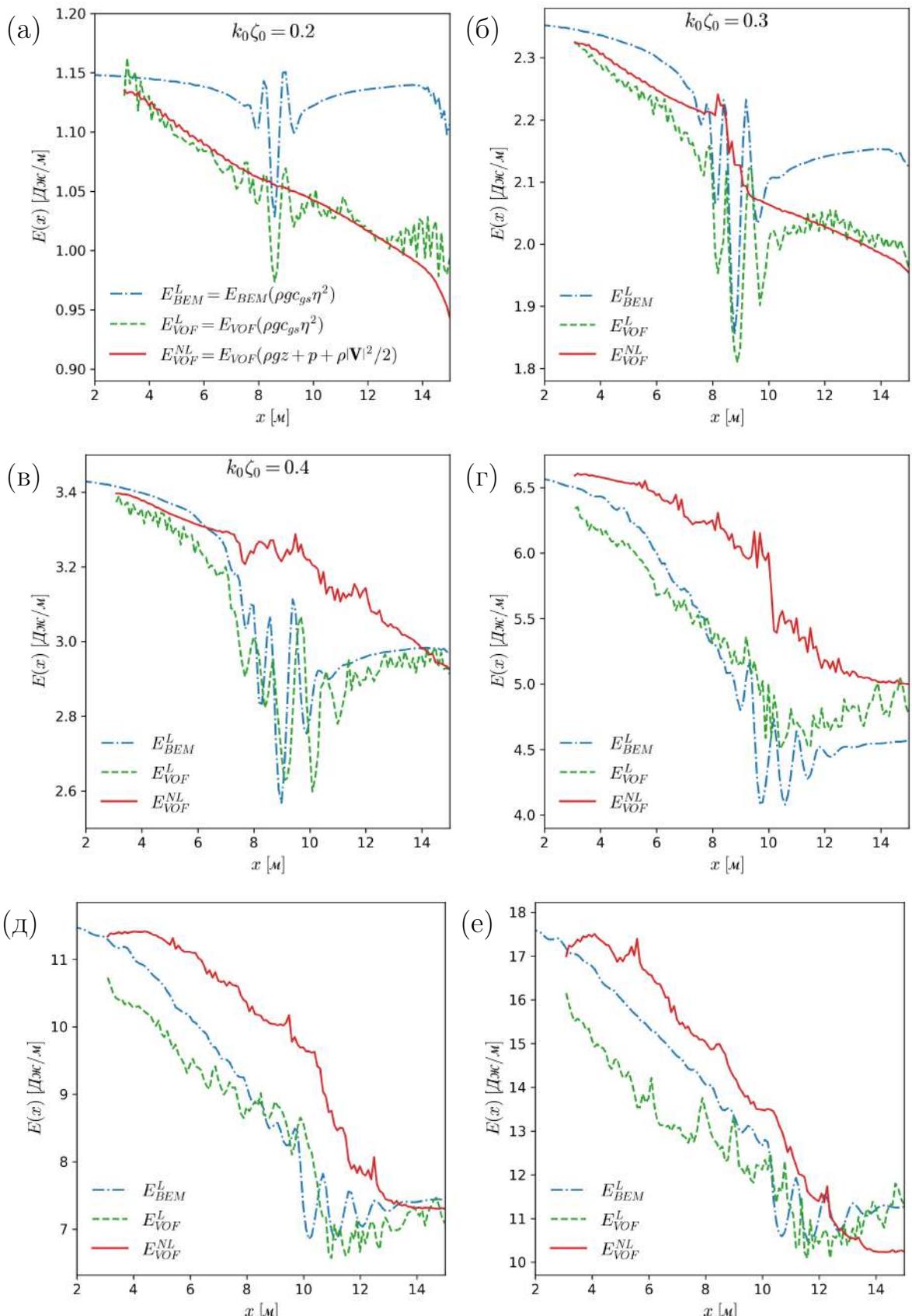


Рис. 6.13. Полный интегральный поток энергии, перенесенный волновым пакетом через выделенное поперечное сечение гидроволнового лотка. На графике  $E^L$  - линейная оценка потока энергии, а  $E^{NL}$  - точная нелинейная оценка потока энергии. На графиках сравниваются результаты точной многофазной модели VOF и модели однофазного квазипотенциального течения BEM.

Безразмерная величина полных потерь энергии бегущего волнового пакета  $(\Delta \mathcal{E})_{\text{потери}}/\mathcal{E}(x = 0)$  исследуется на рис. 6.14. Следует отметить, что указанные потери энергии переходят в энергию вторичных турбулентных течений, существующих в гидроволновом лотке с поверхностьюной волной. Из графика видно, что в волновом пакете с параметром  $k_0\zeta_0 = 0.2$  обрушение волн отсутствует ( $\nu_t = 0$ ), а следовательно потери  $(\Delta \mathcal{E})_{\text{потери}} \approx 0$  для модели BEM. С другой стороны, наблюдаются некоторые ненулевые потери энергии в точной модели VOF, которые объясняются вязким трением. Следует отметить, что вязкие потери являются незначительными и характерны также для лабораторных (экспериментальных) исследований поверхностных волн [110, 116, 330].

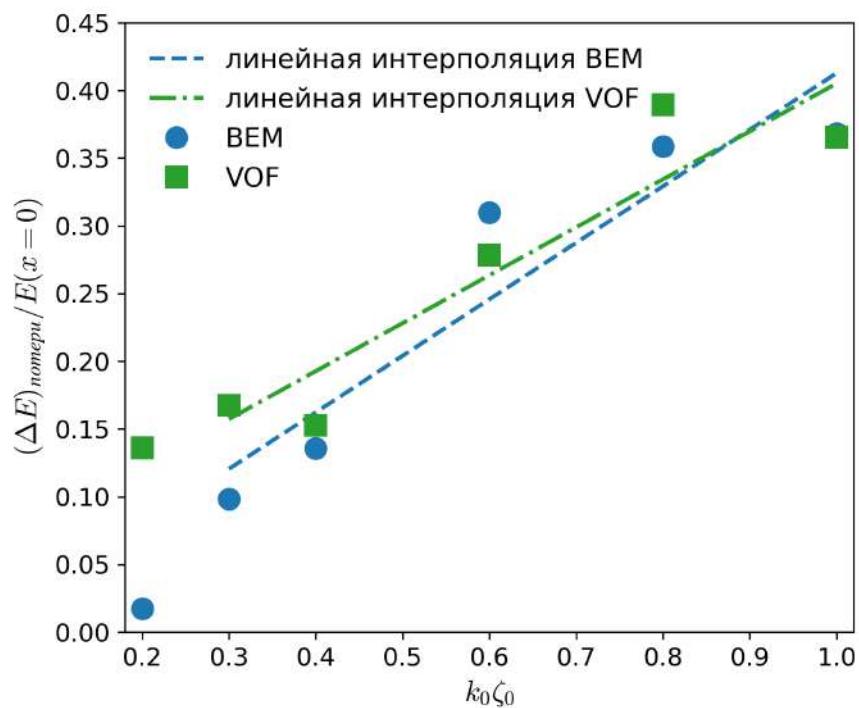


Рис. 6.14. Полные потери энергии волнового пакетом  $(\Delta \mathcal{E})_{\text{потери}}$ , вызванные обрушением волн. Величина  $\mathcal{E}(x = 0)$  соответствует начальной энергии волнового пакета в непосредственной близости от волнопродуктора. На графике сравниваются результаты точной многофазной модели VOF и модели однофазного квазипотенциального течения BEM.

Из рис. 6.14 видно, что потери энергии бегущего волнового пакета явно зависят от параметра крутизны  $k_0\zeta_0$ , т.е.  $(\Delta \mathcal{E})_{loss}/\mathcal{E}(x = 0) \sim k_0\zeta_0$ . Для

волнового пакета с наиболее высоким параметром  $\kappa_0 \zeta_0 = 1.0$ , потери энергии достигают  $(\Delta E)_{loss}/E(x=0) \approx 35\%$ . То есть, 35% начальной энергии бегущей волны диссирирует в энергию вторичных турбулентных течений, что является весьма существенной частью.

Следует подчеркнуть, что график на рис. 6.14 также показывает очень хорошее соответствие между исследуемыми моделями, что подтверждает высокую точность разработанной полуэмпирической модели турбулентной вязкости, а также высокую точность кинематического критерия обрушения. Тем не менее, требуется более детальное исследование изменения формы волнового пакета во времени для того, чтобы установить применимость модели турбулентной вязкости для дальнейшего использования в исследовании.

### **6.3. Погрешности модели турбулентной вязкости для обрушающихся волн**

#### **6.3.1. Изменение формы волны с ростом параметра крутизны $\kappa_0 \zeta_0$**

При решении инженерных задач особое значение имеют не только энергетические характеристики набегающего волнового пакета, но и форма отдельных волн в этом пакете. Например, при исследовании силового воздействия набегающей волны на прибрежные или морские сооружения, особую роль играет высота волны, поскольку скорость жидкости под свободной поверхностью экспоненциально зависит от вертикальной координаты. То есть,  $V_x \sim \exp(z)$ , где  $z$  - вертикальная координата, отсчитываемая от среднего положения свободной поверхности, как показано на рис. 3.8. Исходя из этого, представляется целесообразным более подробное исследование формы свободной поверхности, получаемой при использовании модели турбулентной вязкости, по сравнению с точной моделью VOF.

Графики на рис. 6.15 изображают изменение формы свободной поверхности для гауссового волнового пакета (6.4) с различными параметрами крутиз-

ны  $\kappa_0\zeta_0$ , см. подрисунки (а)–(е). Рисунки (а)–(в) указывают на то, что модели ВЕМ и VOF дают практически совпадающие результаты для параметра крутизны в диапазоне  $0.2 \leq \kappa_0\zeta_0 \leq 0.4$ . При таких значениях  $\kappa_0\zeta_0$  наблюдается незначительное обрушение волн или оно вовсе отсутствует, что подтверждает рис. 6.12.

Увеличение параметра  $\kappa_0\zeta_0$  приводит к расширению области обрушения волн, показанной пунктирной линией на рис. 6.12, и к соответствующему росту энергии вторичных турбулентных течений. Этот процесс сопровождается нарастанием расхождения формы свободной поверхности, полученной в моделях ВЕМ и VOF, см. рис. 6.15(г)–(е). Причем, следует заметить, что до возникновения энергичного обрушения волн (в координате  $x = 4.5$  м) расхождение между моделями практически отсутствует. Однако в последующих координатах  $x > 8$  м расхождение очень существенно. Это явление объясняется тем, что более 30% энергии волнового пакета диссирирует в энергию вторичных турбулентных течений, см. рис. 6.14.

Таким образом, турбулентность составляет порядка 30% энергии общего потока и, соответственно, ее обратным влиянием на осредненный несущий поток больше нельзя пренебрегать, как это делается в подавляющем числе моделей турбулентной вязкости на основе гипотезы Буссинеска. В качестве первого шага, требуется исследовать структуру возбужденного турбулентного течения.

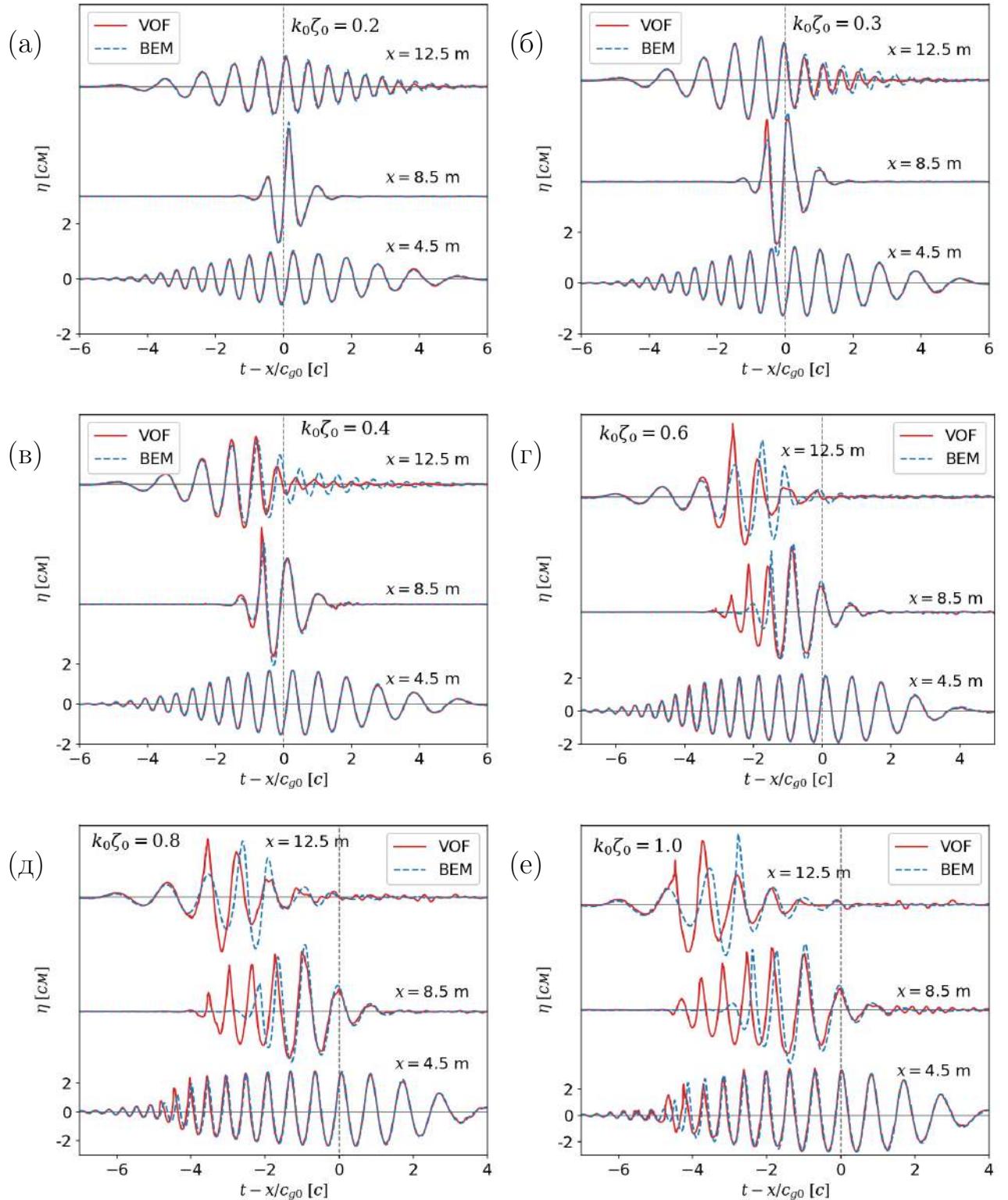


Рис. 6.15. Форма волны для гауссовых волновых пакетов (6.4) с параметром  $k_0 \zeta_0 = 0.2, 0.3, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ , измеренная в разных координатах  $x$ , отсчитываемых от волнопродуктора. На графике сравниваются результаты модели однофазного квазипотенциального течения (ВЕМ), замкнутой моделью турбулентной вязкости, с точной моделью двухфазного течения (VOF).

### 6.3.2. Гидродинамическая турбулентность, генерируемая обрушением поверхностных волн

Следует отметить, что точная модель двухфазного течения с границей раздела фаз решает полные уравнения Навье-Стокса с учетом метода VOF (3.8). Таким образом, течение жидкости, полученное в рамках данной модели, содержит все компоненты: как несущее осредненное течение, так и вторичное турбулентное. С другой стороны, квазипотенциальная модель ВЕМ (3.9), замкнутая моделью турбулентной вязкости, отражает только осредненное течение жидкости и не включает в себя турбулентные компоненты скорости. Исходя из этого можно заключить, что вычитание поля скоростей второй модели из первой позволяет отфильтровать турбулентное течение из полного решения для дальнейшего исследования.

Однако данный метод не работает для наиболее интересных случаев, когда  $\kappa_0 \zeta_0 \geq 0.6$ . Для таких волновых пакетов, форма свободной поверхности в моделях ВЕМ и VOF кардинально отличается (см. рис. 6.15(г)–(е)) и, соответственно, отличаются и поля скоростей. Требуется альтернативный метод отделения турбулентной компоненты от полного течения, опирающийся на решение модели VOF.

В рамках настоящей диссертации разработан метод итерационного вычисления компонент скорости потенциального течения жидкости, опирающийся на слабо-нелинейную теорию Захарова [77] и работы [392, 393]. В рамках данного метода, решение квазипотенциальной модели ВЕМ заменяется слабо-нелинейным приближением для поля скорости  $V^{

} = \{V_x^{

}, V_z^{

}\}$ , которое записывается в форме (7.6) и (7.7), расширенной до 3-го порядка нелинейности по  $\epsilon$  (1.57):

$$\begin{aligned}
V_x^{

} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, z, t) = \frac{1}{2} \left\{ \eta^{(1)} \kappa^{(1)} \cosh(\kappa^{(1)}(h+z)) \right. \\
&\quad \left. + \eta^{(2)} \kappa^{(2)} \cosh(\kappa^{(2)}(h+z)) + \eta^{(3)} \kappa^{(3)} \cosh(\kappa^{(3)}(h+z)) \right\} + \text{к.с.} \\
V_z^{

} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, z, t) = \frac{1}{2} \left\{ -i\eta^{(1)} \kappa^{(1)} \sinh(\kappa^{(1)}(h+z)) \right. \\
&\quad \left. - i\eta^{(2)} \kappa^{(2)} \sinh(\kappa^{(2)}(h+z)) - i\eta^{(3)} \kappa^{(3)} \sinh(\kappa^{(3)}(h+z)) \right\} + \text{к.с.,}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

где  $\eta^{(1)}$  - форма свободной поверхности свободных волн 1-го порядка, а  $\eta^{(2)}$  и  $\eta^{(3)}$  - связанных волн 2-го и 3-го порядков, соответственно. Индекс  $< p >$  отражает тот факт, что поле скоростей соответствует несущему потенциальному (осредненному) течению.

Функции  $\eta^{(1)}$ ,  $\eta^{(2)}$  и  $\eta^{(3)}$  записываются в форме (7.2):

$$\begin{aligned}
\eta^{(1)}(x, t) &= \sum_N A^{(1)} e^{i(\kappa^{(1)}x - \omega^{(1)}t)} \\
\eta^{(2)}(x, t) &= \sum_M A^{(2)} e^{i(\kappa^{(2)}x - \omega^{(2)}t)} \\
\eta^{(3)}(x, t) &= \sum_K A^{(3)} e^{i(\kappa^{(3)}x - \omega^{(3)}t)},
\end{aligned} \tag{6.14}$$

где  $N$  - количество гармоник свободных волн 1-го порядка, а  $M$  и  $K$  - количество гармоник связанных волн 2-го и 3-го порядков. Причем, комплексные амплитуды связанных волн 2-го и 3-го порядков, т.е.  $A^{(2)}$  и  $A^{(3)}$ , полностью определяются амплитудами свободных волн  $A^{(1)}$  в рамках теории Захарова, что также используется в разделе 7.2. настоящей диссертации. В качестве примера, выражения для амплитуд  $A^{(2)}$  даны в уравнениях (7.3)–(7.5). Так называемые ядра теории Захарова, требуемые в вычислениях, приведены в приложении 1, а также в работах [75, 77, 78, 79, 80, 81, 82].

В результате, для вычисления слабо-нелинейного потенциального поля скоростей  $V^{

}$  требуется определить только комплексный спектр формы

свободной поверхности (волны), полученный в рамках точной модели двухфазного течения VOF. После этого, обозначая полное поле скоростей в рамках модели VOF через  $V^{VOF}$ , можно выделить турбулентную компоненту течения следующим образом:

$$V^{<np>} = V^{VOF} - V^{<p>} \quad (6.15)$$

Здесь индекс  $< np >$  обозначает турбулентную компоненту течения, которая не является потенциальной.

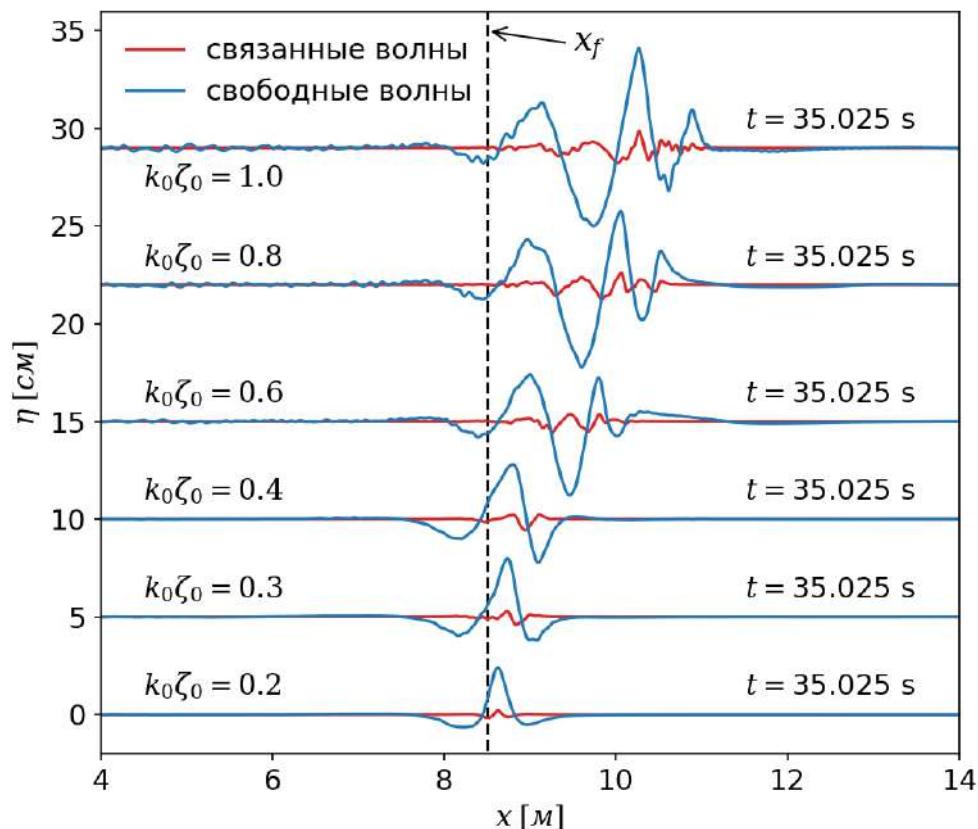


Рис. 6.16. Результат разложения формы волны, полученной в модели двухфазного течения VOF, на свободные волны 1-го порядка  $\eta^{(1)}$  и связанные волны 2-го и 3-го порядков  $\eta^{(2)} + \eta^{(3)}$ . На графике рассмотрены все исследуемые гауссовые волновые пакеты (6.4) с параметром  $\kappa_0 \zeta_0 = 0.2, 0.3, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ .

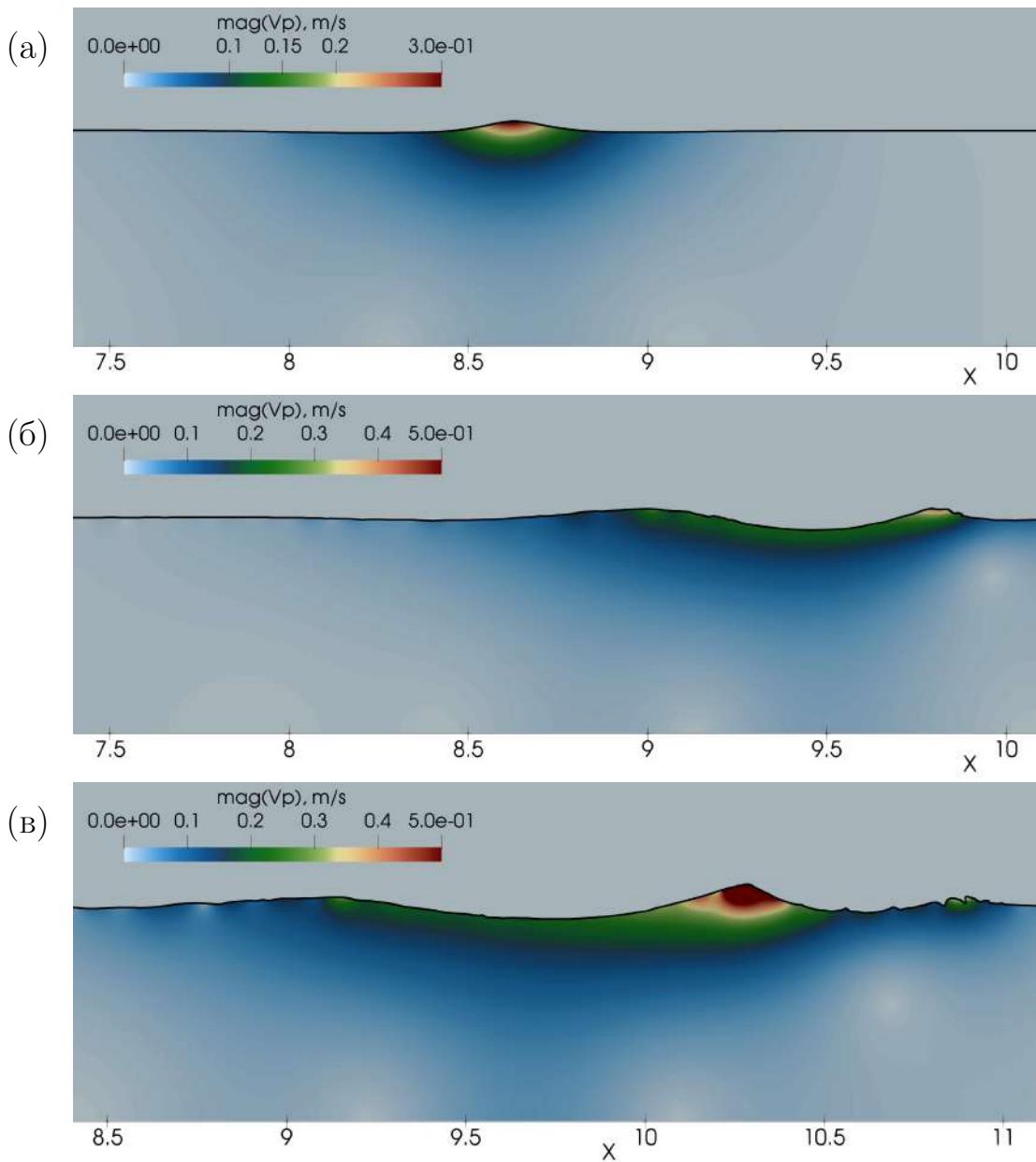


Рис. 6.17. Модуль скорости потенциальной компоненты течения  $|V^{<p>}|$ , вычисленный с помощью уравнений (6.13) опираясь на форму волны, полученную в модели двухфазного течения VOF. Рассмотрены три гауссовых волновых пакета с параметрами  
(a)  $\kappa_0 \zeta_0 = 0.2$ , (б)  $\kappa_0 \zeta_0 = 0.6$ , (в)  $\kappa_0 \zeta_0 = 1.0$ .

Вычисление амплитуд  $A^{(1)}$ ,  $A^{(2)}$  и  $A^{(3)}$  осуществляется итерационно опираясь на тот факт, что сумма  $\eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \eta^{(3)}$  (6.14) должна давать форму волны, полученную в модели двухфазного течения VOF  $\eta^{VOF}$ , то есть

$$\eta^{VOF} = \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \eta^{(3)} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \quad (6.16)$$

Иллюстрация процесса разложения формы волны  $\eta^{VOF}$  на отдельные компоненты показана на рис. 6.16. График охватывает все рассматриваемые гауссовые волновые пакеты и показывает форму свободных волн  $\eta^{(1)}$  и форму связанных волн  $\eta^{(2)} + \eta^{(3)}$ . Причем, их сумма с высокой точностью соответствует модели двухфазного течения VOF в соответствии с (6.16).

Распределения модуля скорости потенциальной компоненты течения, вычисленные с использованием уравнений (6.13), представлены на рис. 6.17. Для экономии места рассмотрены только три волновых пакета с параметрами крутизны  $k_0\zeta_0 = 0.2, 0.6, 1.0$ . Поля скоростей наглядно демонстрируют существенный рост модуля скорости вблизи гребня волн. Причем, чем больше параметр  $k_0\zeta_0$  и, соответственно, выше высота гребня, тем более высокие скорости жидкости наблюдаются. Так, на подрисунке (а) скорости жидкости достигают величины  $\sim 0.3$  м/с С другой стороны, на подрисунке (в) скорости превышают 0.6 м/с.

Рисунок 6.18 исследует распределение скоростей непотенциальной (турбулентной) компоненты течения, которые вычисляются при помощи зависимости (6.15). Из рисунка видно, что распространение волнового пакета малой крутизны ( $k_0\zeta_0 = 0.2$ , подрисунок (а)) соответствует практически ламинарному течению. С ростом параметра крутизны до  $k_0\zeta_0 = 0.6$  возникает обрушение волн, которое порождает вторичные турбулентные течения. Однако турбулентность в данном случае сконцентрирована в тоном слое вблизи свободной поверхности. Проникновение турбулентных течений в толщу воды незначительно.

При еще большем увеличении параметра крутизны до  $k_0\zeta_0 = 1.0$  обрушение волн существенно интенсифицируется, что вызывает формирование устойчивых вихревых структур, которые отрываются от свободной поверхности и проникают в толщу воды. Очевидно, что при таком сценарии вторичные турбулентные течения могут оказывать существенное влияние на несущее потенциальное течение, показанное на рис. 6.17.

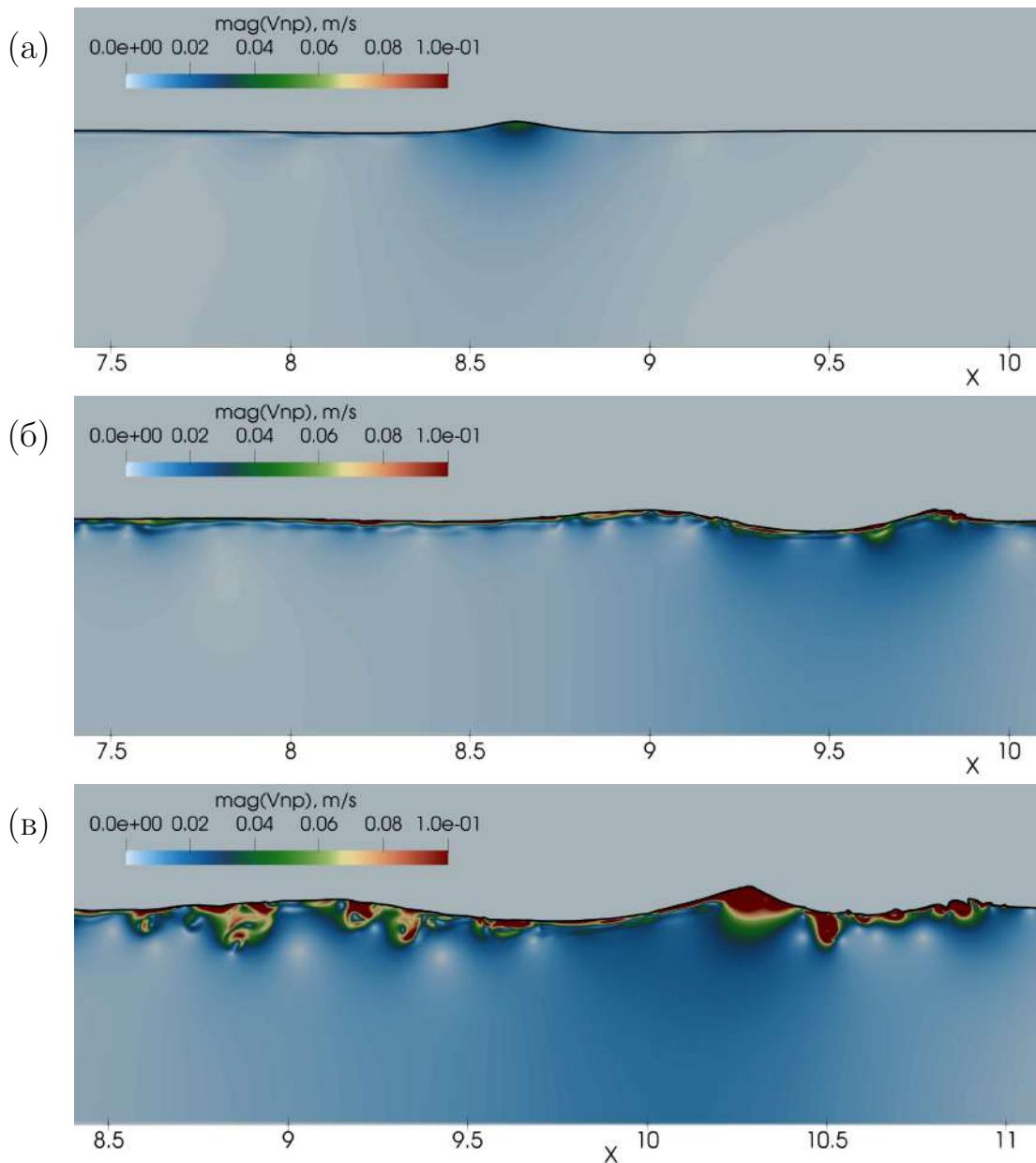


Рис. 6.18. Модуль скорости турбулентной (непотенциальной) компоненты течения  $|V^{np}|$ , вычисленный с помощью выражения (6.15) опираясь на форму волны, полученную в модели двухфазного течения VOF. Рассмотрены три гауссовых волновых пакета с параметрами (а)  $\kappa_0 \zeta_0 = 0.2$ , (б)  $\kappa_0 \zeta_0 = 0.6$ , (в)  $\kappa_0 \zeta_0 = 1.0$ .

Для дальнейшего рассмотрения требуется ввести интегральную величину энергии турбулентной компоненты течения  $\mathcal{U}^{np}$ , а также аналогичную

величину для осредненного несущего потенциального течения  $\mathcal{U}^{<p>}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^{<np>} (x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-h}^h \frac{1}{2} \rho |V^{<np>}|^2 \alpha_1 dz \\ \mathcal{U}^{<p>} (x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-h}^h \frac{1}{2} \rho |V^{<p>}|^2 \alpha_1 dz\end{aligned}\quad (6.17)$$

Здесь  $h$  - средняя глубина воды,  $\rho$  - плотность воды, а  $\alpha_1$  - объемная концентрация воды, которая добавлена для исключения из рассмотрения слоя воздуха, присутствующего в двухфазной модели VOF. Обе величины ( $\mathcal{U}^{<np>}$  и  $\mathcal{U}^{<p>}$ ) представляют собой кинетические энергии турбулентного и несущего течений, соответственно, проинтегрированный по всей толще воды  $h$ .

Эволюция энергии вторичного порожденного турбулентного течения  $\mathcal{U}^{<np>}$  в пространстве и во времени показана на рис. 6.19 для волновых пакетов с параметрами крутизны  $\kappa_0 \zeta_0 = 0.6$  (а) и  $\kappa_0 \zeta_0 = 1.0$  (б). Видно, что в обоих случаях порожденная энергия турбулентности сохраняется продолжительное время. Время жизни турбулентных структур значительно превышает время прохождения волновым пакетом исследуемой области пространства  $6 \text{ м} \leq x \leq 12 \text{ м}$ .

Кроме того, отчетливо видно, что турбулентные структуры перемещаются в пространстве с течением времени. Непосредственно после порождения наблюдается их перемещение в направлении распространения волнового пакета. С другой стороны, по истечении некоторого времени, возможно некоторое перемещение турбулентных структур в обратном направлении. В целом, структура турбулентности представляется достаточно сложной и запутанной.

Следует подчеркнуть, что показанная на рис. 6.19 турбулентность разрешается только в рамках точной модели двухфазного течения VOF. В то же время, турбулентное течение исключается из рассмотрения в рамках квазипотенциальной модели ВЕМ и заменяется исследуемой полуэмпирической моделью турбулентной вязкости. Можно предположить, что обратное воздей-

ствие вторичного турбулентного течения на основное несущее течение, что полностью исключено из рассмотрения в рамках модели ВЕМ, может приводить к столь большим различиям в форме свободной поверхности, показанным на рис. 6.15.

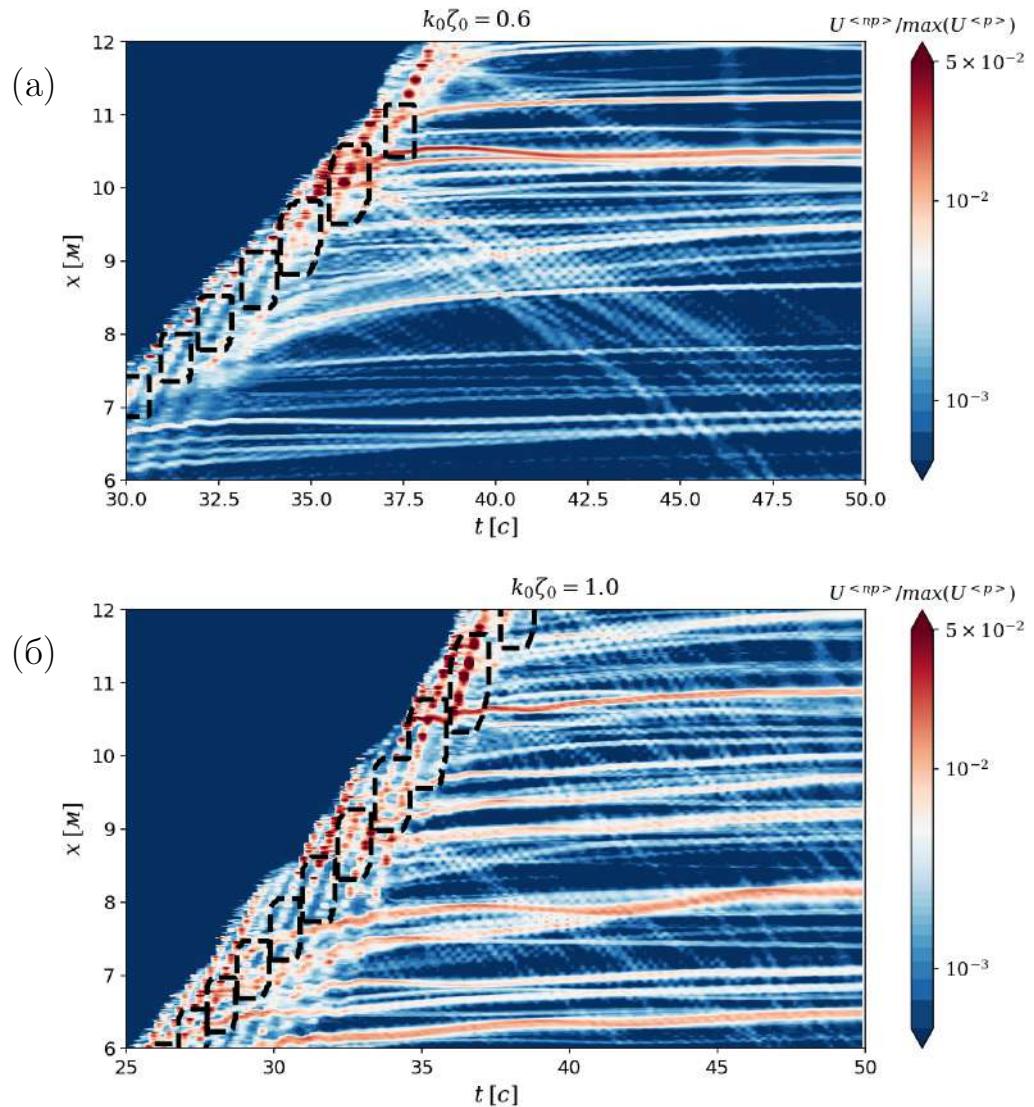


Рис. 6.19. Пространственно-временная диаграмма эволюции энергии турбулентной компоненты течения  $U^{np}$  (6.17), обезразмеренная по энергии основного несущего потока  $U^p$ . Черными линиями обозначены зоны ненулевой турбулентной вязкости  $\nu_t > 0$ , соответствующие рисунку 6.12. Рассмотрены два гауссовых волновых пакета (6.4) с параметрами (а)  $k_0 \zeta_0 = 0.6$ , и (б)  $k_0 \zeta_0 = 1.0$ .

Очевидно, что требуется исправление неточностей, вызванных применением полуэмпирической модели турбулентной вязкости (см. рис. 6.15). Для

этого необходимо упростить процессы, происходящие в турбулентной части течения, и выделить основные закономерности.

## 6.4. Уточнение модели турбулентной вязкости для обрушающихся волн

### 6.4.1. Эффект фазовой синхронизации

Основной отличительной чертой между гауссовыми волновыми пакетами (6.4), рассмотренными в настоящем исследовании, является разная скорость диссипации энергии основного несущего потока в турбулентность, показанная на рис. 6.13. Для упрощения, графики на рис. 6.13 можно интерполировать линейной зависимостью, изображенной пунктирными линиями на рис. 6.20.

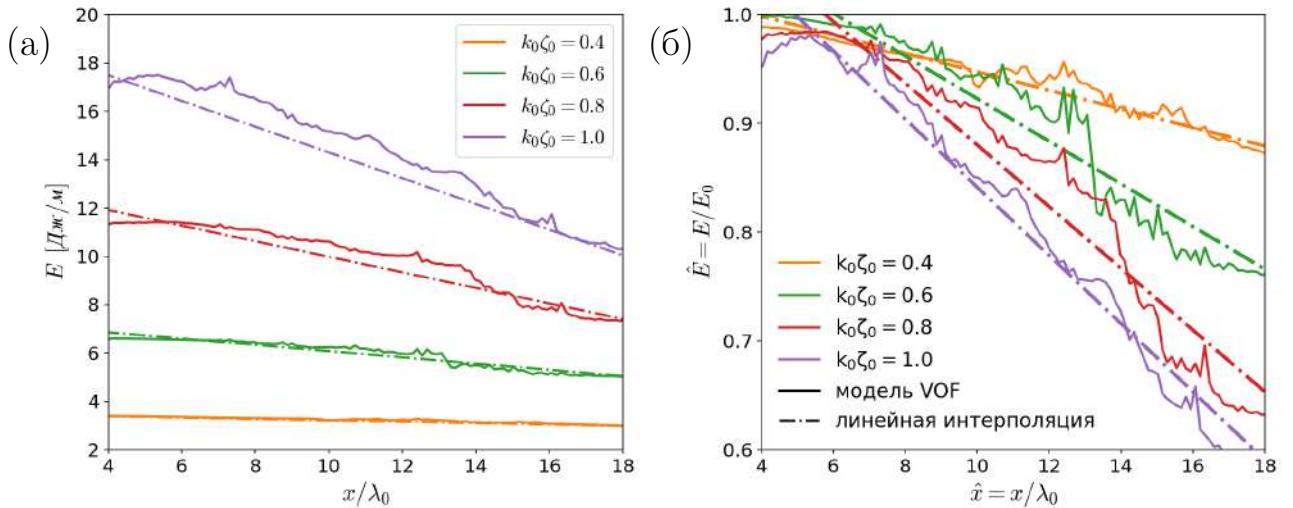


Рис. 6.20. Диссипация интегрального потока энергии  $\mathcal{E}$ , переносимого волновым пакетом, в энергию порожденной турбулентности: (а) размерная оценка потока энергии  $\mathcal{E}$  в модели VOF; (б) безразмерный поток энергии  $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ , где  $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(x = 0)$  - поток энергии через поперечное сечение в начальной координате  $x = 0$ . Пунктиром нанесена линия, полученная интерполяцией результатов моделирования VOF. Рассмотрены четыре гауссовых волновых пакета (6.4), в которых наблюдается достаточно сильная диссипация энергии несущего потока в турбулентность:  $k_0\zeta_0 = 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ .

Размерная оценка потока энергии  $\mathcal{E}$ , изображенная на рис. 6.20(а), указывает на значительный рост начального энергетического запаса волнового пакета по мере увеличения параметра крутизны  $\kappa_0\zeta_0$ . Так, для волнового пакета с  $\kappa_0\zeta_0 = 0.4$  наблюдается начальная величина потока энергии порядка  $\mathcal{E} \approx 3.5$  Дж/м. Двукратное увеличение параметра крутизны до  $\kappa_0\zeta_0 = 1.0$  приводит к пятикратному увеличению начального потока энергии до  $\mathcal{E} \approx 18$  Дж/м. Таким образом, крутизна волнового пакета квадратичным образом влияет на его энергетический запас.

На рис. 6.20(б) вводится безразмерный поток энергии  $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}/\mathcal{E}_0$  используя величину начального потока энергии  $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(x = 0)$ , переносимого через поперечное сечение в координате  $x = 0$ . Также вводится безразмерная координата вдоль гидроволнового лотка  $\hat{x} = x/\lambda_0$ , где  $\lambda_0 = 0.765$  м - длина несущей волны (6.4). Видно, что в безразмерном виде (подрисунок (б)) прямые линейной интерполяции имеют одинаковую начальную координату и отличаются только углом наклона. Причем, чем выше параметр крутизны  $\kappa_0\zeta_0$ , тем больше угол наклона прямых и, соответственно, выше скорость диссипации энергии.

Тангенс угла наклона прямых на рис. 6.20(б) можно охарактеризовать безразмерным градиентом:

$$\dot{\mathcal{E}} = -\frac{d\hat{\mathcal{E}}}{d\hat{x}} \quad (6.18)$$

Величины  $\dot{\mathcal{E}}$  в зависимости от крутизны волновых пакетов приведены в таблице 6.1.

Для дальнейшего анализа, требуется ввести тригонометрическую форму записи свободной волны  $\eta^{(1)}$  (6.14):

$$\eta^{(1)}(x) = \sum_{n=0}^N |A^{(1)}(\kappa_n)| \cos(\kappa_n x + \xi_n) \quad (6.19)$$

Здесь  $|A^{(1)}(\kappa_n)|$  - абсолютная величина амплитуды гармоники с волновым

Таблица 6.1

Зависимость безразмерной скорости диссипации энергии в турбулентность  $\dot{\mathcal{E}}$  (6.18) и скорости среднего течения  $\tilde{V}$  от параметра крутизны волнового пакета  $\kappa_0 \zeta_0$ .

$\kappa_0 \zeta_0$	$\dot{\mathcal{E}}$	$\tilde{V}/c_{g0}$
0.3	0.00695	
0.4	0.00852	$4.02 \times 10^{-3}$
0.6	0.0196	$2.0 \times 10^{-2}$
0.8	0.0284	$4.08 \times 10^{-2}$
1.0	0.0313	$4.94 \times 10^{-2}$

числом  $\kappa_n$ , а  $\xi_n$  - фаза соответствующей гармоники:

$$\xi_n = \tan^{-1} \frac{\text{Im} \left\{ A^{(1)}(\kappa_n) \right\}}{\text{Re} \left\{ A^{(1)}(\kappa_n) \right\}}, \quad (6.20)$$

$n$  - номер гармоники свободной волны,  $N$  - полное количество гармоник в дискретном спектре свободной волны.

Обозначая через  $\eta_{VOF}^{(1)}$  форму свободной волны, полученную в точной модели двухфазного течения, а через  $\eta_{BEM}^{(1)}$  - форму волны в квазипотенциальной модели (см. рис. 6.15), можно отметить, что их отличие может быть вызвано разницей в двух величинах:

- разницей в амплитудах  $|A_{VOF}^{(1)}|$  и  $|A_{BEM}^{(1)}|$ ,
- или разницей в фазах  $\xi_{VOF}$  и  $\xi_{BEM}$ .

Рисунок 6.21 исследует эволюцию амплитудного спектра волновых пакетов  $|A_{VOF}^{(1)}|$  и  $|A_{BEM}^{(1)}|$  с течением времени, полученную в двух исследуемых моделях. Их графиков видно, что амплитудный спектр всех волновых пакетов в момент времени  $t = 30$  сек близок к гауссовой кривой, что связано с определением исследуемых волновых пакетов (6.4). С течением времени ( $t = 35$  сек и  $t = 40$  сек) форма спектра начинает искажаться вызывая рост амплитуд с низким волновым числом и затухание гармоник с высоким волновым числом. Этот процесс перетекания энергии между гармониками в спектре хорошо из-

вестен [86, 90, 91, 92] и обсуждается в литературном анализе в разделе 1.3.2. настоящей диссертации.

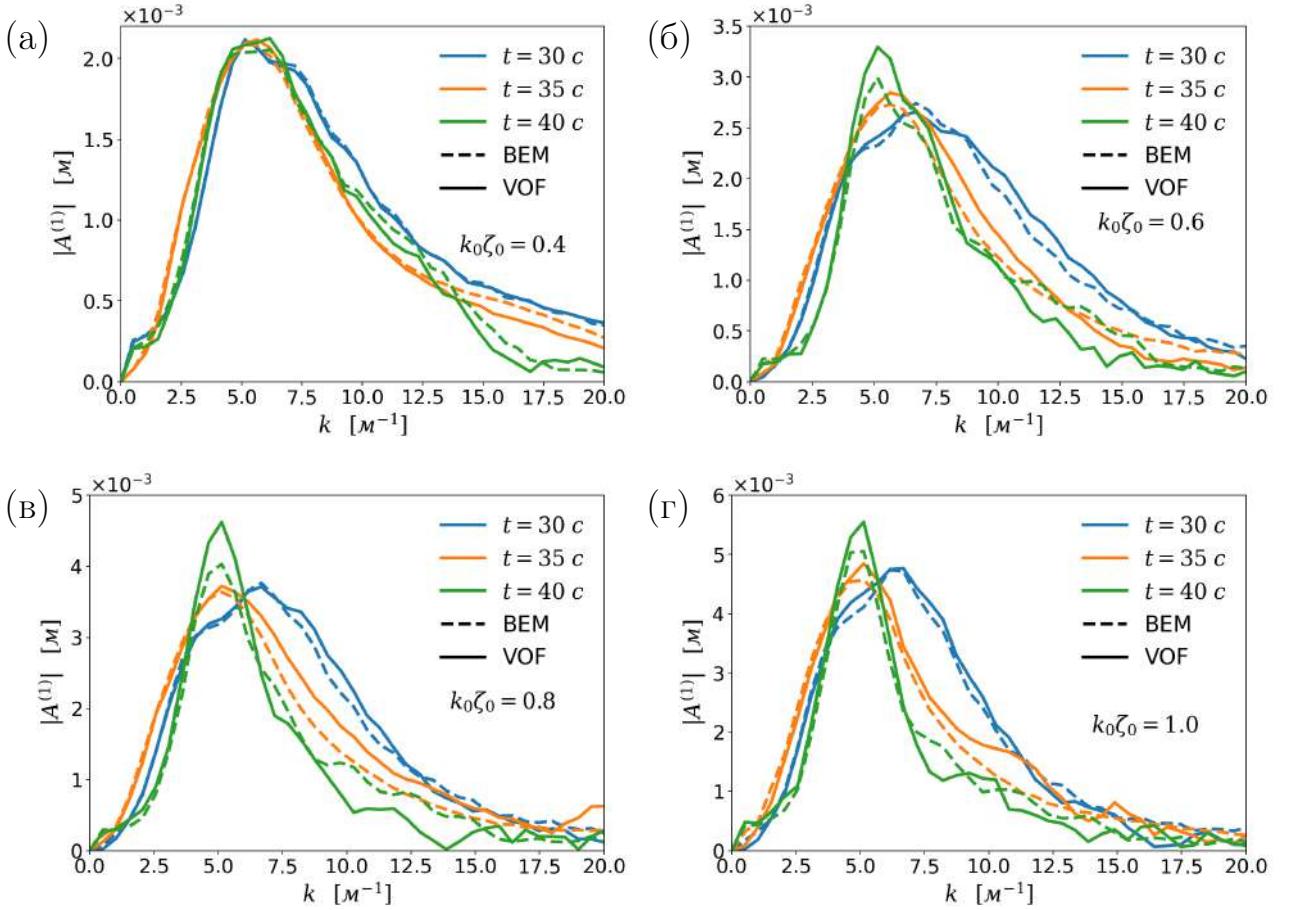


Рис. 6.21. Спектры свободных волн, полученные в моделях VOF (сплошная линия) и ВЕМ (пунктирная линия). На оси абсцисс отложены волновые числа  $k_n = 2\pi/\lambda_n$ , где  $\lambda_n$  - длина волны гармоники с номером  $n$ . Рассмотрены четыре гауссовых волновых пакета (6.4) с параметрами крутизны  $k_0\zeta_0 = 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ . Разными цветами изображены спектры, полученные в разные моменты времени  $t$ .

Основной вывод, который можно сделать из анализа спектров на рис. 6.21, заключается в том, что отличия между моделями VOF и BEM незначительные и укладываются в погрешность численных решений с учетом того, что модель VOF учитывает вязкое трение, а модель BEM нет. Также нельзя выделить какой-либо закономерности в разнице между графиками. Таким образом, разница в амплитудах  $|A_{VOF}^{(1)}| - |A_{BEM}^{(1)}|$  не может быть причиной столь драматичных отличий в форме свободной поверхности, показанной на

рис. 6.15. Требуется более подробно исследовать поведение фазовых спектров  $\xi_{VOF}$  и  $\xi_{BEM}$ .

Для дальнейшего исследования предлагается ввести разность фаз свободных волн  $\xi_{n,VOF} - \xi_{n,BEM}$  ( $n$  - номер гармоники в спектре), масштабированную по частоте несущей волны  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  (период несущей волны составляет  $T_0 = 0.7$  сек):

$$\frac{\Delta\xi_n}{\omega_0 T_0} = \frac{1}{2\pi} (\xi_{n,VOF} - \xi_{n,BEM}) \quad (6.21)$$

Рисунок 6.22 показывает зависимость разницы фаз между моделями  $\Delta\xi_n$  от волнового числа  $\kappa_n$  и от времени  $t$ . Течение времени показано меняющимся цветом графиков от синего к красному.

Прежде всего, на рис. 6.22 прослеживается отчетливая закономерность увеличения разности фаз  $\Delta\xi_n$  с течением времени. Причем, разность фаз увеличивается тем быстрее, чем больше волновое число  $\kappa_n$  (и, соответственно, меньше длина волны  $\lambda_n$ ). Кроме того, увеличение параметра крутизны  $\zeta_0$  на графиках (а)–(г) приводит к ускорению роста разности фаз. Следует особенным образом подчеркнуть, что разность фаз  $\Delta\xi_n/(\omega_0 T_0) > 1$  соответствует полному “обороту” ( $2\pi$  рад). То есть, величины, изображенные на графиках (рис. 6.22) являются чрезвычайно большими. Очевидно, что разность фаз  $\Delta\xi_n$  между моделями VOF и BEM является главной причиной отличия форм свободной поверхности на рис. 6.15.

Можно выделить несколько основных параметров, от которых зависит разность фаз  $\Delta\xi$ : скорость диссиpации энергии волны в турбулентность  $\dot{\Xi}$  (6.18), волновое число  $\kappa$  и время  $t$ . Исследование показало, что графики, изображенные на рис. 6.22, хорошо аппроксимируются следующей степенной зависимостью:

$$\frac{\Delta\xi}{\omega_0 T_0} = \Xi \left[ \frac{\dot{\Xi}}{\Xi} \right]^{\Theta_\Xi} \left[ \frac{\kappa}{\kappa_0} \right]^{\Theta_K} \left[ \frac{t}{T_0} \right]^{\Theta_T}, \quad (6.22)$$

где  $\Xi$ ,  $\Theta_\Xi$ ,  $\Theta_K$  и  $\Theta_T$  - безразмерные постоянные аппроксимации. Значения постоянных были найдены методом наименьших квадратов пользуясь данными

с рис. 6.22, см. таблицу 6.2.

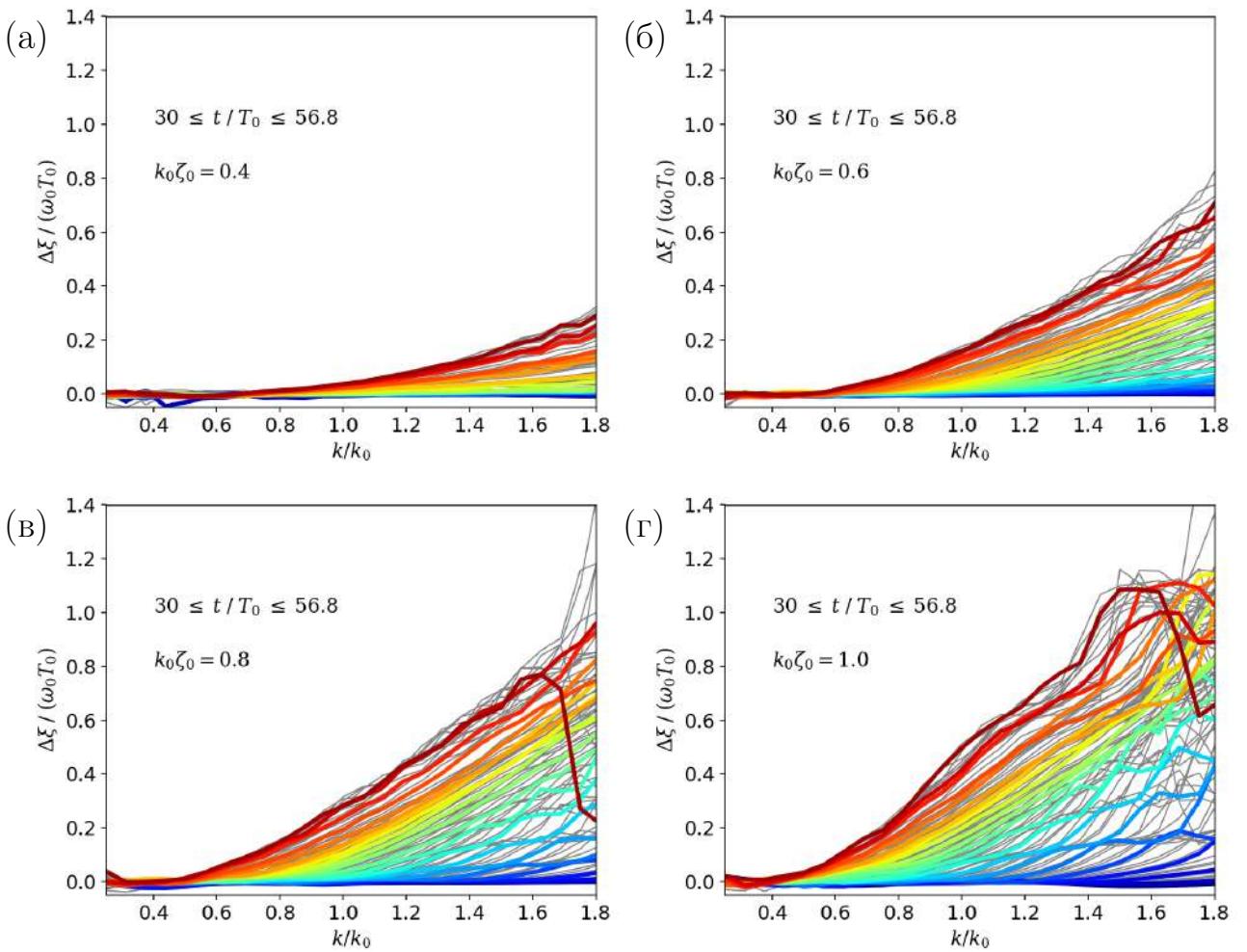


Рис. 6.22. Разность фаз  $\Delta\xi_n/(\omega_0 T_0)$  свободных волн между моделями VOF и ВЕМ (6.21).

Меняющимся цветом от синего к красному показаны различные моменты времени в диапазоне  $30 \leq t/T_0 \leq 56.8$ . Рассмотрены гауссовые волновые пакеты (6.4) с различными параметрами крутизны: (а)  $k_0\zeta_0 = 0.4$ , (б)  $k_0\zeta_0 = 0.6$ , (в)  $k_0\zeta_0 = 0.8$ , (г)  $k_0\zeta_0 = 1.0$ .

Таблица 6.2  
Значения безразмерных коэффициентов в выражении (6.22), найденные методом наименьших квадратов.

$\Xi$	$\Theta_E$	$\Theta_K$	$\Theta_T$
5.02	1.926	2.362	1.2105

Аппроксимирующая зависимость (6.22) показана графически на рис. 6.23. Видно, что она дает очень хорошее количественное совпадение с исходными

графиками на рис. 6.22. Отчетливо видно нарастание разности фаз  $\Delta\xi$  по мере увеличения времени  $t$  и волнового числа  $k$ .

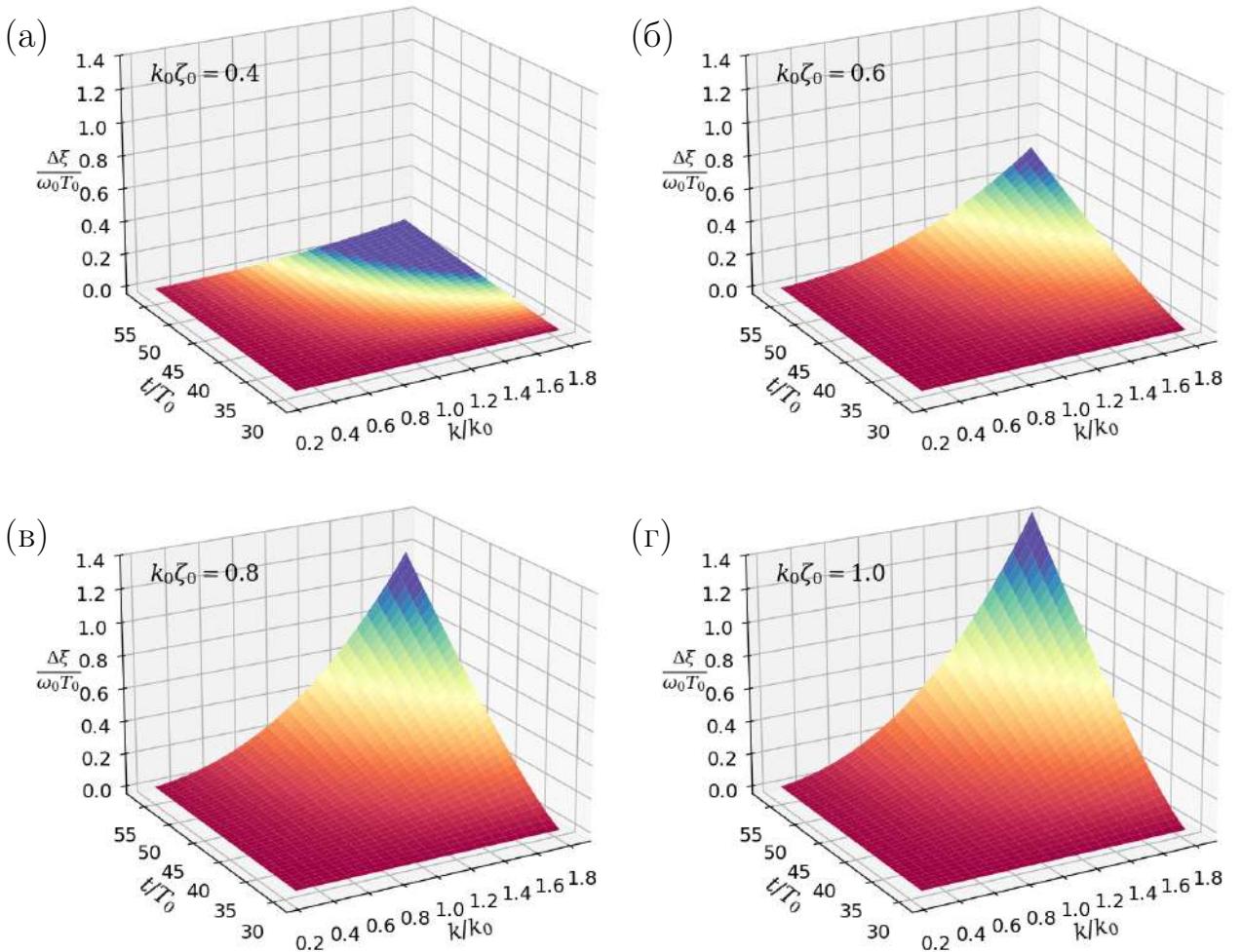


Рис. 6.23. Аппроксимация разности фаз  $\Delta\xi/(\omega_0 T_0)$ , показанной на рис. 6.22, при помощи зависимости (6.22).

Фазовый сдвиг  $\Delta\xi$ , описанный выше, впервые был обнаружен в работе [394] и обозначен как явление фазовой синхронизации (phase locking). Очевидно, что данное явление не учтено в модели турбулентной вязкости, использованной в для замыкания модели квазипотенциального течения ВЕМ. Также нужно предположить, что явление фазовой синхронизации вызвано, прежде всего, присутствием вторичного турбулентного течения, исследованного на рис. 6.18 и 6.19. На следующем этапе исследования требуется найти связь (или, по крайней мере, сделать некоторые предположения) между вто-

ричным турбулентным течением и явлением фазовой синхронизации.

#### 6.4.2. Эмпирическая параметризация эффекта фазовой синхронизации для модели турбулентной вязкости

Согласно (6.14), полную fazу в выражении (6.19) можно записать как

$$\chi(\kappa, \omega, t) = \kappa x - \omega t + \xi(\kappa, t) \quad (6.23)$$

Угловую скорость можно выразить взяв производную от  $\chi$ :

$$\omega(\kappa) = -\frac{\partial \chi(\kappa, \omega, t)}{\partial t} = \omega_\kappa - \frac{\partial \xi(\kappa, t)}{\partial t}, \quad (6.24)$$

где  $\omega_\kappa$  - выражение для дисперсионного соотношения (1.61).

Подстановка (1.61) в (6.24) дает следующее выражение для круговой частоты:

$$\omega(\kappa) = \sqrt{g\kappa \tanh(\kappa h)} - \frac{\partial \xi(\kappa, t)}{\partial t} \quad (6.25)$$

Следует заметить, что эффект фазовой синхронизации не наблюдается в модели квазипотенциального течения ВЕМ, а следовательно, фазовый сдвиг в модели ВЕМ отсутствует, т.е.  $\xi = 0$ . Тогда выражение (6.25) упрощается:

$$\omega_{BEM} = \sqrt{g\kappa \tanh(\kappa h)} \quad (6.26)$$

То есть, с некоторым допущением можно отметить, что дисперсионные свойства волн в модели квазипотенциального течения ВЕМ следуют линейному дисперсионному соотношению.

Напротив, модель двухфазного течения VOF учитывает эффект фазовой синхронизации, а фазовый сдвиг  $\Delta\xi$  в рамках этой модели не исчезает. Учитывая (6.26), можно записать дисперсионное соотношение для поверхностных

волн в модели VOF:

$$\omega_{VOF} = \omega_{BEM} - \left\langle \frac{\partial \Delta \xi}{\partial t} \right\rangle \quad (6.27)$$

Скобки  $\langle \cdot \rangle$  обозначают некоторое осреднение по времени, которое требуется исходя из того, что  $\Delta \xi = \Delta \xi(t)$  (6.22). Вычисление производной дает:

$$\omega_{VOF} = \omega_{BEM} \left\langle 1 + \Theta_T \Xi \left[ \frac{\bullet}{\mathcal{E}} \right]^{\Theta_E} \left[ \frac{\kappa}{\kappa_0} \right]^{\Theta_K} \left[ \frac{t}{T_0} \right]^{\Theta_T - 1} \right\rangle \quad (6.28)$$

Можно заметить, что  $(\Theta_T - 1) \sim 0$ . Это исключает время из рассмотрения:

$$\omega_{VOF} = \omega_{BEM} \left( 1 + \Theta_T \Xi \left[ \frac{\bullet}{\mathcal{E}} \right]^{\Theta_E} \left[ \frac{\kappa}{\kappa_0} \right]^{\Theta_K} \right) \quad (6.29)$$

На рис. 6.24 исследуются дисперсионные соотношения волновых пакетов, вычисленные по результатам численного моделирования в моделях ВЕМ и VOF. Рассмотрен гауссов волновой пакет (6.4) с наибольшим параметром крутизны  $\kappa_0 \zeta_0 = 1.0$ . Дисперсионные соотношения между круговыми частотами и волновыми числами вычислены используя двумерное преобразование Фурье в пространстве координат  $x - t$ .

Из рис. 6.24(а) видно, что модель двухфазного течения VOF показывает значительное отличие дисперсионных свойств волн от дисперсионного соотношения (1.61). Это вызвано присутствием турбулентных компонент течения жидкости, которые не отражены в соотношении (1.61). Еще более важно то, что дисперсионное соотношение (6.29), учитывающее эффект фазовой синхронизации, дает результат очень близкий к модели двухфазного течения VOF. Исходя из этого можно предположить, что внесение поправок в дисперсионные свойства модели ВЕМ, путем исправления модели турбулентной вязкости, должно устраниТЬ погрешности, показанные на рис. 6.15.

Графики на рис. 6.24(б) показывают зависимость фазовой скорости  $c_p = \omega / \kappa$  гармоник спектра от волнового числа  $\kappa$ . Видно, что при отсутствии

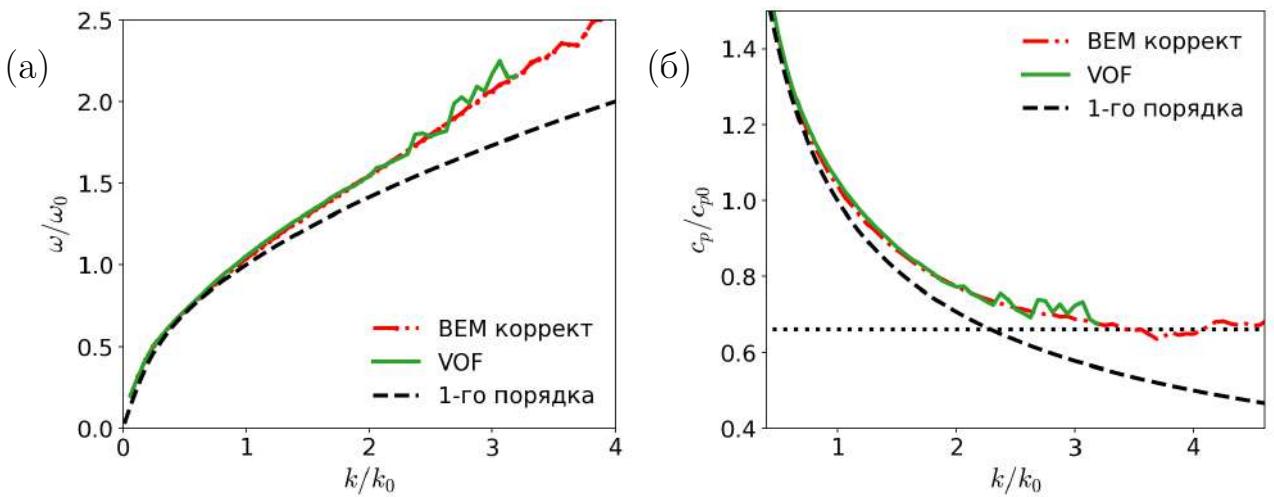


Рис. 6.24. Дисперсионные соотношения, полученные при помощи двумерного преобразования Фурье на основе результатов численного моделирования в моделях VOF и BEM: (а) зависимость круговой частоты  $\omega$  от волнового числа  $\zeta$ ; (б) зависимость фазовой скорости  $c_p = \omega/\zeta$  от волнового числа  $\zeta$ . В дисперсионное соотношение модели BEM внесена поправка согласно (6.29), учитывающая эффект фазовой синхронизации, вызванный наличием турбулентных компонент течения. Рассмотрен гауссов волновой пакет (6.4) с наибольшим параметром крутизны  $\zeta_0\zeta_0 = 1$ . Дисперсионное соотношение 1-го порядка (1.61) дано для сравнения.

турбулентных течений, дисперсионное соотношение 1-го порядка (1.61) указывает на увеличение скорости распространения волны по мере уменьшения волнового числа  $\zeta$  (увеличения длины волны  $\lambda \sim 1/\zeta$ ). С другой стороны, эффект фазовой синхронизации, вызванный присутствием турбулентных течений, приводит к искажению дисперсионного соотношения согласно (6.29). А именно, фазовые скорости  $c_p$  в меньшей степени зависят от волнового числа  $\zeta$ , а на достаточно больших  $\zeta$  и вовсе перестают меняться.

Можно заметить, что полуэмпирическое дисперсионное соотношение (6.29) можно переписать в другом виде:

$$\omega_{VOF} = \omega_{BEM} + \zeta \times \left( \Theta_T \Xi \dot{\mathcal{E}}^{\Theta_E} \right) c_{p0} \left( \frac{\zeta}{\zeta_0} \right)^{\Theta_K - 1} \quad (6.30)$$

Замечая, что  $(\Theta_K - 1) \sim 1$ , можно ввести некоторую среднюю по спектру фазовую скорость  $\bar{c}_p = \overline{c_{p0}(\zeta/\zeta_0)}$ . Тогда полуэмпирическое дисперсионное соот-

ношение запишется в следующей форме:

$$\omega_{VOF} = \omega_{BEM} + \kappa \times \tilde{V},$$

(6.31)

где  $\tilde{V} = \Theta_T \Xi \overline{c_p} \cdot \overset{\bullet}{\Theta}_{\mathcal{E}}$

Дисперсионное соотношение, записанное в форме (6.31), говорит о наличии некоторого постоянного во времени и равномерного по глубине течения со скоростью  $\tilde{V}$  [69, 70]. Величины скорости  $\tilde{V}$  легко вычисляются пользуясь найденными эмпирическими постоянными (см. табл. 6.2) и сведены в таблицу 6.1.

Проведенный анализ показал, что несмотря на сложность и запутанность турбулентных течений, порожденных обрушением поверхностных волн и показанных на рис. 6.18, их обратное влияние на осредненное несущее течение эквивалентно присутствию некоторого постоянного во времени и равномерного по глубине потока со скоростью  $\tilde{V}$ . Таким образом, дополнение модели турбулентной вязкости полуэмпирической параметризацией течения  $\tilde{V}$  (см. таблицу 6.1) позволяет исключить погрешность моделирования формы свободной поверхности, полученную на рис. 6.15.

## 6.5. Выводы по главе

1. Проведены детальные численные и экспериментальные исследования течения жидкости в гидроволновом лотке. Экспериментально доказано, что обрушение гребня происходит в тот момент, когда лагранжева скорость жидкой частицы на гребне волны  $V_{fl}$  сравнивается и начинает превышать скорость самого гребня  $V_{cr}$ .
2. На основании данных исследований установлена величина эмпирической постоянной в кинематическом критерии обрушения волны непосредственно для разработанной численной модели, а именно  $B_x \approx 1$ . Установлена высокая точность кинематического критерия обрушения с учетом откалиброванного коэффициента  $B_x$ . Погрешность определения пространственной координаты начала обрушения волны не превышает 0.55% от длины гидроволнового лотка  $L$ .
3. Детальное исследование процесса диссипации энергии волнового пакета в результате одного или нескольких событий обрушения показало высокую точность разработанной комбинации полуэмпирической модели турбулентной вязкости и кинематического критерия обрушения. Даже в случае диссипации 35% энергии волнового пакета в энергию вторичных турбулентных течений, упрощенная квазипотенциальная модель ВЕМ показала очень близкие результаты по сравнению с точной моделью двухфазного течения VOF.
4. Тем не менее, более подробное рассмотрение результатов моделирования показало наличие ошибки в форме поверхностной волны. Требуется учесть, что при решении задач на практике особую роль играет именно форма волны, которая определяет силовое воздействие на инженерное сооружение.
5. Установлено, что ошибка в форме поверхностной волны вызвана т.н. эффектом фазовой синхронизации (phase locking effect), впервые обнару-

женном в настоящем исследовании. Данный эффект вызван порождением турбулентных течений при обрушении поверхностных волн, которые оказывают обратное влияние на несущее осредненное течение, связанное с поверхностной волной. Эффект фазовой синхронизации вызывает искажение дисперсионных свойств волновой системы и, следовательно, существенным образом сказывается на форме свободной поверхности волны.

6. Предложена полуэмпирическая параметризация эффекта фазовой синхронизации, которая состоит в модификации дисперсионного соотношения путем добавления некоторого среднего течения  $\tilde{V}$ , определяемого эмпирическим путем (см. таблицу 6.1). Таким образом, вся сложность и запутанность вторичных турбулентных течений может быть упрощена до некоторого среднего равномерного по глубине воды течения со скоростью  $\tilde{V}$ . Дополнение модели турбулентной вязкости указанным течением позволяет решить проблему ошибки в форме свободной поверхности.
7. Созданный численный гидроволновой лоток требуется для разработки новых высокоточных алгоритмов автоматизированного управления волнопродуктором (главы 7 и 8 настоящей диссертации).
8. Основные результаты исследований, обсуждаемых в настоящей главе, опубликованы соискателем и его соавторами в ряде международных и российских статей [347, 348, 349, 395, 396], а также обсуждены на международных конференциях [350, 351]. В том числе, разработанный гидроволновой лоток и модель турбулентной вязкости были использованы для решения задачи о выплескивании воды на сооружение береговой защиты [395, 396].

## ГЛАВА 7

# РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ ВОЛНОПРОДУКТОРОМ ДЛЯ ГИДРОВОЛНОВЫХ ЛОТКОВ

## 7.1. Генерация волн при помощи волнопродуктора

Лабораторные и численные исследования бегущих поверхностных волн на воде, а также их взаимодействия с морскими и прибрежными сооружениями, требуют генерации волновых пакетов наперед заданной формы. Для этого используется специальный гидравлический агрегат, называемый волнопродуктором; см. фотографии на рис. 7.1. Движение волнопродуктора с высокой точностью контролируется компьютерными системами, обеспечивающими нужное отклонение поверхности волнопродуктора в зависимости от времени  $\Theta(t)$ ; см рис. 6.1. Основная проблема состоит в пересчете формы волны  $\eta(x = 0, t)$ , т.е. возвышения свободной поверхности вблизи волнопродуктора в координате  $x = 0$ , в функцию отклонения поверхности волнопродуктора  $\Theta(t)$ .



Рис. 7.1. Фотографии лабораторного шарнирно закрепленного волнопродуктора: (а) большой гидроволновой лоток Тель-Авивского университета (Израиль), в котором проводились экспериментальные исследования доктором; (б) волнопродуктор, изготовленный компанией Edinburgh Designs (Англия).

Наиболее простая линейная теория волнопродуктора, применимая для

волн исчезающей крутизны  $\epsilon \rightarrow 0$  (1.57), т.е. для волн небольшой высоты, была использована в главе 6. В рамках линейной теории волнопродуктора используется аналитическое выражение для передаточной функции  $\Lambda(\omega)$ , величина которой зависит от круговой частоты гармоники спектра  $\omega$ ; см. уравнение (6.8). Выражение для пересчета формы волны  $\eta(x = 0, t)$  в функцию движения поверхности волнопродуктора  $\Theta(t)$  принимает следующий вид (6.7):

$$\Theta(\omega, t) \sim \Lambda(\omega) \eta(\omega, x = 0, t) \quad (7.1)$$

Однако волны малой высоты (малой крутизны  $\epsilon$ ) не вызывают больших силовых нагрузок на инженерные сооружения, а следовательно, они малоинтересны на практике. При генерации волн большой высоты (крутизна волны порядка  $\epsilon \sim 0.2...0.25$ ) линейная теория волнопродуктора (7.1) приводит к недопустимо большим погрешностям, а следовательно, теряет свою применимость. Одни из первых разработок слабо-нелинейной теории волнопродуктора, применимой для волн большой крутизны, можно найти в работах [306, 307, 308].

Было показано, что наибольшую проблему при генерации волн большой крутизны составляют так называемые “паразитные волны”, которые неконтролируемо формируются в связи с нелинейными свойствами уравнений гидродинамики (1.54) и (1.55) (нелинейные слагаемые отмечены символами  $I$  и  $II$ ). Предотвращение генерации паразитных волн оказалось сложной задачей, которая в полной мере не решена и сегодня.

Для демонстрации порождения “паразитных волн” можно рассмотреть генерацию монохроматической свободной волны  $\eta(x, t) = A_0^{(1)} \cos(\kappa_0 x - \omega_0 t)$ . Для этого используется простое гармоническое движение волнопродуктора поршневого типа  $X(t) = Z_0^{(1)} \cos(\omega_0 t)$ , где действительная амплитуда  $Z_0^{(1)}$  находится при помощи линейной теории (7.1). Параметры генерируемой волны выбраны следующим образом: период  $T_0 = 3$  с; круговая ча-

стота  $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2.094$  рад/с; длина волны  $\lambda_0 = 7.5$  м; волновое число  $\kappa_0 = 2\pi/\lambda_0 = 0.838$  рад/м; крутизна волны  $\epsilon = \kappa_0 A_0^{(1)} = 0.1$ ; амплитуда волны  $A_0^{(1)} = 0.119$  м; безразмерная глубина воды  $\kappa_0 h = 0.2\pi$ ; средняя глубина воды  $h = 0.7498$  м.

Генерирование волны с указанными параметрами затруднено в лабораторных условиях. Исходя из этого, используется численный волновой лоток, показанный на рис. 3.8. Рис. 7.2(а) показывает форму свободной поверхности воды  $\eta(x = \text{const}, t)$ , полученную в трех координатах, а именно  $x \approx 2.1$  м,  $x \approx 6$  м и  $x \approx 9.3$  м. Видно, что волна значительно отличается от ожидаемой симметричной монохроматической формы. Более того, измерения в разных координатах  $x$  приводят к разной форме волны.

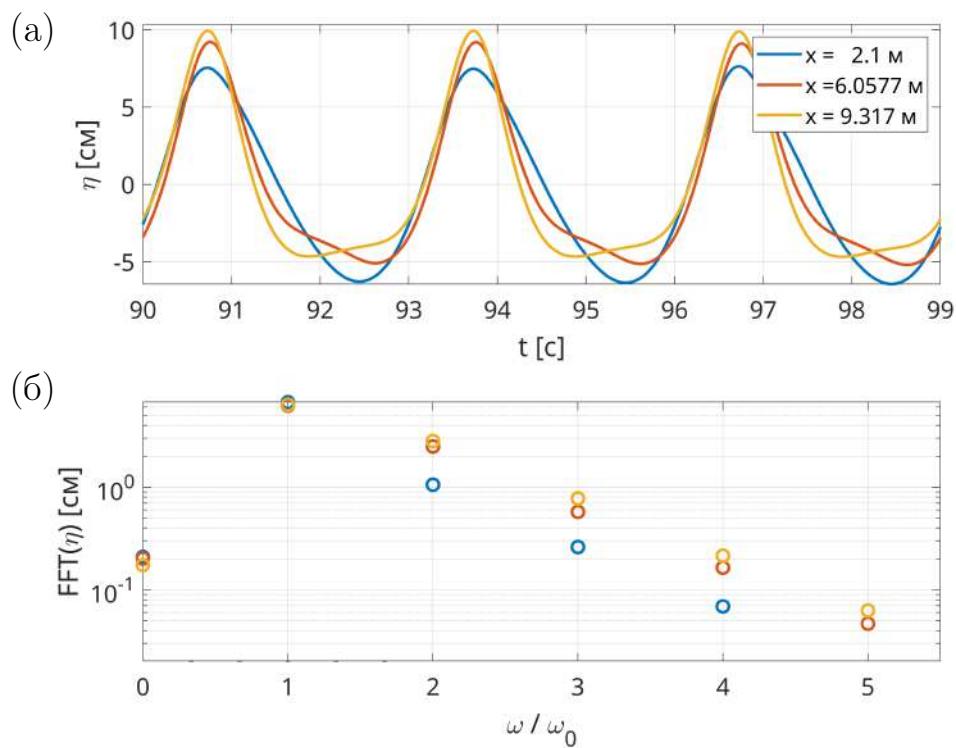


Рис. 7.2. Результаты моделирования процесса генерации монохроматической свободной волны в численном гидролиновом лотке: (а) форма свободной поверхности  $\eta = \eta(t)$ , измеренная в трех координатах  $x$ ; (б) спектр формы свободной поверхности волны, полученный при помощи быстрого преобразования Фурье  $FFT(\eta)$ .

Пользуясь быстрым преобразованием Фурье  $FFT(\eta)$  можно вычислить дискретный спектр формы свободной поверхности в различных координа-

так, как показано на рис. 7.2(б). На частоте  $\omega/\omega_0 = 1$  дискретного спектра видна одна гармоника с мало меняющейся амплитудой, что соответствует монохроматической свободной волне. На частотах  $\omega/\omega_0 = 2, 3, \dots$  возникают связанные волны, неизбежно сопровождающие свободную волну в связи с нелинейными свойствами уравнений (1.54) и (1.55). Однако в рассматриваемом случае, амплитуда связанных волн значительно меняется от координаты к координате, что не должно происходить. Этим объясняется неправильная несимметричная и непостоянная форма волны на рис. 7.2(а).

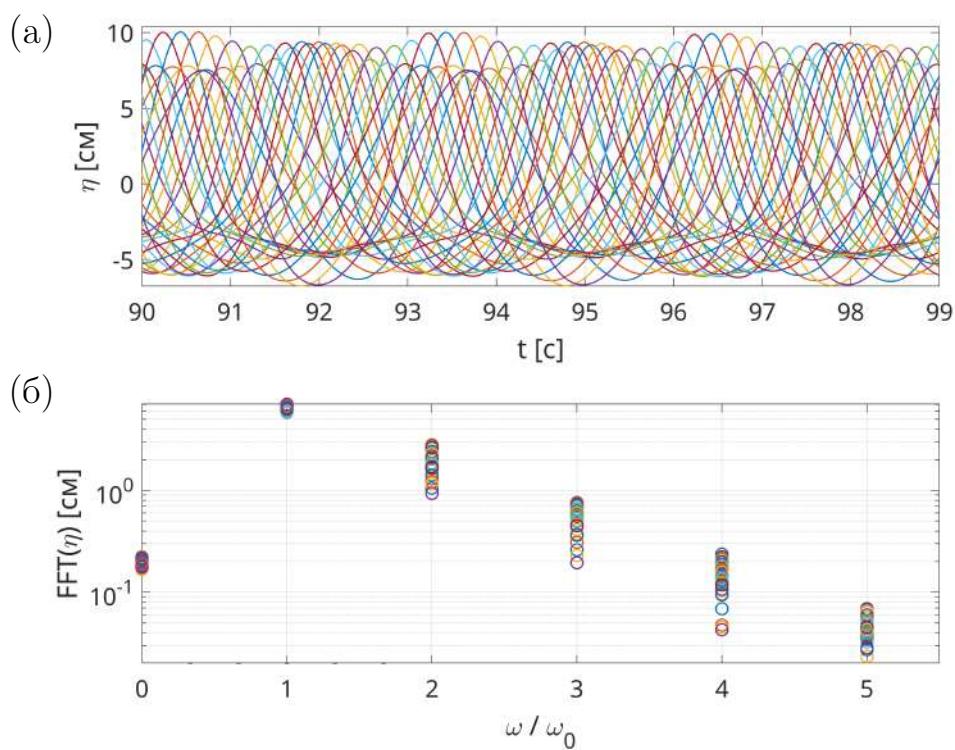


Рис. 7.3. То же, что и на рис. 7.2, для измерений в 32 координатах  $x$ .

Рисунок 7.3 показывает как меняется форма волны и соответствующий ей спектр, измеренные в 32 координатах  $x$ . Все измерения отличаются друг от друга приводя к неправильной форме волны. Очевидно, что генерирование более сложного волнового пакета, содержащего множество частотных гармоник, приведет к непредсказуемости формы волны в нужной координате  $x$ .

Большее понимание дает исследование пространственной формы свободной поверхности воды, которая представлена на рис. 7.4(а), а также соот-

ветствующего ей дискретного спектра (б). Видно, что свободная поверхность также крайне несимметрична и далека от требуемого монохроматического вида. На дискретном спектре виден вклад свободной волны ( $\omega_0, k_0$ ) и связанный волны ( $2\omega_0, 2k_0$ ), возникающей на двойной круговой частоте и двойном волновом числе. Однако кроме этого, отчетливо проявляется еще одна волна, также возникающая на частоте  $2\omega_0$ , но на другом волновом числе  $k_{par}$ . Именно такие нежелательные волны носят название “паразитных”, а их подавление требует разработки сложных нелинейных алгоритмов управления волнопродукторами.

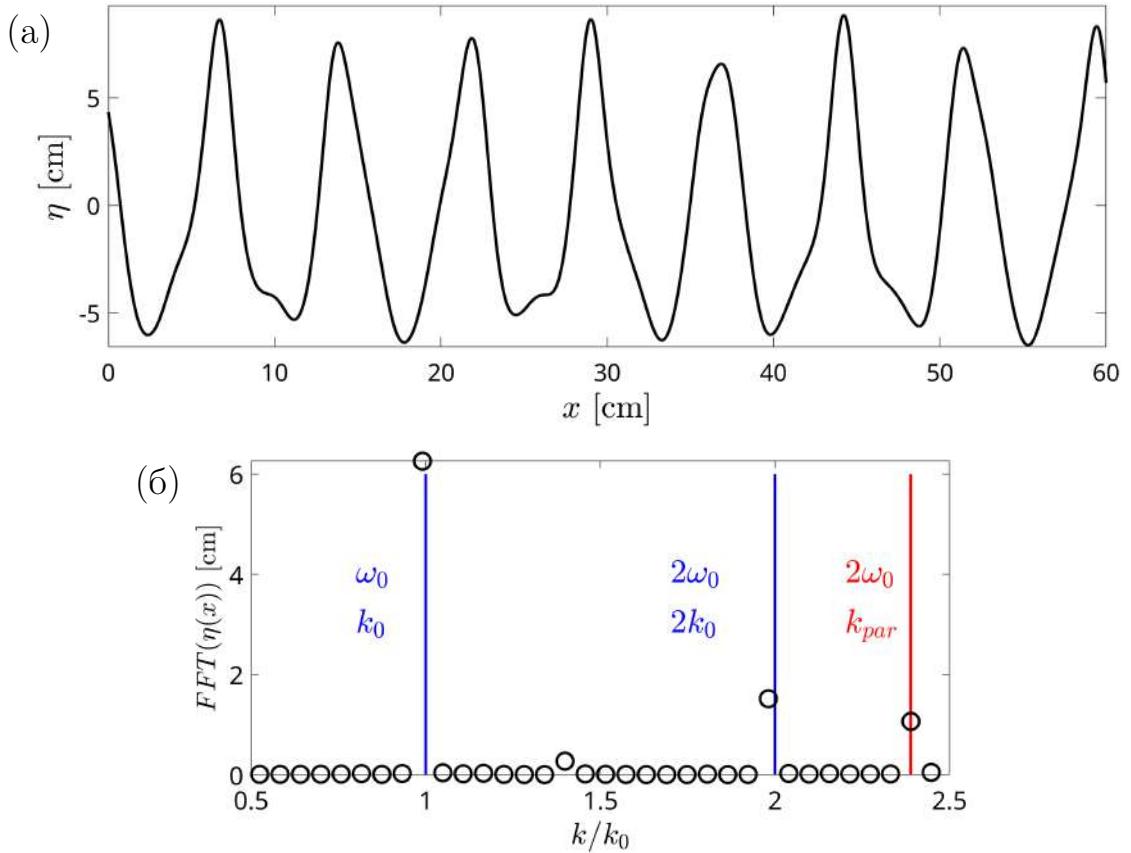


Рис. 7.4. Результаты моделирования процесса генерации монохроматической свободной волны в численном гидроволновом лотке: (а) пространственная форма свободной поверхности  $\eta = \eta(x)$  в фиксированный момент времени; (б) спектр формы свободной поверхности, полученный при помощи быстрого преобразования Фурье  $FFT(\eta)$ .

Одна из наиболее полных слабо-нелинейных теорий волнопродуктора была предложена Шаффером [309, 310]. Данная теория была получена методом разложения по малому параметру  $\epsilon$  [72, 73] отбрасывая члены 3-го и более

высоких порядков ( $\epsilon^3$  и выше), см. разложения (1.63) и (1.64). В связи с этим, теорию Шаффера принято называть теорией 2-го порядка нелинейности. Основная идея состоит в воспроизведении полей скорости, связанных с волной, при помощи перемещения поверхности волнопродуктора по сложному алгоритму. В качестве примера, на рис. 7.5 показаны поля скоростей 1-го и 2-го порядков нелинейности по  $\epsilon$  под монохроматической свободной волной, которые требуется получить путем перемещения поверхности волнопродуктора.

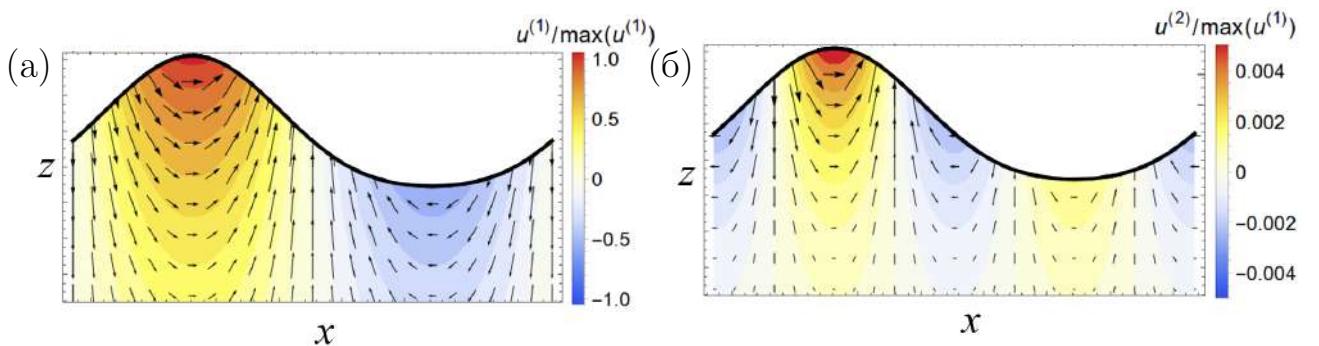


Рис. 7.5. Мгновенные поля скоростей, вызванные распространением свободной монохроматической волны в направлении слева направо: (а) поле скорости 1-го порядка нелинейности по  $\epsilon$ ; (б) поле скорости 2-го порядка нелинейности по  $\epsilon$ .

Несмотря на то, что теория Шаффера показала достаточно высокую точность генерации ряда нелинейных волновых пакетов, в некоторых случаях она не позволяет полностью исключить возникновение паразитных волн. Это, в первую очередь, объясняется ограниченностью точности нелинейными эффектами 2-го порядка и пренебрежением эффектов более высокого порядка нелинейности [311].

Кроме прочего, теория Шаффера оказалась сложной для практического применения. Ряд исследователей предложили альтернативные итерационные подходы, исключающие сложные теоретические построения, но при этом требующие больших трудозатрат в лаборатории или в численных расчетах. К упрощенным итерационным подходам можно отнести метод разделения гармоник (harmonics separation technique) [397, 398, 399], а также альтернативный итерационный метод [392, 393, 400].

Ряд исследователей предлагали усовершенствования механических и электронных компонент волнопродуктора с целью повышения точности генерации волн. В частности, положительные результаты дало дополнение системы обратной связью по крутящему моменту, возникающему в механизмах волнопродуктора (force-feedback method) [401, 402, 403, 404, 405]. Часть исследований было посвящено встраиванию слабо-нелинейных методов генерации поверхностных волн в различные численные алгоритмы, в том числе в метод HOSM (Higher-Order Spectral Method) [406, 407, 408]. Сравнительный анализ различных методов генерации волн проведен в работе [312].

Все сложности генерации поверхностных волн большой крутизны отчетливо проявились в рамках настоящего диссертационного исследования. Для решения возникших сложностей предлагается альтернативный аналитический слабо-нелинейный метод генерации волн, позволяющий расширить точность теории Шаффера до 3-го и даже более высоких порядков нелинейности. Более того, предложенный метод позволяет существенно упростить теоретические построения за счет использования в качестве основы хорошо разработанных упрощенных моделей слабо-нелинейных поверхностных волн, таких как уравнение Захарова или нелинейное уравнение Шредингера (далее по тексту). Полученный таким образом алгоритм автоматизированного управления волнопродуктором позволяет решить ряд важных практических проблем генерации поверхностных волн конечной амплитуды.

## 7.2. Алгоритм на основе уравнения Захарова

В основе данного алгоритма лежит слабо-нелинейное уравнение Захарова (1.68) для спектра комплексных амплитуд свободных волн  $A^{(1)}$ ; см. уравнения (1.60) и (1.66) [75, 77, 78, 79, 80, 81, 82]. Также требуется учесть, в общем случае, существование связанных волн 2-го, 3-го и более высоких порядков по  $\epsilon$ ; см. разложения (1.63) и (1.64). В рамках настоящего раздела, рассмат-

риваются только связанные волны 2-го порядка по  $\epsilon$ , задаваемые уравнением (1.71).

Форма бегущей волны, получаемая из решения уравнения Захарова, включает в себя вклад свободных волн 1-го порядка  $\eta^{(1)}(x, t)$ , а также вклад связанных волн 2-го порядка  $\eta^{(2)}(x, t)$ :

$$\begin{aligned}\eta^{(1)}(x, t) &= \frac{1}{2}A^{(1)}e^{i(\kappa^{(1)}x - \omega^{(1)}t)} + \text{к.с.} \\ \eta^{(2)}(x, t) &= \frac{1}{2}A^{(2)}e^{i(\kappa^{(2)}x - \omega^{(2)}t)} + \text{к.с.}\end{aligned}\tag{7.2}$$

Здесь спектр комплексных амплитуд  $A^{(1)}$  известен и наперед задан, а волновые числа  $\kappa^{(1)}$  связаны с круговыми частотами  $\omega^{(1)}$  линейным дисперсионным соотношением (1.61); “к.с.” обозначает комплексное сопряжение. В то же время, спектр комплексных амплитуд связанных волн 2-го порядка  $A^{(2)}$ , а также их волновые числа  $\kappa^{(2)}$  и круговые частоты  $\omega^{(2)}$ , заранее неизвестны и определяются уравнением (1.71).

Для дискретного спектра свободных волн 1-го порядка  $A^{(1)}(\omega^{(1)}, \kappa^{(1)})$  требуется рассмотреть все возможные пары гармоник. Для конкретизации, рассматриваются гармоники с номерами  $m$  и  $n$ , т.е.  $A_m^{(1)}(\omega_m^{(1)}, \kappa_m^{(1)})$  и  $A_n^{(1)}(\omega_n^{(1)}, \kappa_n^{(1)})$ . Тогда, согласно [79, 80, 82], для каждой пары гармоник  $m$  и  $n$  образуются три связанных волны 2-го порядка, определяемые решением уравнения (1.71):

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1^{(2)} = \omega_m^{(1)} + \omega_2^{(1)} \\ \kappa_1^{(2)} = \kappa_m^{(1)} + \kappa_n^{(1)} \\ A_1^{(2)} = -\pi \sqrt{\frac{2g\sqrt{g\kappa_1^{(2)}\tanh(\kappa_1^{(2)}h)}}{\omega_m^{(1)}\omega_n^{(1)}}} \times \\ \quad \times \frac{V^{<1>} \left( \sqrt{g\kappa_1^{(2)}\tanh(\kappa_1^{(2)}h)}, \omega_m^{(1)}, \omega_n^{(1)}, \kappa_1^{(2)}, \kappa_m^{(1)}, \kappa_n^{(1)} \right)}{\sqrt{g\kappa_1^{(2)}\tanh(\kappa_1^{(2)}h)} - \omega_m^{(1)} - \omega_n^{(1)}} \times A_m^{(1)} A_n^{(1)} \end{array} \right. \quad (7.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_2^{(2)} = -\omega_m^{(1)} + \omega_2^{(1)} \\ \kappa_2^{(2)} = -\kappa_m^{(1)} + \kappa_n^{(1)} \\ A_2^{(2)} = -\pi \sqrt{\frac{2g\sqrt{g\kappa_2^{(2)}\tanh(\kappa_2^{(2)}h)}}{\omega_m^{(1)}\omega_n^{(1)}}} \times \\ \quad \times \frac{V^{<2>} \left( \sqrt{g\kappa_2^{(2)}\tanh(\kappa_2^{(2)}h)}, \omega_m^{(1)}, \omega_n^{(1)}, \kappa_2^{(2)}, \kappa_m^{(1)}, \kappa_n^{(1)} \right)}{\sqrt{g\kappa_2^{(2)}\tanh(\kappa_2^{(2)}h)} + \omega_m^{(1)} - \omega_n^{(1)}} \times A_m^{(1)*} A_n^{(1)} \end{array} \right. \quad (7.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_3^{(2)} = -\omega_m^{(1)} - \omega_2^{(1)} \\ \kappa_3^{(2)} = -\kappa_m^{(1)} - \kappa_n^{(1)} \\ A_3^{(2)} = -\pi \sqrt{\frac{2g\sqrt{g\kappa_3^{(2)}\tanh(\kappa_3^{(2)}h)}}{\omega_m^{(1)}\omega_n^{(1)}}} \times \\ \quad \times \frac{V^{<3>} \left( \sqrt{g\kappa_3^{(2)}\tanh(\kappa_3^{(2)}h)}, \omega_m^{(1)}, \omega_n^{(1)}, \kappa_3^{(2)}, \kappa_m^{(1)}, \kappa_n^{(1)} \right)}{\sqrt{g\kappa_3^{(2)}\tanh(\kappa_3^{(2)}h)} + \omega_m^{(1)} + \omega_n^{(1)}} \times A_m^{(1)*} A_n^{(1)*} \end{array} \right. \quad (7.5)$$

В уравнениях  $V^{<1>}$ ,  $V^{<2>}$  и  $V^{<3>}$  - так называемые ядра теории Захарова, выражения которых приведены в приложении 1, уравнения (1.7);  $g$  - ускорение свободного падения;  $h$  - средняя глубина воды;  $*$  - комплексное сопряжение. Следует подчеркнуть, что вся сложность задачи сконцентрирована в ядрах (1.7), выражения которых уже найдены в рамках теории Захарова. Это значительно упрощает дальнейшие построения и является главной причиной применения рассматриваемого подхода.

Зная решение для свободных и связанных поверхностных волн (7.2), можно определить профиль скорости бегущей волны в поперечном сечении  $x = 0$ , где расположен волнопродуктор. Для свободной волны  $\eta^{(1)}(x, t)$  профиль го-

ризонтальной компоненты скорости запишется следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x}(x, z, t) = -\eta^{(1)} \kappa^{(1)} \cosh(\kappa^{(1)}(h + z))$$

$$\kappa^{(1)} = \frac{g \kappa^{(1)}}{\omega^{(1)} \cosh(\kappa^{(1)} h)}$$
(7.6)

Выражение для горизонтальной компоненты скорости связанной волны:

$$\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x}(x, z, t) = -\eta^{(2)} \kappa^{(2)} \cosh(\kappa^{(2)}(h + z))$$

$$\kappa^{(2)} = \frac{3\omega^{(2)}}{\sinh(\kappa^{(2)} h) (2 + \cosh(\kappa^{(2)} h))}$$
(7.7)

Генерация найденной слабо-нелинейной волны требует воспроизведения компонент скорости свободной (7.6) и связанной волны (7.7) путем перемещения поверхности волнопродуктора (рис. 6.1 и 7.1) по специальным образом построенной закономерности. Нахождение данной закономерности требует рассмотрения нелинейного граничного условия на движущейся поверхности волнопродуктора.

### 7.2.1. Нелинейное граничное условие на волнопродукторе

Существует несколько типов волнопродукторов, широко распространенных в лабораторных гидроволновых лотках и бассейнах. Схематично они показаны на рис. 7.6. Подобное геометрическое представление позволяет гибко варьировать конфигурацию и, тем самым, охватить почти все имеющиеся типы волнопродукторов. Например, выбор величины  $L \rightarrow \infty$  позволяет описать волнопродуктор поршневого типа. С другой стороны  $L = 0$  дает волнопродуктор шарнирно закрепленный на дне лотка. Выбор  $-h < L < 0$  приводит к шарнирному закреплению выше дна лотка.

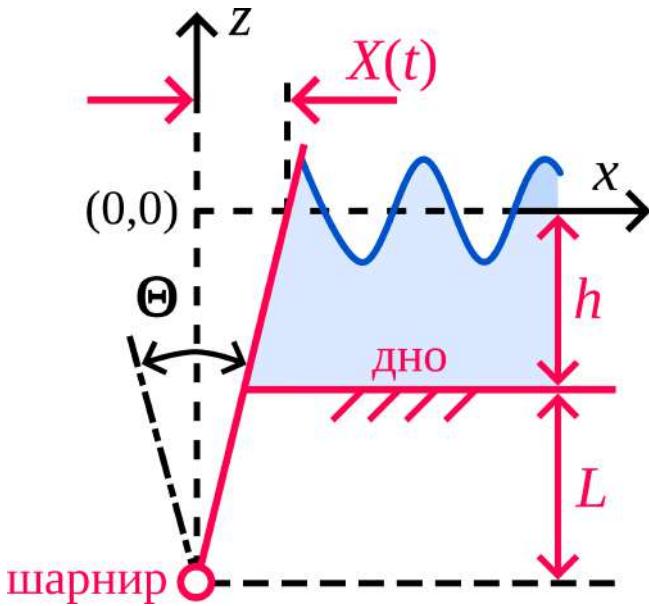


Рис. 7.6. Принципиальная схема волнопродуктора:  $h$  - средняя глубина воды;  $L$  - расположение шарнира;  $X(t)$  - смещение поверхности волнопродуктора на уровне свободной поверхности воды  $z = 0$ .  
Геометрическое положение точек на поверхности волнопродуктора определяется функцией  $F$ :

$$F(x, z, t) = x - X(t)f(z) = 0 \quad (7.9)$$

Тогда условие непроницаемости на поверхности волноподуктора в стандартной форме запишется [69, 309]:

$$\left( \frac{\partial F}{\partial t} + V \cdot \nabla F \right)_{F=0} = 0 \quad (7.10)$$

Подстановка вектора скорости  $V = \{V_x, V_z\}$  для плоской задачи в (7.10), а также подстановка определения функции  $F$  (7.9) приводит к следующему нелинейному граничному условию:

$$\left( V_x - V_z X(t) \frac{df(z)}{dz} - U(t)f(z) \right)_{x=X(t)} = 0, \quad (7.11)$$

где  $U(t) = dX/dt$  - мгновенная скорость поверхности волнопродуктора на

Вместо угловой координаты  $\Theta(t)$ , использованной выше по тексту, удобно ввести другую параметризацию горизонтального смещения точек на поверхности волнопродуктора:  $x = X(t)f(z)$ , где  $f(z)$  - так называемая функция формы. В соответствии с рис. рис. 7.6, функция формы задается следующим выражением:

$$f(z) = 1 + \frac{z}{h + L} \quad (7.8)$$

уровне воды, т.е. для  $z = 0$ . Нелинейность уравнения (7.11) обуславливается, прежде всего, тем, что оно задано на подвижной поверхности  $x = X(t)$ . Для дальнейшего анализа требуется обойти указанные сложности путем разложения уравнения (7.11) в ряд Тейлора вокруг  $x = 0$ . Пренебрегая слагаемыми 3-го и более высоких порядков, можно записать:

$$\left( V_x - V_z X \frac{df(z)}{dz} - U f(z) \right)_{x=0} + X f(z) \frac{\partial}{\partial x} \left( V_x - V_z X \frac{df(z)}{dz} - U f(z) \right)_{x=0} = 0 \quad (7.12)$$

В отличие от нелинейного уравнения (7.11), полученное граничное условие (7.12) пренебрегает частью эффектов и, поэтому, называется слабонелинейным.

Подстановка определения скорости для потенциального течения  $V = -\nabla\varphi$  дает:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial z} X \frac{df(z)}{dz} - U f(z) - X f(z) \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + X^2 f(z) \frac{df(z)}{dz} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} \right)_{x=0} \quad (7.13)$$

В левой части полученного уравнения располагается профиль скорости бегущей волны в сечении волнопродуктора ( $x = 0$ ), состоящий из свободных (7.6) и связанных волн 2-го порядка по  $\epsilon$  (7.7). Задача состоит в том, чтобы подобрать такой закон движения волнопродуктора  $U(t) = dX/dt$ , чтобы равенство (7.13) выполнилось.

Решение уравнения (7.13) возможно методом разложения по малому параметру  $\epsilon$  (1.57). Для этого, в дополнение к разложениям (1.63) и (1.64), вводятся следующие разложения:

$$X = \epsilon X^{(1)} + \epsilon^2 X^{(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (7.14)$$

$$U = \epsilon U^{(1)} + \epsilon^2 U^{(2)} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (7.15)$$

Подстановка разложений (1.63), (1.64), (7.14) и (7.15), ограничиваясь слага-

емыми 2-го порядка по  $\epsilon$ , позволяет разбить уравнение (7.13) на три более простых линейных уравнения, решаемых последовательно:

$$U^{(1)}(t)f(z) = -\left. \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (7.16)$$

$$U^{(2)}(t)f(z) = -\left. \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (7.17)$$

$$U_d^{(2)}(t)f(z) = -\left. \frac{\partial \varphi_d^{(2)}}{\partial x} \right|_{x=0} + X^{(1)} \left( \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} - f \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x^2} \right)_{x=0} \quad (7.18)$$

### 7.2.2. Решение 1-го порядка нелинейности

Решение на 1-ом порядке по  $\epsilon$  получается подстановкой профиля скорости свободной волны (7.6) в уравнение (7.16). Для выделенной гармоники свободных волн с амплитудой  $A^{(1)}$ , частотой  $\omega^{(1)}$  и волновым числом  $\kappa^{(1)}$ , указанная подстановка приводит к выражению:

$$\underbrace{U^{(1)}(t)f(z)}_{\text{волнопродуктор}} = \underbrace{\frac{1}{2} \kappa^{(1)} \cosh(\kappa^{(1)}(h+z)) (A^{(1)} e^{-i\omega^{(1)} t})}_{\text{свободная бегущая волна}} + \sum_{\infty} \text{EM} + \text{к.с.}, \quad (7.19)$$

где  $\sum_{\infty} \text{EM}$  - бесконечный ряд стоячих волн (“Evanescent Modes”), наблюдаемых в непосредственной близости от волнопродуктора и экспоненциально затухающих по мере удаления от последнего. Согласно [69], для координат  $x > 3h$  стоячие волны фактически полностью исчезают. Коэффициент  $\kappa^{(1)}$  задан в выражении (7.6).

Исходя из того, что стоячие волны не вносят вклад в форму свободной поверхности даже на небольшом удалении от волнопродуктора, ими можно пренебречь и исключить из уравнения (7.19) пользуясь свойством их ортогональности бегущей волне. Окончательное решение для движения волнопродуктора на первом порядке по  $\epsilon$  запишется в стандартной форме [69]:

$$U^{(1)}(t) = \frac{1}{2} \Lambda^{(1)} (\kappa^{(1)}, \kappa^{(1)}) A^{(1)} e^{-i\omega^{(1)} t} + \text{к.с.}, \quad (7.20)$$

где  $\Lambda^{(1)} \left( \kappa^{(1)}, \zeta^{(1)} \right)$  - передаточная функция для свободных волн 1-го порядка по  $\epsilon$ ;  $A^{(1)}$  - известная амплитуда выделенной гармоники свободных волн.

В отличие от классической передаточной функции 1-го порядка по  $\epsilon$  (6.8), можно получить универсальное выражение для передаточной функции любого  $n$ -го порядка, что будет использовано в дальнейшем:

$$\begin{aligned} \Lambda^{(n)} \left( \kappa^{(n)}, \zeta^{(n)} \right) &= \frac{\kappa^{(n)} \int_{-h}^0 \cosh^2 \left( \zeta^{(n)} (h+z) \right) dz}{\int_{-h}^0 f(z) \cosh \left( \zeta^{(n)} (h+z) \right) dz} = \\ &= \frac{\kappa^{(n)} \zeta^{(n)} (h+L) \left( \sinh \left( 2\zeta^{(n)} h \right) + 2\zeta^{(n)} h \right)}{4 \left( 1 - \cosh \left( \zeta^{(n)} h \right) + \zeta^{(n)} (h+L) \sinh \left( \zeta^{(n)} h \right) \right)} \end{aligned} \quad (7.21)$$

Коэффициент  $\kappa^{(n)}$  задается выражениями (7.6) или (7.7), в зависимости от требуемого порядка  $n$ .

### 7.2.3. Решение 2-го порядка нелинейности

На 2-м порядке по  $\epsilon$  требуется учесть вклад связанных волн путем подстановки профиля скорости (7.7) в уравнение (7.17). Аналогично предыдущему разделу, решение полученной задачи можно записать в следующем виде:

$$U^{(2)}(t) = \frac{1}{2} \Lambda^{(2)} \left( \kappa^{(2)}, \zeta^{(2)} \right) A^{(2)} e^{-i\omega^{(2)} t} + \text{к.с.}, \quad (7.22)$$

Амплитуды связанных волн  $A^{(2)}$ , а также соответствующие частоты  $\omega^{(2)}$ , являются решением уравнения Захарова и даны выше по тексту, см. уравнения (7.3), (7.4), (7.5). Универсальное выражение для передаточной функции  $\Lambda^{(2)} \left( \kappa^{(2)}, \zeta^{(2)} \right)$  также приведено выше по тексту, см. уравнение (7.21).

Помимо связанных волн, требуется учесть вклад уравнения (7.18) в общее решение задачи. В том случае, если движение волнопродуктора на этом порядке будет отсутствовать, т.е. если положить  $U_d^{(2)} = 0$ , то уравнение (7.18)

преобразуется к следующему:

$$\left. \frac{\partial \varphi_d^{(2)}}{\partial x} \right|_{x=0} = X^{(1)} \left( \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} - f(z) \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x^2} \right)_{x=0} \quad (7.23)$$

Подстановка решения на 1-ом порядке (7.2), (7.6) и (7.20) в полученное уравнение приводит к:

$$\left. \frac{\partial \varphi_d^{(2)}}{\partial x} \right|_{x=0} = \underbrace{\kappa_d P(z) \left| A^{(1)} \right|^2}_{F=0} - \frac{1}{2} \kappa_d P(z) \left( A^{(1)} \right)^2 e^{-i2\omega^{(1)}t} + \text{к.с.} \quad (7.24)$$

Здесь  $F$  - некоторое среднее течение, которое исключается из рассмотрения в связи с невозможностью его компенсации движением волнопродуктора. Функция  $P(z)$  и коэффициент  $\kappa_d$  даны следующими выражениями:

$$P(z) = \sinh \left( \kappa^{(1)} (h + z) \right) + \kappa^{(1)} (h + L + z) \cosh \left( \kappa^{(1)} (h + z) \right)$$

$$\kappa_d = \Lambda^{(1)} \frac{g \kappa^{(1)}}{2 (h + L) \omega^{(1)} \cosh \left( \kappa^{(1)} h \right)} \quad (7.25)$$

Второе слагаемое в выражении (7.24) приводит к формированию “паразитных” волн, которые требуется исключить ненулевым движением волнопродуктора  $U_d^{(2)} = dX_d^{(2)}/dt$ . Добавляя в рассмотрение бесконечный ряд стоячих волн (“Evanescent Modes”) аналогично разделу 7.2.2., можно получить решение для  $U_d^{(2)}$  в виде (7.26). Здесь вводится волновое число  $\kappa_{2\omega}$ , получаемое численным решением дисперсионного соотношения (1.61) относительно круговой частоты  $2\omega^{(1)}$ ; то есть, из численного решения следующего уравнения:

$$\left( 2\omega^{(1)} \right)^2 = g \kappa_{2\omega} \tanh (\kappa_{2\omega} h)$$

$$\begin{aligned}
U_d^{(2)} &= -\kappa_d \kappa_{2\omega}^2 (h + L) \times G \times \frac{1}{2} \left( A^{(1)} \right)^2 e^{-i2\omega^{(1)}t} + \text{к.с.} \\
G &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \cosh(\kappa_{2\omega} h) + \kappa_{2\omega} (h + L) \sinh(\kappa_{2\omega} h)} \times \\
&\times \left\{ \frac{\kappa_{2\omega}}{\left( \kappa^{(1)} - \kappa_{2\omega} \right)^2} - \frac{\kappa_{2\omega}}{\left( \kappa^{(1)} + \kappa_{2\omega} \right)^2} + \frac{\kappa_{2\omega} \cosh \left( \left( \kappa^{(1)} + \kappa_{2\omega} \right) h \right)}{\left( \kappa^{(1)} + \kappa_{2\omega} \right)^2} + \right. \\
&+ \frac{\kappa^{(1)} (h + L) \sinh \left( \left( \kappa^{(1)} + \kappa_{2\omega} \right) h \right)}{\kappa^{(1)} + \kappa_{2\omega}} + \\
&+ \frac{\kappa^{(1)} \left( \kappa^{(1)} - \kappa_{2\omega} \right) (h + L) \sinh \left( \left( \kappa^{(1)} - \kappa_{2\omega} \right) h \right)}{\left( \kappa^{(1)} - \kappa_{2\omega} \right)^2} - \\
&- \left. \frac{\kappa_{2\omega} \cosh \left( \left( \kappa^{(1)} - \kappa_{2\omega} \right) h \right)}{\left( \kappa^{(1)} - \kappa_{2\omega} \right)^2} \right\} \\
&\quad (7.26)
\end{aligned}$$

#### 7.2.4. Случай расположения шарнира выше дна лотка ( $L < 0$ )

Особый случай составляет расположение шарнира волнопродуктора выше дна гидроволнового лотка. Этот случай описывается отрицательной величиной  $L < 0$ , как показано на рис. 7.6, а также кусочно-гладкой функцией формы  $f(z)$ :

$$f(z) = \begin{cases} 1 + \frac{z}{h + L}, & z > -h - L \\ 0, & z \leq -h - L \end{cases} \quad (7.27)$$

Выполняя аналогичные вычисления можно заметить, что передаточная функция  $n$ -го порядка будет несколько отличаться от (7.21):

$$\Lambda^{(n)} \left( \kappa^{(n)}, \kappa^{(n)} \right) = \frac{\kappa^{(n)} \kappa^{(n)} (h + L) \left( \sinh \left( 2\kappa^{(n)} h \right) + 2\kappa^{(n)} h \right)}{4 \left( \cosh \left( \kappa^{(n)} L \right) - \cosh \left( \kappa^{(n)} h \right) + \kappa^{(n)} (h + L) \sinh \left( \kappa^{(n)} h \right) \right)} \quad (7.28)$$

Также будет отличаться функция профиля скорости  $P(z)$  (7.25):

$$P(z) = \begin{cases} \sinh(\kappa^{(1)}(h+z)) + \kappa^{(1)}(h+L+z)\cosh(\kappa^{(1)}(h+z)), & z > -h-L \\ 0, & z \leq -h-L \end{cases}$$

$$\kappa_d = \Lambda^{(1)} \frac{g\kappa^{(1)}}{2(h+L)\omega^{(1)2}\cosh(\kappa^{(1)}h)}$$

Это приводит к другому выражению для компоненты скорости волнопродуктора  $U_d^{(2)}$  (7.26):

$$U_d^{(2)} = -\kappa_d \kappa_{2\omega}^2 (h+L) \times G \times \frac{1}{2} \left( A^{(1)} \right)^2 e^{-i2\omega^{(1)}t} + \text{k.c.}$$

$$G = \frac{1}{\cosh(\kappa_{2\omega}L) - \cosh(\kappa_{2\omega}h) + \kappa_{2\omega}(h+L)\sinh(\kappa_{2\omega}h)} \times$$

$$\times \frac{1}{\left(\kappa^{(1)2} - \kappa_{2\omega}^2\right)^2} \left\{ \kappa_{2\omega}^3 (\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3\sigma_4) - \kappa^{(1)3} \kappa_{2\omega} (h+L) \sigma_2\sigma_5 + \right. \quad (7.29)$$

$$+ \kappa^{(1)4} (h+L) \sigma_1\sigma_6 - \kappa^{(1)2} \kappa_{2\omega} (\sigma_3\sigma_4 - \sigma_1\sigma_2 + \kappa_{2\omega}(h+L)\sigma_1\sigma_6) +$$

$$\left. + \kappa^{(1)} \kappa_{2\omega}^2 (\kappa_{2\omega}(h+L)\sigma_2\sigma_5 - 2\sigma_5\sigma_6 + 2\sigma_7\sigma_8) \right\}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{array}{ll} \sigma_1 = \sinh(\kappa^{(1)}h) & \sigma_2 = \sinh(\kappa_{2\omega}h) \\ \sigma_3 = \sinh(\kappa^{(1)}L) & \sigma_4 = \sinh(\kappa_{2\omega}L) \\ \sigma_5 = \cosh(\kappa^{(1)}h) & \sigma_6 = \cosh(\kappa_{2\omega}h) \\ \sigma_7 = \cosh(\kappa^{(1)}L) & \sigma_8 = \cosh(\kappa_{2\omega}L) \end{array}$$

### 7.2.5. Полное слабо-нелинейное решение

Полное решение для движения волнопродуктора на основе теории Захарова, включающее вклады 1-го и 2-го порядков по  $\epsilon$ , состоит из суммы (7.20),

(7.22), (7.26) или (7.29). Таким образом, для генерации волны, заданной выражением

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2} \sum A^{(1)} e^{i(k^{(1)}x - \omega^{(1)}t)} + \frac{1}{2} \sum A^{(2)} e^{i(k^{(2)}x - \omega^{(2)}t)} + \text{к.с.}, \quad (7.30)$$

требуется перемещать поверхность волнопродуктора по следующей закономерности:

$$X(t) = \frac{1}{2} \sum Z^{(1)} e^{-i\omega^{(1)}t} + \frac{1}{2} \sum Z^{(2)} e^{-i\omega^{(2)}t} + \frac{1}{2} \sum Z_d^{(2)} e^{-i2\omega^{(1)}t} + \text{к.с.} \quad (7.31)$$

Комплексные амплитуды  $Z^{(1)}$ ,  $Z^{(2)}$  и  $Z_d^{(2)}$  получаются путем интегрирования решения  $U(t) = U^{(1)} + U^{(2)} + U_d^{(1)}$ :

$$X(t) = \int U(t) dt = \int \left( U^{(1)} + U^{(2)} + U_d^{(1)} \right) dt \quad (7.32)$$

Для демонстрации формы полученного решения, рассматривается наиболее простой случай генерации монохроматической свободной волны на частоте  $\omega^{(1)} = \omega$ , которая сопровождается возникновением связанной волны на частоте  $\omega^{(2)} = 2\omega$ . Генерация волны происходит при помощи волнопродуктора поршневого типа предполагая  $L \rightarrow \infty$ ; см. рис. 7.6. В этом случае, функция движения волнопродуктора будет включать три компоненты:

$$X(t) = \frac{1}{2} Z^{(1)} e^{-i\omega t} + \frac{1}{2} Z^{(2)} e^{-i2\omega t} + \frac{1}{2} Z_d^{(2)} e^{-i2\omega t} + \text{к.с.} \quad (7.33)$$

Вид отдельных компонент функции  $X(t)$ , а также их сумма (7.33), показаны на рис. 7.7(а). Видно, что включение поправок второго порядка  $X^{(2)}$  и  $X_d^{(2)}$  приводит к отклонению движения волнопродуктора от синусоиды, делая график несимметричным. Ожидается, что такое искажение движения волнопродуктора должно привести к исключению или существенному уменьшению “паразитных волн”.

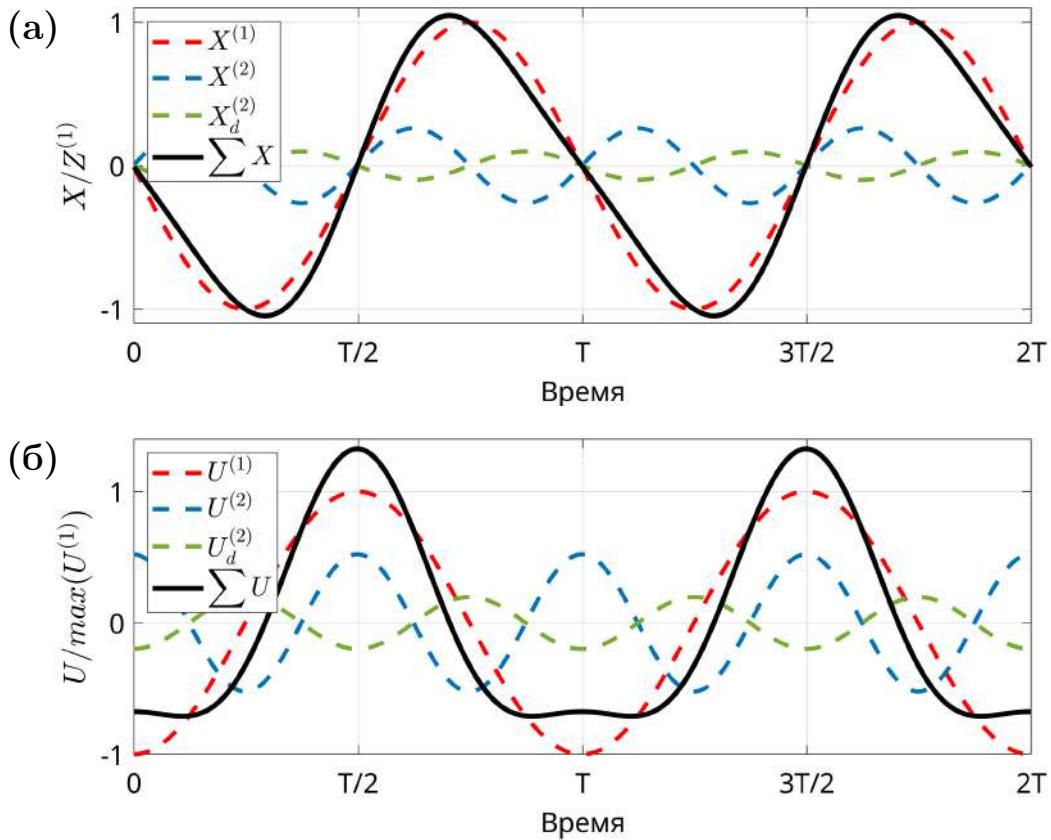


Рис. 7.7. Координата  $X$  (а) и скорость  $U$  (б) волнопродуктора в зависимости от времени.

Графики получены для монохроматической свободной волны при помощи метода на основе уравнения Захарова, см. формулу (7.33). Безразмерная глубина воды выбрана равной  $\kappa^{(1)} h = 0.77$ , а крутизна волны  $\epsilon = \kappa^{(1)} A^{(1)} = 0.3$ . Величина  $T$  - период волны, равный  $T = 2\pi/\omega$ . Предполагается использование волнопродуктора поршневого типа, который задается устремлением положения шарнира в бесконечность ( $L \rightarrow \infty$ ).

График мгновенной скорости волнопродуктора  $\sum U = d(\sum X)/dt$ , показанный на рис. 7.7(б), имеет более выразительные отличия от простого монохроматического графика  $U^{(1)}$ , получаемого в рамках линейной теории волн. Добавление поправок второго порядка  $U^{(2)}$  и  $U_d^{(2)}$  дает плоскую форму в нижней точке графика и, одновременно с этим, более острую форму в верхней точке. Это также говорит о том, что скорость волнопродуктора при движении в прямом направлении (в положительном направлении оси  $x$ ) достигает бо'льших величин, по сравнению с движением в обратном направлении.

### 7.3. Алгоритм на основе нелинейного уравнения Шредингера

Алгоритм на базе уравнения Захарова, представленный в предыдущем разделе, учитывает нелинейности задачи вплоть до 2-го порядка по  $\epsilon$ . Включение в алгоритм нелинейностей 3-го порядка может привести к повышению точности генерации волн. Тем не менее, в рамках теории Захарова, данный процесс достаточно трудоёмок и приводит к чрезмерно громоздким алгебраическим выражениям, что вызвано использованием спектрального представления поверхностных волн; см. уравнение (1.62) или (6.5).

Альтернативная форма записи волнового пакета может быть построена на основе комплексной огибающей и модуляции, как уже было сделано в разделе 6.2.; см. уравнение (6.4). В общем случае, обозначая комплексную огибающую символом  $\psi(x, t)$  и предполагая ее медленное изменение как в пространстве, так и во времени, форму свободной поверхности волнового пакета можно записать в следующем виде:

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2} \underbrace{\psi(x, t)}_{\text{огибающая}} \underbrace{e^{i(\kappa_0 x - \omega_0 t)}}_{\text{модуляция}} + \text{к.с.} \quad (7.34)$$

Здесь  $\kappa_0$  и  $\omega_0$  - волновое число и круговая частота несущей волны, определяющей модуляцию комплексной огибающей  $\psi(x, t)$ .

Захаровым было показано [77], что уравнение (1.68) можно свести к более простому случаю предполагая, что спектр волнового пакета является узкополосным, и основной вклад вносит гармоника с волновым числом  $\kappa_0$  и круговой частотой  $\omega_0$ . Ширина спектра предполагается исчезающе малой, то есть  $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ . В этом случае, уравнение Захарова (1.68) можно свести к:

$$-i \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} + \beta |\Psi|^2 \Psi = 0 \quad (7.35)$$

В уравнении введены следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned}\Psi &= \psi/\psi_0 && \text{Безразмерная огибающая} \\ \xi &= \epsilon^2 x && \text{Безразмерная координата} \\ \tau &= \epsilon(t - x/c_g) && \text{Безразмерное время}\end{aligned}\tag{7.36}$$

Здесь параметр  $\psi_0 = \text{const}$ . Безразмерная огибающая меняется как в пространстве, так и во времени, т.е.  $\Psi = \Psi(\xi, \tau)$ , а крутизна (1.57) несущей волны определяется как

$$\epsilon = k_0\psi_0\tag{7.37}$$

Уравнение (7.35) принято называть нелинейным (кубическим) уравнением Шредингера для поверхностных волн на воде [70, 77, 409]. Данное уравнение имеет широкое распространение в задачах механики поверхностных волн [81, 410, 411, 412, 413, 414]. Некоторые решения уравнения (7.35) называются “бризерами” [415, 416, 417, 418] и служат одним из прототипов волн-убийц (см. рис. 3.3), имеющих огромное значение для инженерной практики. Еще одним преимуществом нелинейного уравнения Шредингера (7.35) является относительная простота, обеспечивающая быстрое численное решение при помощи специальных численных алгоритмов [419], что немаловажно для инженерных проблем.

Существует несколько вариантов определения безразмерных коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  в уравнении (7.35). Наиболее универсальные выражения коэффициентов, справедливые для широкого диапазона режимов распространения волн на воде, записываются следующим образом [410]:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2c_g^3} \frac{\partial c_g}{\partial \kappa} ; \quad n = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2\kappa_0 h}{\sinh(2\kappa_0 h)} \right) ; \quad c_g = n \frac{\omega_0}{\kappa_0} \\ \beta &= \frac{\kappa_0^3}{n} \left\{ \frac{\cosh(4\kappa_0 h) + 8 - 2 \tanh^2(\kappa_0 h)}{16 \sinh^4(\kappa_0 h)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2 \sinh^2(2\kappa_0 h)} \frac{(2 \cosh^2(\kappa_0 h) + n)^2}{\kappa_0 h / \tanh(\kappa_0 h) - n^2} \right\} \end{aligned} \quad (7.38)$$

Пользуясь преимуществами нелинейного уравнения Шредингера, решение для формы бегущей волны (возвышения свободной поверхности  $\eta$ ) можно расширить до 3-го порядка по  $\epsilon$  для повышения точности алгоритма управления волнопродуктором. В этом случае, форма свободной поверхности будет включать в себя вклад свободных волн 1-го порядка  $\eta^{(1)}(x, t)$ , а также вклады связанных волн 2-го и 3-го порядков, а именно  $\eta^{(2)}(x, t)$  и  $\eta^{(3)}(x, t)$ , см. уравнения (7.39).

Поля скоростей жидкости, связанные с поверхностными волнами (7.39), определяются гидродинамическими потенциалами (7.40). В отличие от алгоритма на основе уравнения Захарова (см. уравнения (7.6) и (7.7)), учитывающего вклады 1-го и 2-го порядков по  $\epsilon$ , алгоритм управления волнопродуктором на основе уравнения Шредингера повышает точность генерации волн за счет учета поля скоростей связанных волн 3-го порядка  $\varphi^{(3)}$ . Также в рассмотрении появляется вклад 2-го порядка в поле скоростей свободных волн, обозначенный как  $\varphi_{\psi}^{(2)}$ . Данный вклад отсутствует в теории Захарова и связан с особенностями решения на основе нелинейного уравнения Шредингера.

$$\begin{aligned}
\eta(x, t) &= \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \eta^{(3)} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\
\eta^{(1)} &= \frac{1}{2} \psi_0 \Psi(x, t) e^{i(\kappa_0 x - \omega_0 t)} + \text{k.c.} \\
\eta^{(2)} &= \frac{1}{2} \frac{\psi_0^2 \kappa_0}{4} \frac{\cosh(\kappa_0 h) (2 + \cosh(2\kappa_0 h))}{\sinh^3(\kappa_0 h)} \Psi^2(x, t) e^{i2(\kappa_0 x - \omega_0 t)} + \text{k.c.} \\
\eta^{(3)} &= \frac{1}{2} \frac{\psi_0^3 \kappa_0}{24} \left\{ \frac{23\kappa_0 - 9\omega_0}{\sinh^4(\kappa_0 h)} + \right. \\
&\quad + \frac{3(4\omega_0 - 3\kappa_0) \cosh(2\kappa_0 h)}{\sinh^4(\kappa_0 h)} + \\
&\quad \left. + \frac{(4\kappa_0 - 3\omega_0) \cosh(4\kappa_0 h)}{\sinh^4(\kappa_0 h)} \right\} \Psi^3(x, t) e^{i3(\kappa_0 x - \omega_0 t)} + \text{k.c.}
\end{aligned} \tag{7.39}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x, z, t) &= \varphi^{(1)} + \varphi_\psi^{(2)} + \varphi^{(2)} + \varphi^{(3)} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\
\varphi^{(1)} &= \frac{i}{2} \frac{\psi_0 g}{\omega_0 \cosh(\kappa_0 h)} \cosh(\kappa_0(h+z)) \Psi(x, t) e^{i(\kappa_0 x - \omega_0 t)} + \text{k.c.} \\
\varphi_\psi^{(2)} &= \frac{i}{2} \frac{\psi_0 \omega_0}{\kappa_0 \sinh(\kappa_0 h)} (h+z) \sinh(\kappa_0(h+z)) \times \\
&\quad \times \left\{ \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{c_g} \frac{\partial}{\partial \tau} \right\} \Psi(\xi, \tau) e^{i(\kappa_0 x - \omega_0 t)} + \text{k.c.} \\
\varphi^{(2)} &= \frac{i}{2} \frac{3\psi_0^2 \omega_0}{8 \sinh^4(\kappa_0 h)} \cosh(2\kappa_0(h+z)) \Psi^2(x, t) e^{i2(\kappa_0 x - \omega_0 t)} + \text{k.c.} \\
\varphi^{(3)} &= \frac{i}{2} \frac{\psi_0^3 \kappa_0 \omega_0}{72} \frac{5 + 30 \cosh(2\kappa_0 h) + \cosh(4\kappa_0 h)}{\sinh^5(\kappa_0 h) (2 \cosh(2\kappa_0 h) - 1)} \times \\
&\quad \times \cosh(3\kappa_0(h+z)) \Psi^3(x, t) e^{i3(\kappa_0 x - \omega_0 t)} + \text{k.c.}
\end{aligned} \tag{7.40}$$

Дальнейшие действия для построения алгоритма управления волнопро-дуктором полностью совпадают с тем, что было сделано в разделе 7.2.. Таким образом, требуется рассмотреть нелинейное граничное условие на движущейся поверхности волнопродуктора и найти такую закономерность её движения, при которой будет воспроизведено поле скоростей, заданное гидродинамическим потенциалом (7.40).

### 7.3.1. Нелинейное граничное условие на волнопродукторе

Для учета нелинейностей 3-го порядка по  $\epsilon$  требуется расширить ряд Тейлора (7.12) еще одним слагаемым:

$$\begin{aligned} & \left( X \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{dX}{dt} f \right)_{x=0} + X f \frac{\partial}{\partial x} \left( X \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{dX}{dt} f \right)_{x=0} + \\ & + \frac{X^2 f^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( X \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{dX}{dt} f \right)_{x=0} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{X}{h} \right)^3 \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.41)$$

Функция формы  $f(z)$  по-прежнему задана формулой (7.8), а отклонение волнопродуктора  $X(t)$  от начального положения отсчитывается на уровне свободной поверхности спокойной воды, как показано на рис. 7.6.

Дополнение разложений по малому параметру (1.63), (1.64), (7.14) и (7.15) слагаемыми 3-го порядка по  $\epsilon$  и последующая подстановка полученных разложений в (7.41) приводит к серии уравнений (7.42)–(7.47). Следует отметить, что записанная серия уравнений включает дополнительные уравнения, отсутствующие в методе, основанном на теории Захарова; см. (7.16)–(7.18). Включенные в рассмотрение уравнения позволяют учесть дополнительные слабо-нелинейные свойства задачи и, тем самым, повысить точность генерации поверхностных волн.

$$\frac{dX^{(1)}}{dt}f = -\left.\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x}\right|_{x=0} \quad (7.42)$$

$$\frac{dX_\psi^{(2)}}{dt}f = -\left.\frac{\partial\varphi_\psi^{(2)}}{\partial x}\right|_{x=0} \quad (7.43)$$

$$\frac{dX^{(2)}}{dt}f = -\left.\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial x}\right|_{x=0} \quad (7.44)$$

$$\frac{dX^{(3)}}{dt}f = -\left.\frac{\partial\varphi^{(3)}}{\partial x}\right|_{x=0} \quad (7.45)$$

$$\frac{dX_d^{(2)}}{dt}f = -\left.\frac{\partial\varphi_d^{(2)}}{\partial x}\right|_{x=0} + X^{(1)}\left(\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial z}\frac{df}{dz} - f\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial x^2}\right)_{x=0} \quad (7.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_d^{(3)}}{dt}f &= -\left.\frac{\partial\varphi_d^{(3)}}{\partial x}\right|_{x=0} + \left(X^{(2)} + X_d^{(2)}\right)\left(\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial z}\frac{df}{dz} - f\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial x^2}\right)_{x=0} + \\ &+ X^{(1)}\left(\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial z}\frac{df}{dz} - f\frac{\partial^2\varphi^{(2)}}{\partial x^2}\right)_{x=0} + X^{(1)2}\left(\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial x\partial z}f\frac{df}{dz} - \frac{f^2}{2}\frac{\partial^3\varphi^{(1)}}{\partial x^3}\right)_{x=0} \end{aligned} \quad (7.47)$$

### 7.3.2. Решения 1-го, 2-го и 3-го порядков нелинейности

Подставляя решение нелинейного уравнения Шредингера (7.40) в уравнения (7.42), (7.44) и (7.45), можно получить требуемое движение волнопроектора, записанное в компактной форме:

$$X^{(n)} = \frac{i}{2}S^{(n)}\left\{\Psi^n e^{-in\omega_0 t}\right\}_{x=0} + \text{к.с.}, \quad (7.48)$$

где  $n$  задает порядок вклада. Таким образом,  $n = 1$  относится к свободным волнам 1-го порядка, а  $n = 2$  и  $n = 3$  определяют генерацию связанных волн 2-го и 3-го порядков, соответственно. Выражения для коэффициентов  $S^{(n)}$  даны следующим образом:

$$\begin{aligned}
S^{(1)} &= \frac{\psi_0 g \kappa_0^2 (h + L)}{4\omega_0^2} \frac{\operatorname{sech}(\kappa_0 h) (2\kappa_0 h + \sinh(2\kappa_0 h))}{1 - \cosh(\kappa_0 h) + \kappa_0 (h + L) \sinh(\kappa_0 h)} \\
S^{(2)} &= \frac{3\psi_0^2 \kappa_0^2 (h + L)}{32 \sinh^6(\kappa_0 h)} \frac{4\kappa_0 h + \sinh(4\kappa_0 h)}{2\kappa_0 (h + L) \coth(\kappa_0 h) - 1} \\
S^{(3)} &= \frac{\psi_0^3 \kappa_0^3 (h + L)}{96 \sinh^5(\kappa_0 h)} \frac{6\kappa_0 h + \sinh(6\kappa_0 h)}{2 \cosh(2\kappa_0 h) - 1} \times \\
&\quad \times \frac{5 + 30 \cosh(2\kappa_0 h) + \cosh(4\kappa_0 h)}{1 - \cosh(3\kappa_0 h) + 3\kappa_0 (h + L) \sinh(3\kappa_0 h)}
\end{aligned} \tag{7.49}$$

Подстановка  $\varphi_\psi^{(2)}$  (7.40) в (7.43) приводит к решению для компоненты  $X_\psi^{(2)}$ :

$$\begin{aligned}
X_\psi^{(2)} &= \frac{1}{2} S_\psi^{(2)} \left\{ \left( \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{c_g} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \Psi e^{-i\omega_0 t} \right\}_{x=0} + \text{к.с.} \\
S_\psi^{(2)} &= -\frac{\psi_0 (h + L)}{4} \frac{\kappa_0 h + \coth(\kappa_0 h) (\kappa_0 h \coth(\kappa_0 h) - 1)}{\kappa_0 (h + L) - \tanh(\kappa_0 h/2)}
\end{aligned} \tag{7.50}$$

Следует отметить, что производные в полученном выражении берутся, как правило, численно, поскольку комплексная огибающая  $\Psi(\xi, \tau)$  также задается численно.

Решение уравнения (7.46) дает движение волнопродуктора на частоте  $2\omega_0$ :

$$X_d^{(2)} = \frac{i}{2} S_d^{(2)} \left\{ \Psi^2 e^{-i2\omega_0 t} \right\}_{x=0} + \text{к.с.} \tag{7.51}$$

В то же время, решение уравнения (7.47) приводит к двум дополнительным движениям волнопродуктора на частотах  $\omega_0$  и  $3\omega_0$ :

$$\begin{aligned}
X_d^{(3)-} &= \frac{i}{2} S_d^{(3)-} \left\{ \Psi^3 e^{-i\omega_0 t} \right\}_{x=0} + \text{к.с.} \\
X_d^{(3)+} &= \frac{i}{2} S_d^{(3)+} \left\{ \Psi^3 e^{-i3\omega_0 t} \right\}_{x=0} + \text{к.с.}
\end{aligned} \tag{7.52}$$

Выражения для коэффициентов  $S_d^{(2)}$ ,  $S_d^{(3)-}$  и  $S_d^{(3)+}$  являются чрезмерно громоздкими. В связи с этим, они собраны в приложении 4.

### 7.3.3. Полное слабо-нелинейное решение

Итоговое полное выражение для движения волнопродуктора, полученное опираясь на нелинейное уравнение Шредингера (7.35), состоит из двух компонент для свободных волн, двух компонент для связанных волн, а также оно включает три поправки на конечную величину смещения поверхности волнопродуктора  $X \gg 0$  (т.е.  $|X| > 0$ ):

$$X(t) = \underbrace{X^{(1)} + X_\psi^{(2)}}_{\text{свободные волны}} + \underbrace{X^{(2)} + X^{(3)}}_{\text{связанные волны}} + \underbrace{X_d^{(2)} + X_d^{(3)-} + X_d^{(3)+}}_{\text{конечное смещение } X} \quad (7.53)$$

В отличие от алгоритма на основе уравнения Захарова (7.31), выражение (7.53) включает эффекты 3-го порядка нелинейности по  $\epsilon$ . Однако, при этом, используется допущение узкополосности спектра волн ( $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ ), требуемое для применимости уравнения Шредингера (7.35). Таким образом, решение (7.53) вносит как ряд положительных качеств (повышение точности), так и ряд недостатков и ограничений.

Обычно форма волны, которую требуется сгенерировать волнопродуктором, задается в виде функции отклонения свободной поверхности в координате волнопродуктора  $x = 0$ , т.е. в виде функции  $\eta(x = 0, t)$ . С другой стороны, для применения алгоритма генерации волн на базе уравнения Шредингера, требуется описание формы волны через комплексную огибающую  $\psi(x = 0, t)$ , как указано в выражении (7.34). Для построения комплексной огибающей  $\psi(x = 0, t)$  по известной функции  $\eta(x = 0, t)$  можно пользоваться следующим выражением:

$$\psi(t) = \frac{\eta(t) + i\mathcal{H}\{\eta(t)\}}{\exp(-i\omega_0 t)}, \quad (7.54)$$

где  $\mathcal{H}$  - преобразование Гильберта, определяемое следующим образом:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (7.55)$$

Здесь  $PV$  указывает на необходимость вычисления главного значения интеграла (Cauchy Principal Value).

Для демонстрации формы полученного решения (7.53), а также для его сравнения с решением на базе уравнения Захарова (см. рис. 7.7), рассматривается случай генерации монохроматической свободной волны на частоте  $\omega_0$ , аналогично (7.33). В этом случае, свободная волна будет сопровождаться возникновением связанных волн 2-го и 3-го порядков на частотах  $2\omega_0$  и  $3\omega_0$ , как указано в (7.39).

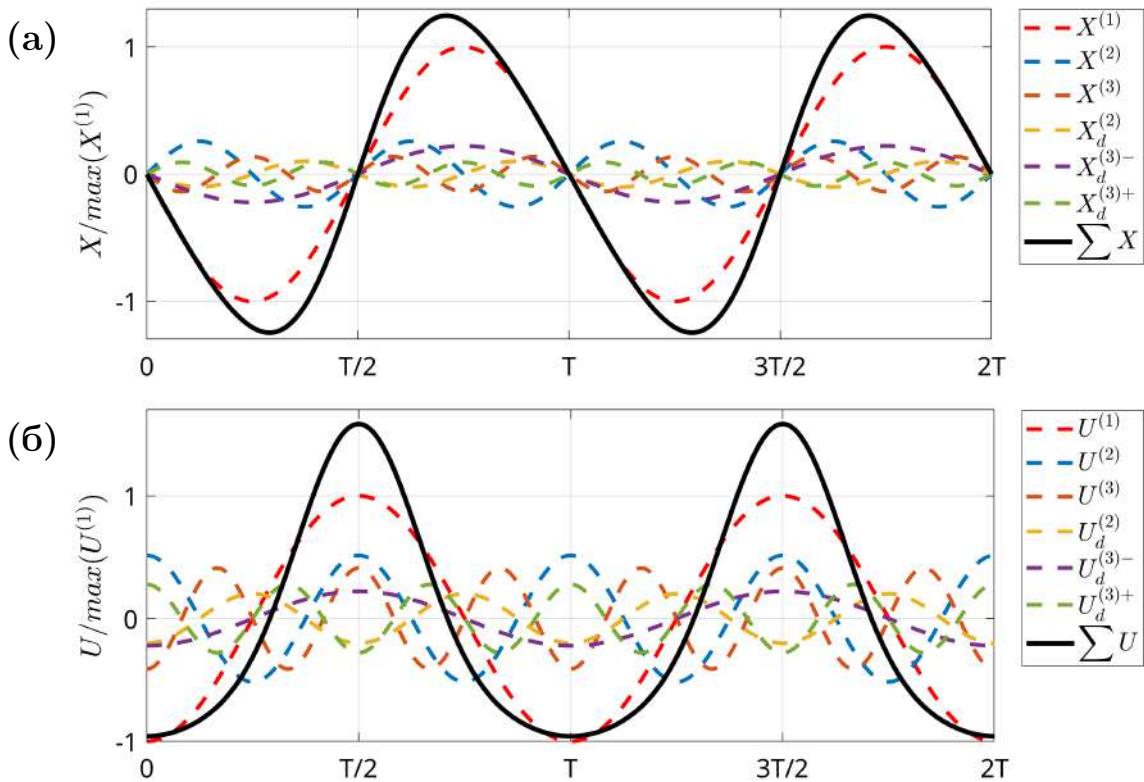


Рис. 7.8. Координата  $X$  (а) и скорость  $U$  (б) волнопродуктора в зависимости от времени.

Графики получены для монохроматической свободной волны при помощи метода на основе нелинейного уравнения Шредингера (7.53). Безразмерная глубина воды выбрана равной  $\kappa_0 h = 0.77$ , а крутизна волны  $\epsilon = \kappa_0 \psi_0 = 0.3$ . Величина  $T$  - период волны, равный  $T = 2\pi/\omega$ . Предполагается использование волнопродуктора поршневого типа, который задается устремлением положения шарнира в бесконечность ( $L \rightarrow \infty$ ).

На рис. 7.8 показаны все компоненты движения волнопродуктора  $X(t)$  при генерации монохроматической свободной волны. А именно, показаны все вклады на 1-м, 2-м и 3-ем порядках по  $\epsilon$ , а также их сумма (7.53). Графики построены таким образом, чтобы иметь возможность их прямого сравнения с результатом на основе уравнения Захарова, показанным на рис. 7.7.

Сравнивая графики можно заметить, что алгоритм на основе теории Захарова дает небольшие вторичные максимумы в нижней точке графика скорости на рис. 7.7(б). Такое поведение графика вызвано недостаточной точностью метода с учетом использованного разложения по малому параметру  $\epsilon$ , ограниченного 2-м порядком. Дополнение графика эффектами 3-го порядка нелинейности по  $\epsilon$ , как показано на рис. 7.8(б), полностью исключает вторичный максимум в нижней точке графика скорости. Это говорит о том, что алгоритм генерации на основе нелинейного уравнения Шредингера в некоторых случаях может оказаться более точным.

#### 7.4. Внедрение алгоритмов управления волнопродуктором

Алгоритмы автоматизированного управления волнопродуктором на базе уравнения Захарова и уравнения Шредингера, разработанные в настоящей главе, были внедрены в лабораторный гидроволновой лоток Тель-Авивского университета (Израиль), показанный на рис. 6.1 и 6.2. Для этого, на основании разделов 7.2. и 7.3. настоящей диссертации, были разработаны компьютерные программы на языке Matlab. Полученные программы использовались в качестве составного элемента компьютерного управления волнопродуктором. Соответствующий исходный код приведен в приложениях 5 и 6 настоящей диссертации. Версия алгоритмов управления на языке Python зарегистрирована в Роспатенте [420, 421].

Алгоритмы управления волнопродуктором состоят из трех этапов:

- Опираясь на функцию высоты свободной поверхности  $\eta(x = 0, t)$ , ко-

торую требуется сгенерировать в непосредственной близости от волнопродуктора, вычисляется требуемая форма представления волнового пакета:

- Для алгоритма на базе уравнения Захарова, вычисляется спектр комплексных амплитуд  $A^{(1)}(\omega^{(1)})$  пользуясь быстрым преобразованием Фурье (FFT):  $A^{(1)}(\omega^{(1)}) = \text{FFT}\{\eta(t)\}$ .
- Для алгоритма на базе уравнения Шредингера, вычисляется комплексная огибающая волнового пакета  $\psi(t)$  пользуясь формулой (7.54).
- Вычисляется функция движение волнопродуктора  $X(t)$  (рис. 7.6) пользуясь методами на основе уравнений Захарова или Шредингера.
- Полученная функция  $X(t)$  записывается в файл и отправлялась в блок автоматизированного управления волнородуктором.

Также оба алгоритма управления волнородуктором были добавлены в состав численного гидроволнового лотка, как в рамках модели квазипотенциального течения, так и в рамках модели двухфазного течения с границей раздела, см. рис. 3.8. Для этого, алгоритмы были переписаны на языке C++ и скомпилированы в библиотеку libwaveMakerZ, исходный код которой опубликован в открытом виде (<https://github.com/anatoliykhait/libwaveMakerZ> или <https://gitflic.ru/project/anatoliykhait/libwavenmakerz>). Разработанная библиотека опирается на методы динамической деформируемой сетки и способна работать как в последовательных вычислениях, так и в параллельных расчетах.

Демонстрация работы численного волнородуктора на базе библиотеки libwaveMakerZ и динамической деформируемой сетки показана на рис. 7.9. Рассматривается генерация монохроматической свободной волны со следующими параметрами: период  $T_0 = 3$  с; круговая частота  $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2.094$  рад/с; волновое число  $k_0 = 0.94$  рад/м; длина волны

$\lambda_0 = 2\pi/k_0 = 6.682$  м; крутизна волны  $\epsilon = k_0 a_0 = 0.1$ ; амплитуда волны  $a_0 = 0.106$  м; средняя глубина воды  $h = 0.55$  м.

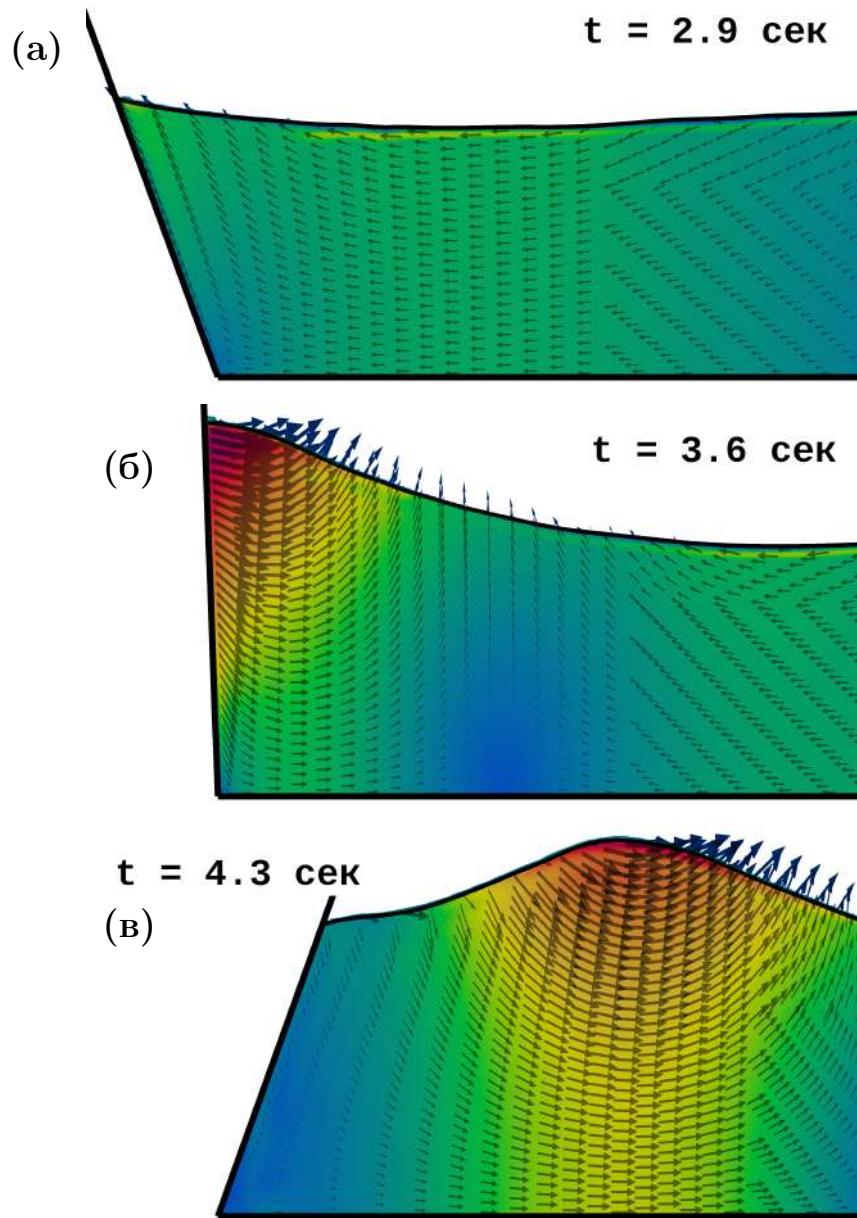


Рис. 7.9. Генерация монохроматической свободной волны при помощи шарнирно закрепленного волнопродуктора в численном гидроволновом лотке пользуясь библиотекой libwaveMakerZ. Градиентом цвета от синего к красному показан модуль скорости воды, в то время как стрелки показывают векторное поле скорости воды.

## 7.5. Выводы по главе

1. Лабораторные и численные исследования поверхностных волн на воде, а также их взаимодействия с морскими и прибрежными сооружениями, требуют генерации волновых пакетов наперед заданной формы. Для этого используется специальный гидравлический агрегат, называемый волнопродуктором. Движение волнопродуктора с высокой точностью контролируется компьютерными системами, обеспечивающими нужное отклонение поверхности волнопродуктора с течением времени.
2. Разработано несколько алгоритмов управления волнопродуктором, начиная от простейшего алгоритма на базе линейной теории поверхностных волн, и заканчивая наиболее полной слабо-нелинейной теорией волнопродуктора, разработанной Шаффером [309, 310]. Несмотря на значительный прогресс в решении проблемы генерации волн, в ряде случаев все существующие алгоритмы управления волнопродуктором не позволяют достичь достаточного уровня точности воспроизведения требуемой формы волны.
3. К основным недостаткам существующих алгоритмов управления волнопродуктором, таким как слабо-нелинейная теория Шаффера, можно отнести: (а) ограниченность алгоритмов нелинейными эффектами 2-го порядка по  $\epsilon$ , которые только частично отражают сложность нелинейных процессов в течении жидкости; (б) сложность и громоздкость уравнений и алгебраических выражений, что вызывает проблемы на практике при имплементации слабо-нелинейных теорий волнопродуктора в лабораторных или численных волновых лотках.
4. Для решения указанных проблем генерации поверхностных волн, в настоящей главе предложены и разработаны два новых слабо-нелинейных алгоритма управления волнопродуктором. В основе предложенных алгоритмов лежат известные и хорошо разработанные теоретические мо-

дели слабо-нелинейных поверхностных волн, а именно уравнения Захарова и Шредингера. Это позволило значительно упростить математические уравнения и выражения за счет того, что основная сложность проблем уже решена в рамках указанных теоретических подходов.

5. Таким образом, слабо-нелинейный алгоритм управления волнопродуктором на базе уравнения Захарова позволил сконцентрировать основную сложность решаемой задачи в так называемых “ярах” теории Захарова, выражения которых хорошо известны и приведены в приложении 1. В результате, алгоритм управления волнопродуктором существенно упростился, что позволило имплементировать его в систему автоматизированного управления большим гидроволновым лотком Тель-Авивского университета (Израиль, см. рис. 6.1, 6.2 и 7.1).
6. С другой стороны, введение ограничения на ширину спектра волнового пакета  $\Delta\omega/\omega_0 \leq 0.2$  значительно упрощает уравнение Захарова и приводит к так называемому нелинейному уравнению Шредингера [77]. Использование уравнения Шредингера дало возможность **впервые** найти выражения для поправок 3-го порядка нелинейности по  $\epsilon$ .
7. Алгоритмы управления волнопродуктором на базе уравнения Захарова и Шредингера, разработанные в настоящей главе, были сформулированы в виде компьютерных программ на языках Matlab и Python, а также зарегистрированы в реестре программ для ЭВМ. Листинг частично приведен в приложениях 5 и 6. Разработанные алгоритмы управления волнопродуктором были внедрены в систему управления большим лабораторным гидроволновым лотком Тель-Авивского университета для их исследования и анализа. Также алгоритмы управления волнопродуктором были включены в состав численного гидроволнового лотка, разработанного в главе 6 настоящей диссертации. Для этого они были переписаны на языке программирования C++ и скомпилированы в библиотеку libwaveMakerZ.

8. Основные результаты исследований, обсуждаемых в настоящей главе, опубликованы соискателем и его соавторами в ряде международных журналов [400, 422, 423], а также обсуждены на международных конференциях [350, 424].

## ГЛАВА 8

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ ВОЛНОПРОДУКТОРОМ

## 8.1. Исследование алгоритма на базе уравнения Захарова

### 8.1.1. Режимы генерации волн

Абсолютные величины амплитуд в уравнении (7.31) исследуются на рис. 8.1 и 8.2 для волнопродукторов поршневого типа и шарнирно закрепленного, соответственно. Рассматривается генерация монохроматической свободной волны. Режимы генерации волн варьируются в широких пределах на графиках: безразмерная глубина  $\pi/10 \leq \zeta h \leq 2\pi$ ; крутизна волны  $0.05 \leq \zeta A^{(1)} \leq 0.3$ . Следует заметить, что глубина  $\zeta h > \pi$  относится к режиму глубокой воды согласно [69], в то время как диапазон  $\pi/10 < \zeta h < \pi$  относится к режиму промежуточной глубины. Крутизна волны  $\zeta A^{(1)} \approx 0.3$  рассматривается как предельная для необрушающейся волны.

Относительное отклонение нового алгоритма на базе уравнения Захарова от теории Шаффера [309, 310] исследуется на рис. 8.1(а) и 8.2(а) для волнопродукторов поршневого и шарнирно закрепленного типов, соответственно. Видно, что отклонение не превосходит 1.5%. Причем, отклонение практически исчезает в области глубокой воды  $\zeta h > \pi$  и проявляется по мере снижения глубины.

Поправка движения волнопродуктора на 2-ом порядке нелинейности  $Z_d^{(2)}$  значительно зависит как от глубины воды  $\zeta h$ , так и от крутизны волны  $\zeta A^{(1)}$ , как видно из рис. 8.1(в) и 8.2(в). Величина  $Z_d^{(2)}$  принимает наибольшие значения на малой глубине, но и в режиме глубокой воды ее вклад достаточно существенен. Напротив, поправка 2-го порядка нелинейности  $Z^{(2)}$  быстро затухает и становится пренебрежимо малой по мере увеличения глубины, см. рис. 8.1(г) и 8.2(г).

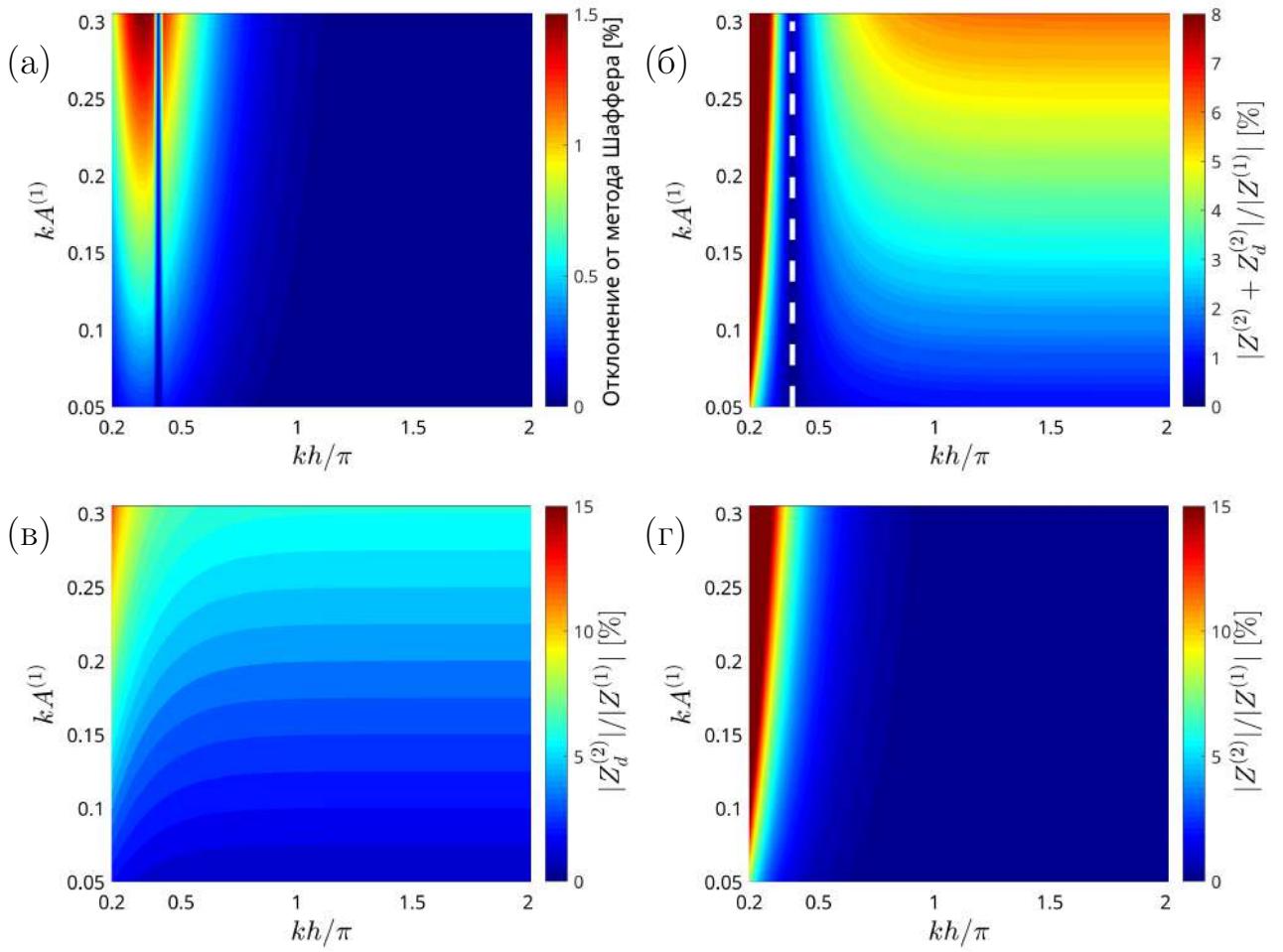


Рис. 8.1. Амплитуды движения волнопродуктора поршневого типа при генерации монохроматической свободной волны при помощи нового алгоритма на базе уравнения Захарова: (а) отклонение алгоритма на базе уравнения Захарова от теории Шаффера [309, 310]; (б) полная поправка движения волнопродуктора на втором порядке нелинейности  $|Z^{(2)} + Z_d^{(2)}|$  (7.31); (в) поправка 2-го порядка нелинейности  $|Z_d^{(2)}|$ , вызванная конечностью перемещения поверхности волнопродуктора; (г) поправка 2-го порядка нелинейности  $|Z^{(2)}|$ , вызванная существование связанных волн.

Сумма  $Z_d^{(2)}$  и  $Z^{(2)}$  исследуется на рис. 8.1(б) и 8.2(б). С учетом того, что данные вклады в движение волнопродуктора находятся в противофазе, возникает некоторый режим генерации, при котором нелинейная поправка  $|Z^{(2)} + Z_d^{(2)}|$  полностью исчезает. Данный режим показан вертикальной пунктирной линией на графиках и характеризуется применимостью наиболее простой линейной теории волнопродуктора (7.1), что может значительно упростить экспериментальные или численные испытания.

Интересно, что алгоритм на базе уравнения Захарова позволяет най-

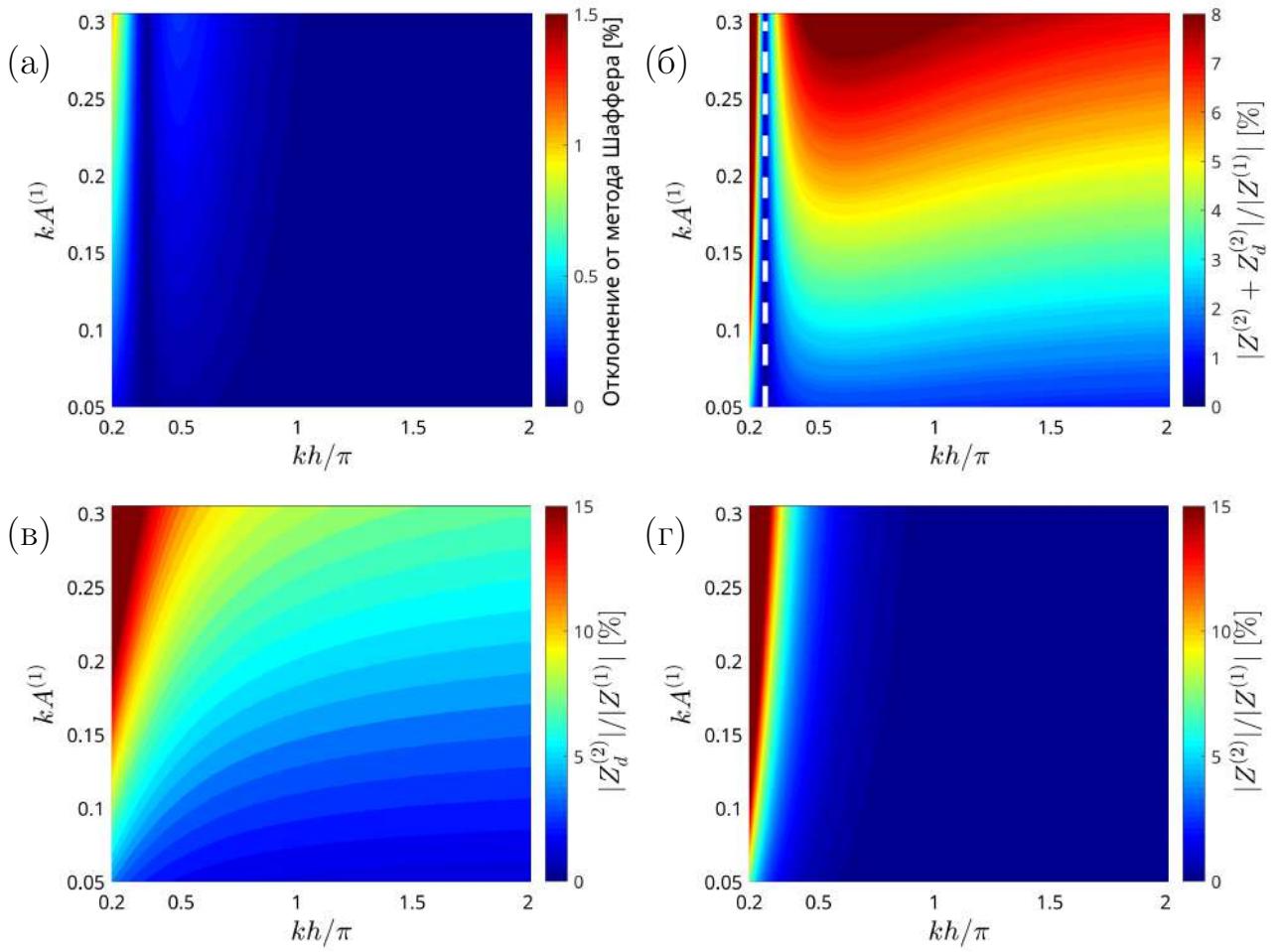


Рис. 8.2. То же, что и на рис. 8.1, для шарнирно закрепленного волнопродуктора.

ти точное выражение для режима “линейной” генерации волн, когда  $|Z^{(2)}| = |Z_d^{(2)}|$ , см. рис. 8.3. Видно, что рассматриваемый режим зависит как от глубины воды  $kh$ , так и от геометрии волнопродуктора  $L/h$ .

### 8.1.2. Вихревые течения вблизи волнопродуктора и эмпирическая поправка передаточной функции

Различными исследователями [405, 425] было показано, что теоретические значения передаточной функции (7.21) отличаются от фактически измеренных в лаборатории. В некоторых случаях зафиксированное отклонение превышало 15% [405], тем самым приводя к резкому росту ошибок. Общепринятого объяснения физических причин возникновения таких существенных отклонений до сих пор не найдено.

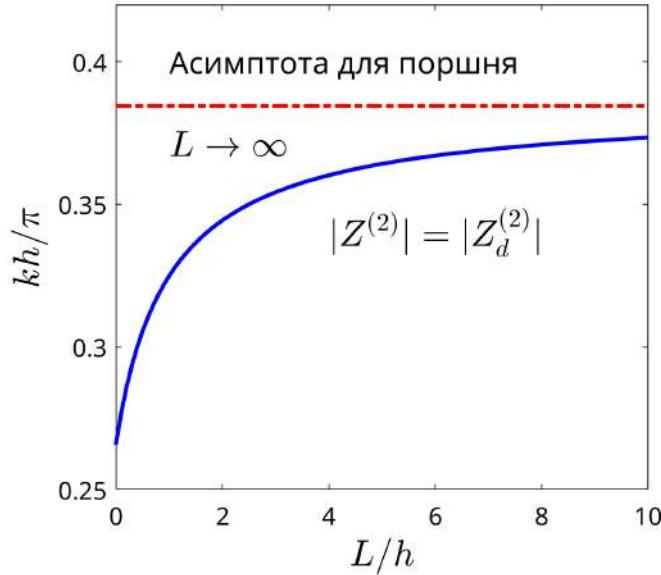


Рис. 8.3. Режим генерации волн (безразмерная глубина и конфигурация волнопродуктора), в котором исчезают нелинейные поправки 2-го порядка нелинейности, а именно  $Z^{(2)} + Z_d^{(2)} = 0$ .

В диссертации выполнено детальное исследование турбулентных течений жидкости в непосредственной близости от волнопродуктора, возбужденных его функционированием. Для этого используются преимущества высокоточной математической модели течения двухфазной жидкости (3.8), разработанной в главах 3 и 6. Рассматривается генерация регулярного волнового поля, определяемого монохроматическим спектром свободных волн. Параметры исследуемого волнового поля выбраны следующими: глубина воды  $h = 0.6$  м; период свободной волны  $T_0 = 1.8$  сек; длина волны  $\lambda_0 = 3.82$  м; крутизна волны  $\kappa_0 A_0^{(1)} = 0.06$ .

Для дальнейшего анализа требуется выделить вихревую компоненту течения из полного векторного поля скорости, найденного в результате математического моделирования. Для этого используется осреднение Рейнольдса (1.3) и (1.77). Принимая время осреднения равным периоду волны  $T_0$ , следует заметить следующее свойство потенциальных поверхностных волн:

$$\langle V \rangle (x, y, z, t) = \langle -\nabla \varphi \rangle (x, y, z, t) = -\frac{1}{T_0} \int_{t-T_0/2}^{t+T_0/2} \nabla \varphi (x, y, z, t) dt = 0 \quad (8.1)$$

То есть, средняя эйлерова компонента течения для потенциальной волны равна нулю. В том случае, если  $\langle V \rangle \neq 0$ , оставшиеся вклады в течение являются вихревыми. Таким образом, можно записать:

$$\overline{V'}(x, y, z, t) = \langle V \rangle(x, y, z, t) \quad (8.2)$$

Описанный анализ был выполнен для результатов численного моделирования течения, возникающего при генерации регулярного волнового поля, заданного выше. Эволюция во времени поля вихревой компоненты скорости  $\overline{V'}$  показана на рис. 8.4. Видно, что работа волнопродуктора приводит к формированию сложных турбулентных вихревых структур, не учтенных в слабо-нелинейных алгоритмах на базе уравнений Захарова и Шредингера. Это дает возможность предположить, что обнаруженные течения являются главным источником ошибок генерации волн, указанных выше.

В связи с чрезвычайной сложностью протекающих физических процессов, что хорошо видно на рис. 8.4, требуется введение эмпирических поправок слабо-нелинейных алгоритмов управления волнопродуктором, разработанных в главе 7. Для этого, была выполнена серия вычислительных экспериментов в численном гидроволновом лотке, разработанном в главе 6. Применение численного гидроволнового лотка взамен лабораторного позволяет избежать утечек, вязкостных эффектов и других сложностей, неизбежных при проведении лабораторных экспериментов.

Выбраны следующие параметры вычислительных экспериментов: период регулярной свободной волны  $T_0 = 0.7$  с; длина домена численного гидроволнового лотка  $L = 6$  м. Средняя глубина воды  $h$  и амплитуда монохроматической волны  $A^{(1)}$  варьировались в широком диапазоне для захвата большого количества режимов генерации волн. Форма свободной поверхности воды (форма волны) измерялась численно в координате  $x = 3h$  с учетом того, что волнопродуктор размещался в координате  $x = 0$ .

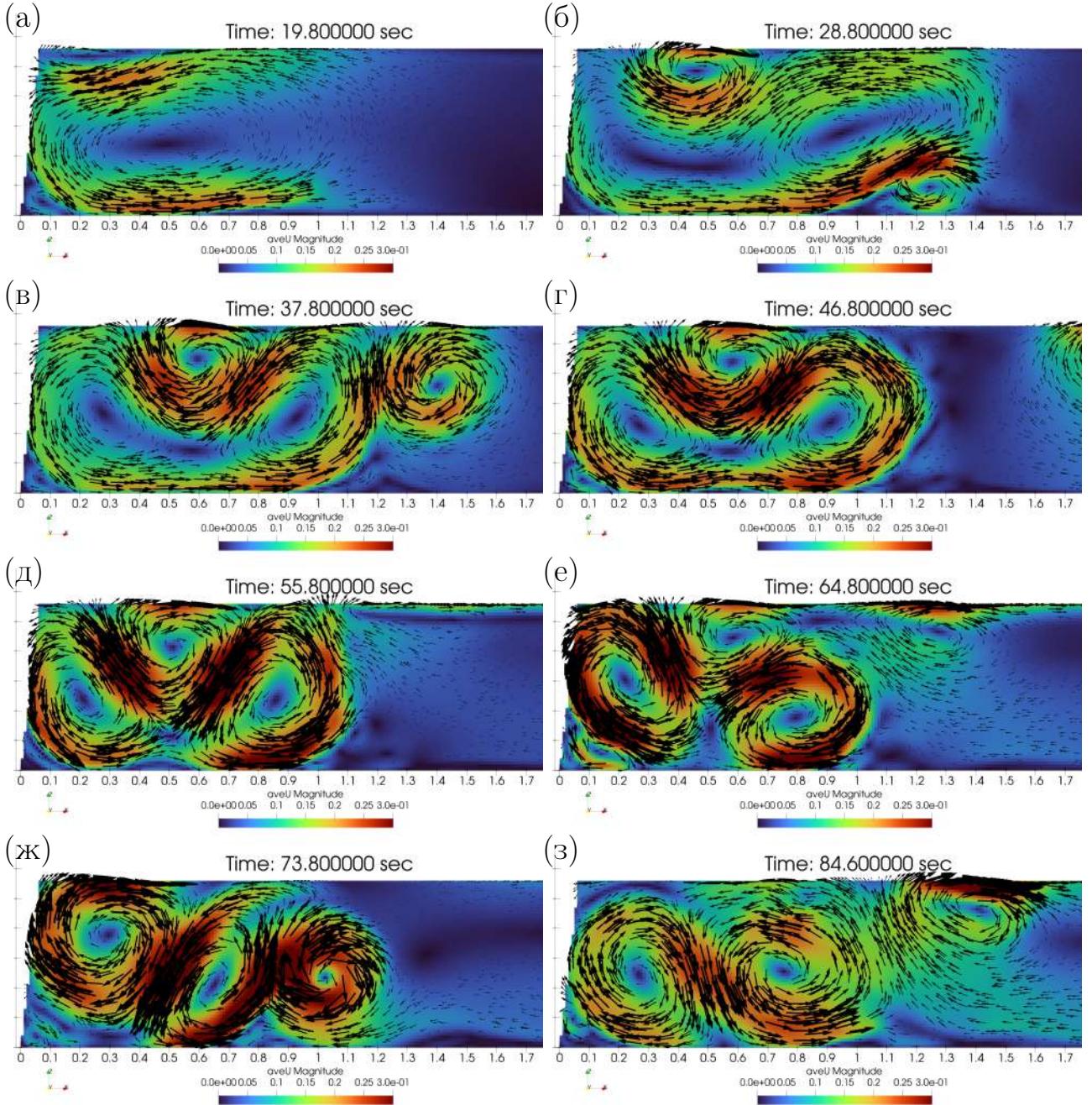


Рис. 8.4. Вихревые течения  $\bar{V}'$ , наблюдаемые в непосредственной близости от волнопродуктора при генерации регулярного волнового поля со следующими параметрами:  $h = 0.6$  м;  $T_0 = 1.8$  сек;  $\lambda_0 = 3.82$  м;  $\kappa_0 A_0^{(1)} = 0.06$ . Подрисунки (а)–(з) показывают развитие вихревой компоненты скорости с течением времени.

Результаты вычислительных экспериментов представлены на рис. 8.5 для волнопродуктора поршневого типа, а на рис. 8.6 для шарнирно закрепленного волнопродуктора. Как и в предшествующих исследованиях [405, 425], зафиксировано существенное отклонение фактических значений передаточной

функции (синие круглые маркеры) от теоретических величин (7.21) (черная сплошная линия).

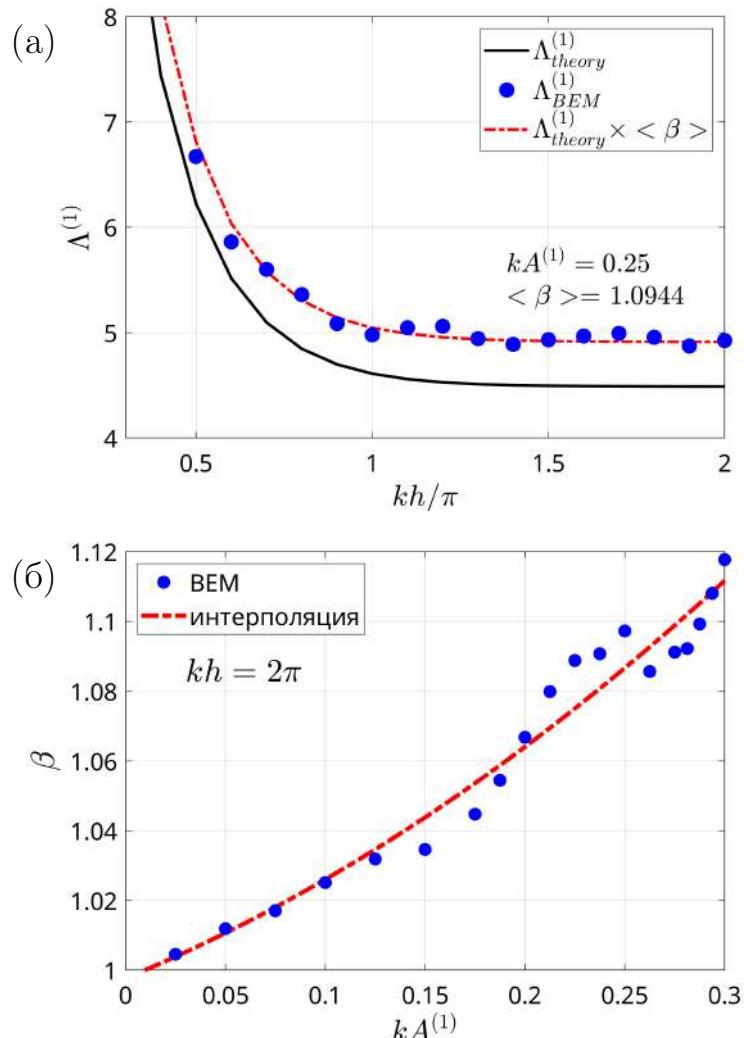


Рис. 8.5. Сравнение точных значений передаточной функции  $\Lambda^{(1)}$  (7.21) со значениями, полученными в результате экспериментов в численном гидроволновом лотке (рис. 3.8): (а) зависимость  $\Lambda^{(1)}$  от глубины воды  $\zeta h$ ; (б) зависимость  $\Lambda^{(1)}$  от крутизны волны  $\zeta A^{(1)}$  при фиксированной глубокой воде  $\zeta h = 2\pi$ . Функция  $\beta$  отражает отклонение фактических значений передаточной функции от теоретических:  $\Lambda_{\text{эксперимент}}^{(1)} = \beta \times \Lambda_{\text{теория}}^{(1)}$ . ВЕМ - численная модель квазипотенциального течения (3.9) с использованием метода граничных элементов. Волнопродуктор поршневого типа.

На рис. 8.5(а) и 8.6(а) красной пунктирной линией нанесены значения

передаточной функции с учетом эмпирической поправки:

$$\Lambda^{(1)} = \beta \times \Lambda_{\text{теория}}^{(1)} \quad (8.3)$$

где  $\beta (\kappa A^{(1)}, \kappa h, \dots)$  - эмпирическая функция, зависящая от множества факторов, таких как безразмерная глубина  $\kappa h$ , крутизна волны  $\kappa A^{(1)}$  и др.

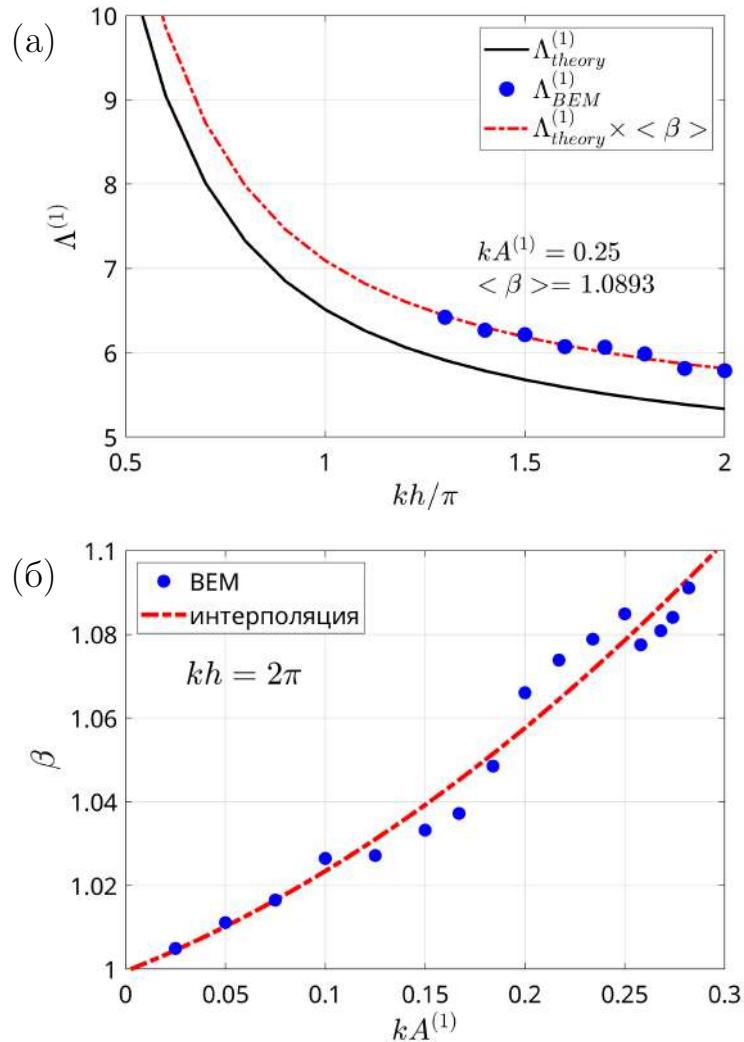


Рис. 8.6. То же, что и на рис. 8.5, для шарнирно закрепленного волнопродуктора.

Видно, что для фиксированной крутизны волны  $\kappa A^{(1)} = 0.25$ , функцию  $\beta$  можно охарактеризовать некоторым средним значением  $<\beta> = 1.0944$  для поршневого типа волнопродукторов. Для шарнирно закрепленных волнопродукторов оценка составит  $<\beta> = 1.0893$ . Таким образом, в рассматриваемом режиме генерации волн, фактическое значение передаточной функции  $\Lambda^{(1)}$

отличается на 8.9...9.4% от теоретических величин, что хорошо согласуется с литературой [405, 425].

С другой стороны, эмпирическая поправочная функция  $\beta$  радикально зависит от крутизны волны  $\kappa A^{(1)}$ . Как видно из рис. 8.5(б) и 8.6(б), зависимость  $\beta(\kappa A^{(1)})$  имеет выраженный параболический характер. При  $\kappa A^{(1)} = 0.3$  величина  $\beta$  превосходит 1.12...1.13. Таким образом, ошибка может превышать 13%. Полученную эмпирическую поправочную функцию  $\beta = \beta(\kappa A^{(1)}, \kappa h, \dots)$  требуется учесть в разработанных алгоритмах автоматизированного управления волнопродуктором на основе уравнений Захарова и Шредингера.

### 8.1.3. Численные исследования

На практике особенную сложность составляют задачи генерации поверхностных волн при уменьшении глубины воды, т.е. режимы мелкой воды  $\kappa h \leq 0.1\pi$  и промежуточной глубины  $0.1\pi < \kappa h < \pi$ . Для исследования подобного случая рассматривается простейший широко распространенный тестовый монохроматический волновой пакет из работы [309]. Предполагается существование единственной частоты  $\omega_0$  свободной волны в пакете:

$$\eta^{(1)}(x=0, t) = a_0 \cos(\omega_0 t) \quad (8.4)$$

Глубина воды  $h = 0.7$  м; период свободной волны  $T_0 = 3$  с. Дисперсионное соотношение (1.61) приводит к длине волны  $\lambda_0 = 7.45$  м. Амплитуда свободной волны  $a_0 = 7$  см. Для указанного монохроматического волнового пакета, безразмерная глубина воды составляет  $\kappa_0 h = 0.19\pi$ , а крутизна волны  $\kappa_0 a_0 = 0.06$ .

Генерация волнового пакета (8.4) не представляется возможной в лабораторном гидроволновом лотке, используемом в настоящем исследовании (см. рис. 6.1 и 6.2), в связи с механическими ограничениями установленного волнопродуктора. Вместо этого, используется численный гидроволновой ло-

ток, разработанный и исследованный в главах 3 и 6 настоящей диссертации (см. рис. 3.8).

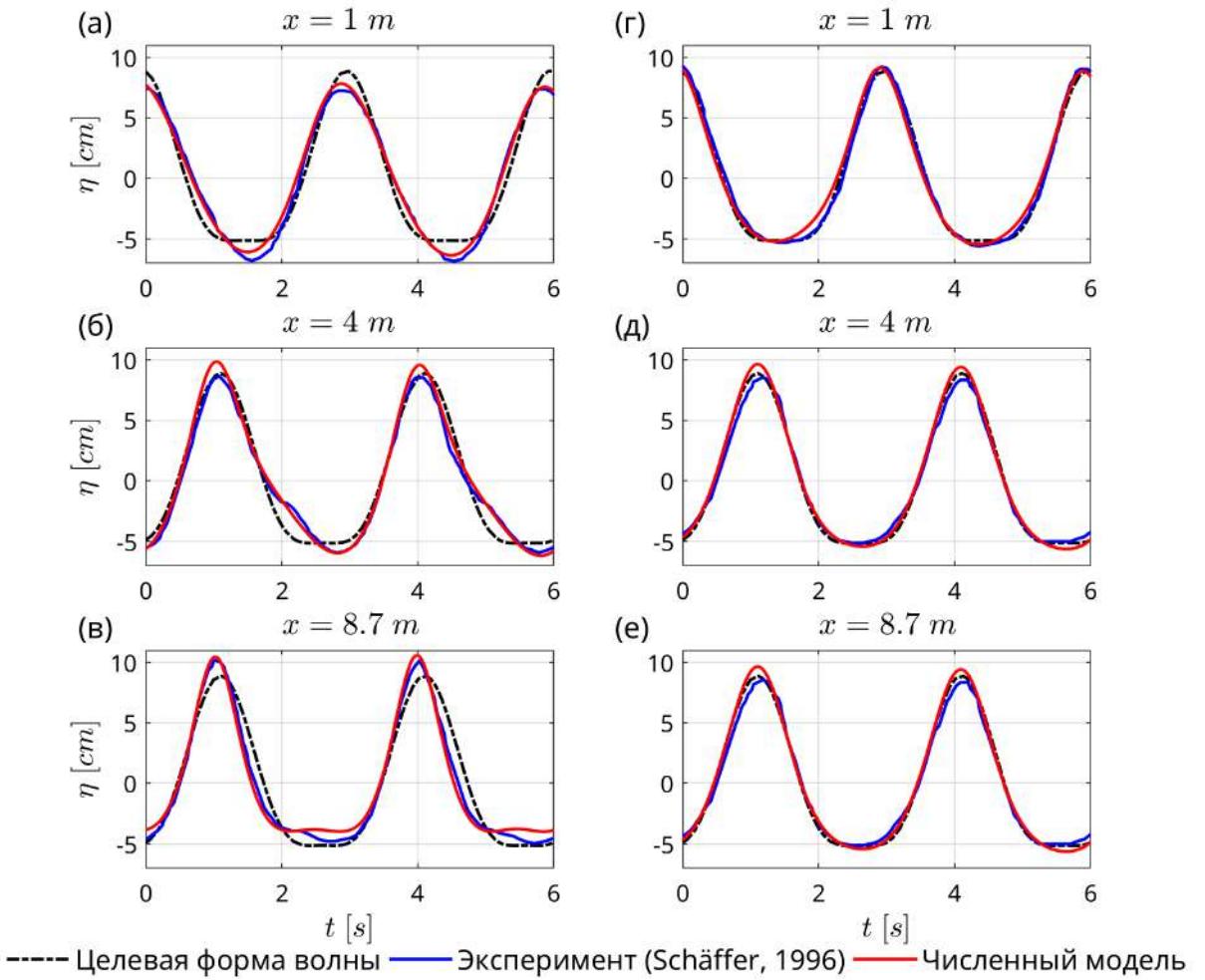


Рис. 8.7. Форма монохроматического волнового пакета, полученная в численном гидроволновом лотке на базе метода граничных элементов (ВЕМ): (а)–(в) линейная теория волнопродуктора; (г)–(д) слабо-нелинейный алгоритм на основе уравнения Захарова. Форма свободной поверхности представлена для трех координат, отсчитываемых от положения волнопродуктора:  $x_p = 1, 4, 8.7$  м. Результаты экспериментальных измерений заимствованы из работы [309].

Рисунок 8.7 показывает форму волны, полученную в численном гидроволновом лотке на различных расстояниях от волнопродуктора  $x_p = 1, 4, 8.7$  м. Графики показывают, что применение линейной теории генерации волн (подрисунки (а)–(в)) приводит к существенной ошибке в форме волны. Так, численно и экспериментально измеренная форма волны значительно отличается от целевой. Применение нового слабо-нелинейного алгоритма управления волнопродуктором (подрисунки (г)–(е)) на базе уравнения Захарова исправ-

ляет ситуацию и дает достаточно хорошее совпадение измеренных профилей волн с целевыми профилями.

Кроме того, следует отметить, что графики на рис. 8.7 подтверждают высокую точность численного гидроволнового лотка, разработанного в главе 6 настоящей диссертации. А именно, полученные численные результаты очень хорошо совпадают с лабораторными измерениями в работе [309].

Далее требуется рассмотреть случай генерации более сложного волнового пакета при помощи поршневого волнопродуктора в проблематичном режиме промежуточной глубины  $0.1\pi < \kappa h < \pi$ . Исходя из тех же соображений, требуется применение численного гидроволнового лотка для исследования данного случая.

Форма бихроматического волнового пакета свободных волн задается уравнением:

$$\eta^{(1)}(x = 0, t) = \frac{a_0}{2} \left[ \cos \left( \left( \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right) t \right) + \cos \left( \left( \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) t \right) \right] \quad (8.5)$$

Несущий период выбирается равным  $T_0 = 2.8$  с, что дает величину круговой частоты  $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2.244$  рад/с. Волновое число определяется дисперсионным соотношением (1.61), а именно  $\kappa_0 = 0.976$  рад/м, что дает несущую длину волны  $\lambda_0 = 6.44$  м. Ширина спектра выбрана равной  $\Delta\omega = \omega_0/10$ . Амплитуда волны составляет  $a_0 = 6.15$  см. Для указанных параметров крутизна волны равна  $\kappa_0 a_0 = 0.06$ , а безразмерная глубина воды определяется как  $\kappa_0 h = 0.186\pi$  и находится близко к режиму мелкой воды согласно [69].

Амплитуды движения поверхности волнопродуктора, рассчитанные для указанного волнового пакета в рамках линейной теории волн и нового алгоритма на базе уравнения Захарова, изображены на рис. 8.8(в) и 8.9(в). Видно, что движение волнопродуктора в рамках простейшей линейной теории состоит из двух вкладов на частотах  $\omega_0 - \Delta\omega/2$  и  $\omega_0 + \Delta\omega/2$ . В то же время, использование слабо-нелинейного алгоритма на базе уравнения Захарова

дополняет спектр 6-ю дополнительными вкладами на различных частотах. Именно эти дополнительные вклады в движение волнопродуктора предназначены для подавления генерации “паразитных волн”.

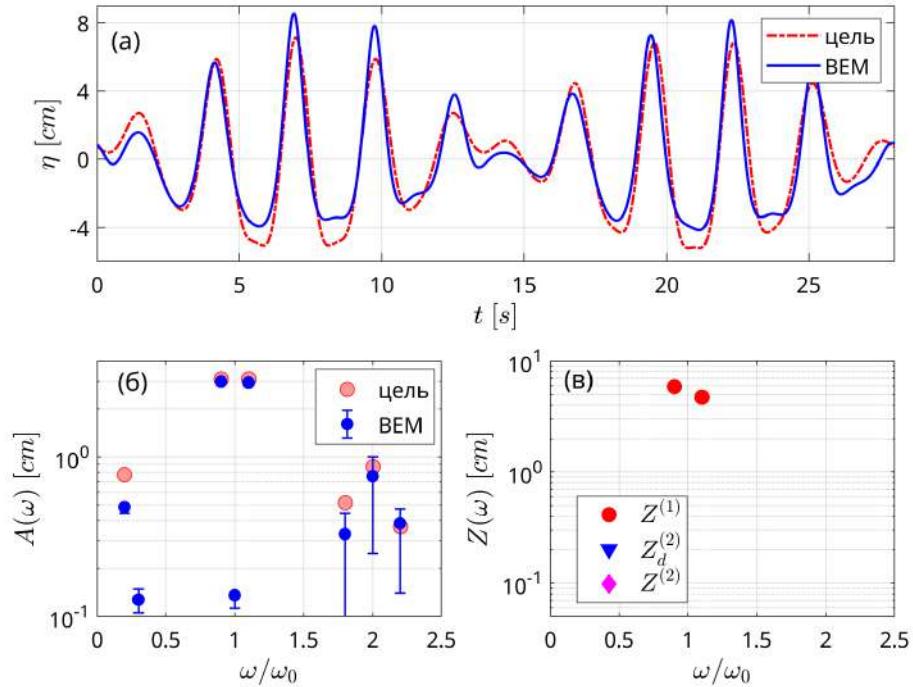


Рис. 8.8. Результаты моделирования процесса генерации бихроматического волнового пакета (8.5) при помощи поршневого волнопродуктора в численном гидроволновом лотке: (а) форма свободной поверхности, измеренная численно в координате  $x_p = 4.4$  м; (б) спектр волны  $FFT(\eta)$ , измеренный численно в диапазоне координат  $1.8 \text{ м} \leq x_p \leq 4.4 \text{ м}$ ; (в) спектр перемещения волнопродуктора  $FFT(X)$ . Используется простейшая линейная теория волнопродуктора.

Форма свободной поверхности, полученная в координате  $x_p = 4.4$  м при помощи линейной теории волнопродуктора, показана на рис. 8.8(а). Видно очень существенное отличие результатов численного эксперимента от целевой формы волны, что вызвано существование “паразитных волн”. В связи с тем, что фазы паразитных волн варьируются в зависимости от расстояния до волнопродуктора, на рис. 8.8(б) проявляется изменчивость амплитуд связанных волн на частотах  $2\Delta\omega$ ,  $2(\omega_0 \pm \Delta\omega)$  и  $2\omega_0$ , которая показана планками погрешности. Данная картина аналогична тому, что было продемонстрировано выше по тексту на рис. 7.3.

Применение нового слабо-нелинейного алгоритма на основе уравнения За-

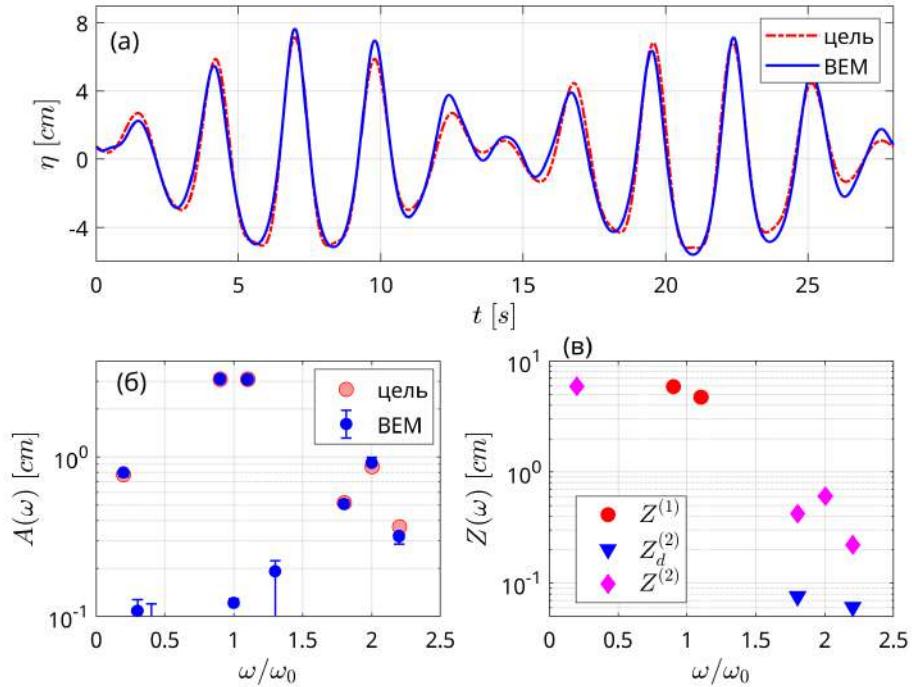


Рис. 8.9. То же, что и на рис. 8.8, для нового нелинейного алгоритма управления волнопродуктором на базе уравнения Захарова.

харова, как видно из рис. 8.9(а) и (б), в значительной степени повышает точность генерации волнового пакета. Кроме того, на рис. 8.9(б) практически отсутствуют планки погрешности, что показывает неизменность формы волнового пакета вдоль лотка. Это подтверждает заметное подавление паразитных волн. Тем не менее, следует заметить, что полное исключение погрешности в форме волны не достигается. Ожидается, что алгоритм управления волнопродуктором на базе уравнения Шредингера позволит улучшить ситуацию в некоторых особых случаях.

#### 8.1.4. Экспериментальные исследования

Экспериментальные исследования точности алгоритма управления волнопродуктором осуществлялись в лабораторном гидроволновом лотке Тель-Авивского университета, показанном на рис. 6.1 и 6.2. Лоток оборудован шарнирно закрепленным волнопродуктором, управляемым а автоматическом ре-

жиме с компьютера. Шарнир расположен на уровне дна лотка, а геометрия его движения определяется параметром  $L = 0$  в соответствии со схемой 7.6. Глубина воды составляет  $h = 0.6$  м. Длина и ширина лотка составляют 18 м и 1.2 м, соответственно.

Измерение высоты свободной поверхности в фиксированной пространственной координате  $x_p$  осуществлялось при помощи волномеров резистивного типа. Волномеры закреплялись на тележке, перемещаемой вдоль гидроволнового лотка системой компьютерного управления так, что погрешность позиционирования волномеров не превышала  $\pm 1$  мм. Функция  $\eta(x = x_p, t)$ , измеренная волномерами, записывалась в текстовый файл с разрешением по времени  $T_0/128$ , где  $T_0$  - характерный период исследуемой волны.

Лабораторный волнопродуктор состоял из четырех синхронизированных секций, между которыми имелся значительный зазор, как видно из рис. 7.1(а). Предварительные экспериментальные исследования показали, что учет данного зазора возможен путем увеличения поправочной функции  $\beta$ ; см. рис. 8.6.

Для анализа точности алгоритма управления волнопродуктором на основе уравнения Захарова рассматриваются три бихроматических волновых пакета (8.5), параметры которых сведены в таблицу 8.1. Как и в предыдущем разделе, в качестве отправной точки в анализе используется классический алгоритм управления волнопродуктором, полученный в рамках линейной теории поверхностных волн.

Безразмерная глубина  $\kappa_0 h$  волнового пакета №1 (таблица 8.1) входит в диапазон промежуточной глубины. В связи с этим, ожидается, что поправки движения волнопродуктора 2-го порядка точности  $X^{(2)}$  и  $X_d^{(2)}$  (7.31) будут играть заметную роль. Принимая во внимание длину одной волновой группы, можно заметить, что на доступной длине лабораторного гидроволнового лотка  $\sim 15$  м уместится четыре полных группы. Причем, первая группа волн будет подвержена искажениям у передней кромки, что делает ее непригод-

Таблица 8.1

Параметры узкополосных волновых пакетов (8.5).

Номер	1	2	3
Средняя глубина $h$ , м		0.6	
Несущий период $T_0$ , сек	1	0.6	0.7
Несущая круговая частота $\omega_0$ , рад/с	6.28	7.85	9.07
Несущая длина волны $\lambda_0$ , м	1.54	1	0.75
Ширина спектра $\Delta\omega$ , рад/с		$\omega_0/10$	
Несущая амплитуда $a_0$ , см	3.43	3.18	2.39
Крутизна волны $\kappa_0 a_0$	0.14	0.2	0.2
Безразмерная глубина $\kappa_0 h$	0.78π	1.2π	1.6π

ной для анализа. Исходя из этого, далее анализируется третья и четвертая группы волн.

С другой стороны, минимизация загрязнения волнового поля отраженными волнами требует измерения высоты свободной поверхности волномерами, расположенными вблизи волнопродуктора. Фактические координаты волномеров были заданы в диапазоне  $0.8 \text{ м} \leq x_p \leq 2.4 \text{ м}$  с шагом 0.2 м.

Амплитудный спектр формы волны  $FFT(\eta)$ , вычисленный при помощи быстрого преобразования Фурье для случая использования классической линейной теории волнопродуктора, показан на рис. 8.10(в). В противоположность численным исследованиям на рис. 8.8, лабораторные измерения показали существование шумов в широком диапазоне частот, что неизбежно в экспериментальных исследованиях. Как и ожидалось, измеренный спектр отличается от целевого, что вызвано существованием паразитных волн и, кроме того, неточностями в эмпирической величине передаточной функции  $\beta \times \Lambda^{(1)}$ . Это также подтверждается из анализа формы свободной поверхности на рис. 8.10(д).

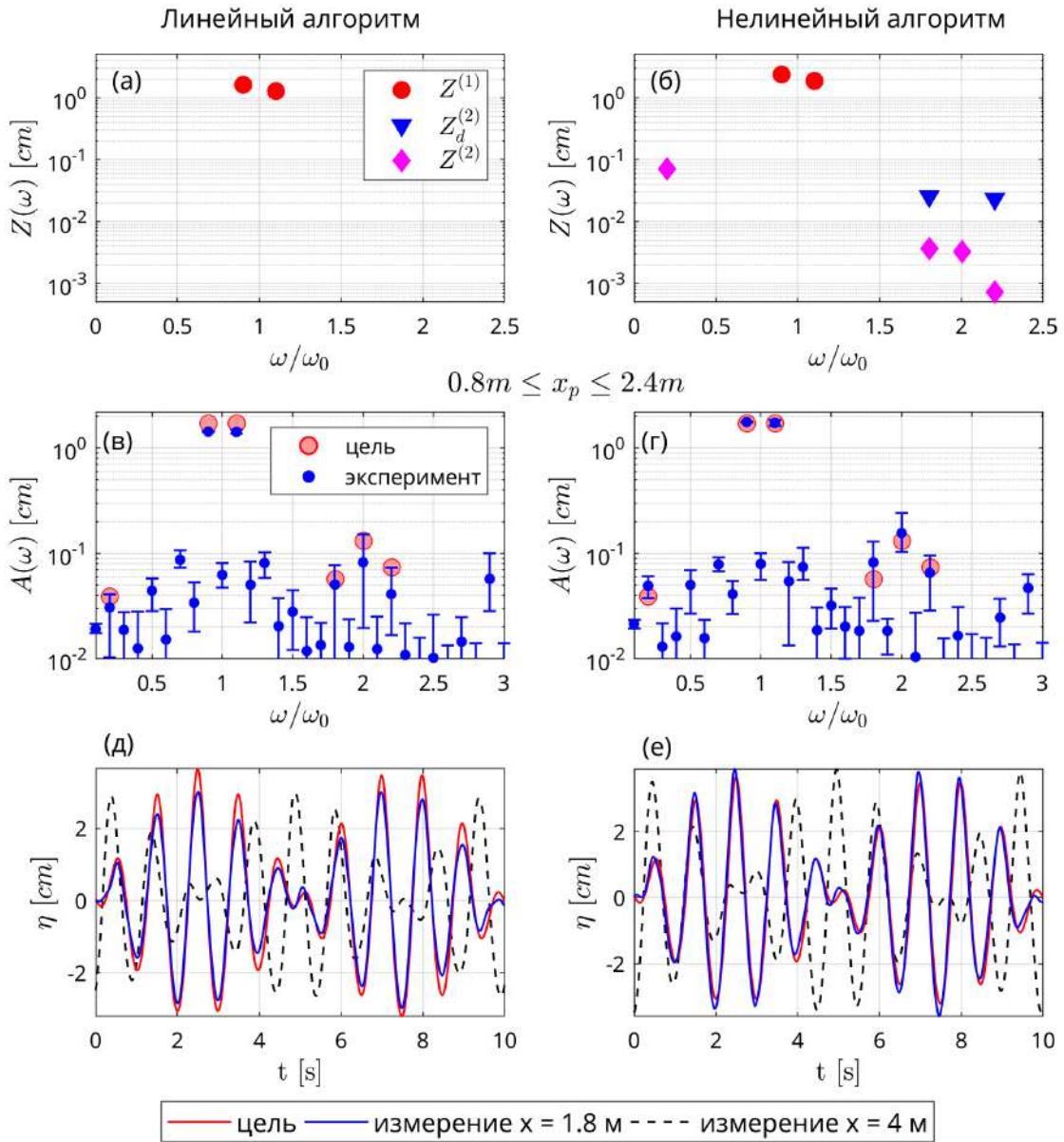


Рис. 8.10. Генерация узкополосного бихроматического пакета свободных волн №1 (таблица 8.1) в лабораторном гидроволновом лотке при помощи шарнирно закрепленного волнопродуктора: (а, в, д) классическая линейная теория волнопродуктора; (б, г, е) новый алгоритм на базе уравнения Захарова. Спектры перемещения поверхности волнопродуктора  $FFT(\eta)$ , полученные при помощи быстрого преобразования Фурье, показаны на подрисунках (а) и (б). Спектры формы волны  $FFT(\eta)$ , измеренной волномерами в диапазоне координат  $0.8 \text{ м} \leq x_p \leq 2.4 \text{ м}$ , показаны на подрисунках (в) и (г). Измеренная волномерами форма волны  $\eta(t)$  сравнивается с целевой на подрисунках (д) и (е).

Применение нового слабо-нелинейного алгоритма на базе уравнения За-

харова, а также откорректированной величины поправочной функции  $\beta$ , позволило практически полностью исключить ошибку генерации волнового пакета. Измеренная форма волны на рис. 8.10(е) практически точно совпадает с целевой формой, что также находит подтверждение при анализе спектра на подрисунке (г).

Рисунок 8.11 исследует точность генерации волновых пакетов №2 и 3 (таблица 8.1) при помощи алгоритма на базе уравнения Захарова. Видно, что измеренные амплитуды очень близки к целевым значениям несмотря на то, что крутизна волны для этих двух случаев значительно выше по сравнению с случаем №1.

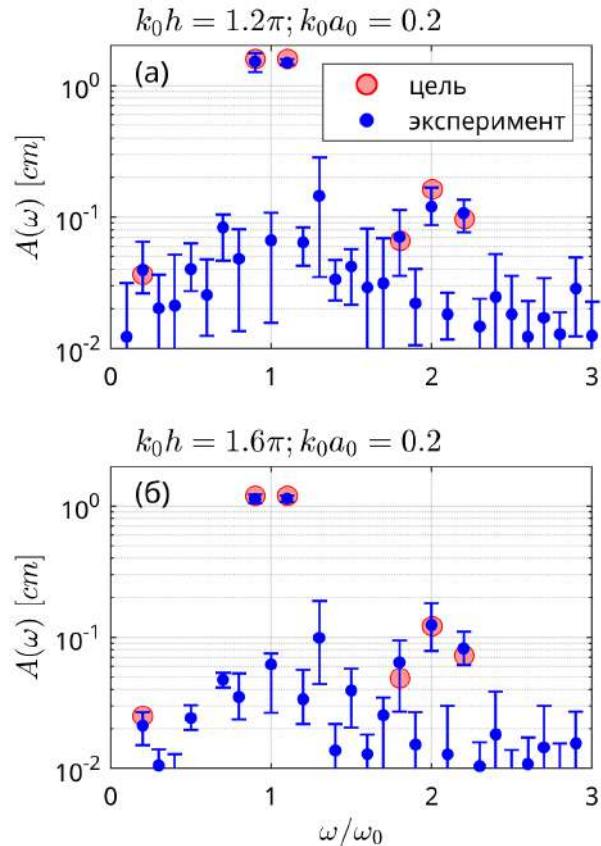


Рис. 8.11. Экспериментальные спектры волн  $FFT(\eta)$ , измеренные волномерами для волновых пакетов №2 и 3 (таблица 8.1). Генерация волновых пакетов осуществлена при помощи слабо-нелинейного алгоритма управления волнопродуктором на базе уравнения Захарова.

На рис. 8.12 исследуется случай еще более сложного широкополосного волнового пакета гауссовой формы (6.4). Параметры волнового паке-

та были выбраны следующим образом:  $m = 0.6$ ;  $T_0 = 0.7$  сек;  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ ;  $\zeta_0 = 3.04$  см;  $\kappa_0 \zeta_0 = 0.25$ ;  $\kappa_0 h = 1.6\pi$ . Исследуемый волновой пакет имеет достаточно высокую крутизну и находится в области глубокой воды ( $\kappa_0 h > \pi$ ).

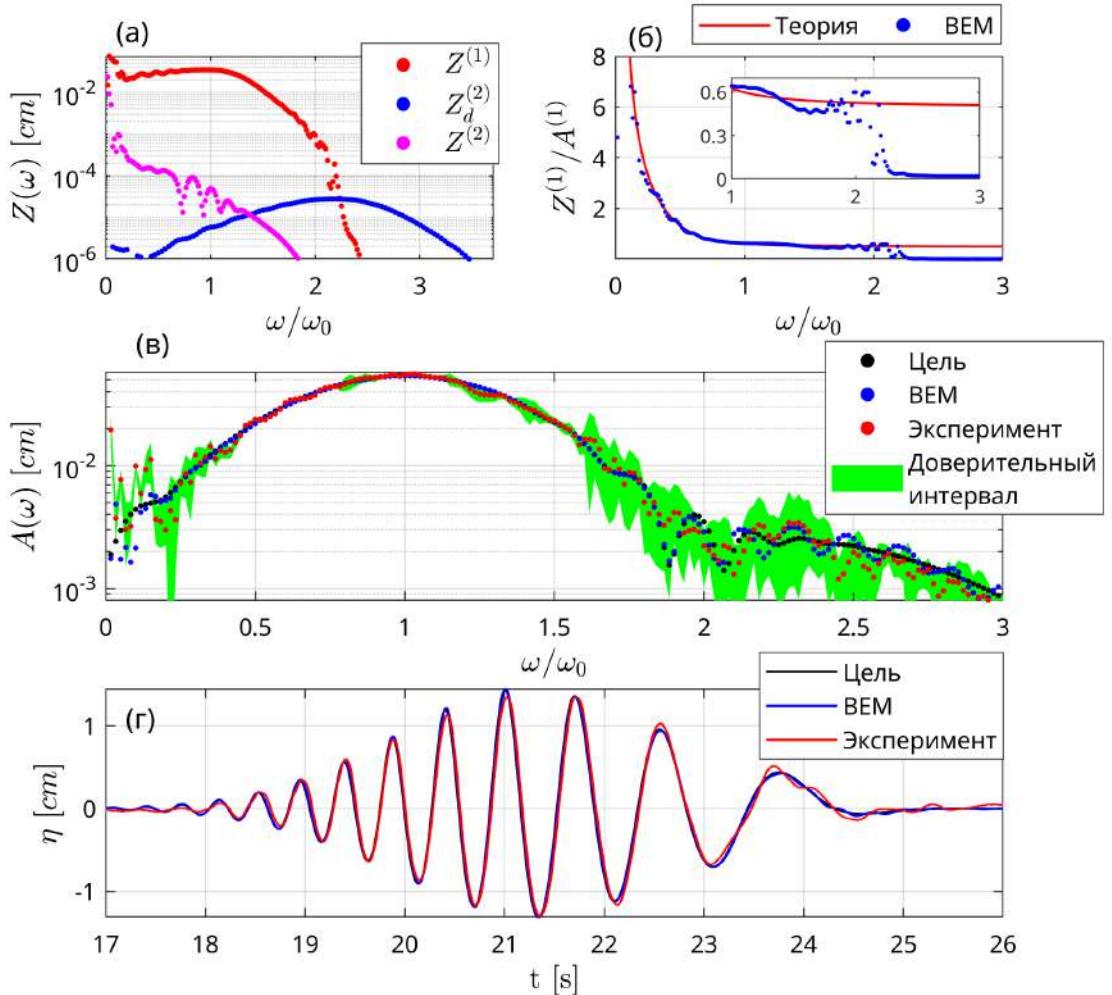


Рис. 8.12. Генерация широкополосного гауссово волнового пакета (6.4) в лабораторном гидроволновом лотке: (а) нелинейный спектр перемещения поверхности волнопродуктора, полученный в рамках алгоритма на базе уравнения Захарова; (б) теоретические и экспериментальные значения передаточной функции  $\Lambda^{(1)}$ ; (в) амплитудный спектр волны, измеренный в координатах  $1.2 \text{ м} \leq x_p \leq 2.6 \text{ м}$ ; (г) форма волны, измеренная волномером в координате  $x_p = 2 \text{ м}$ . ВЕМ - результаты численного эксперимента при помощи модели квазипотенциального течения, повторяющие лабораторные измерения.

Спектр перемещения поверхности волнопродуктора, полученный при помощи алгоритма на базе уравнения Захарова, показан на рис. 8.12(а). Как

видно, он включает линейные гармонические вклады  $Z^{(1)}$ , а также нелинейные поправки  $Z^{(2)}$  и  $Z_d^{(2)}$ . Волномеры покрывали пространственную область лотка в диапазоне координат  $1.2 \text{ м} \leq x_p \leq 2.6 \text{ м}$  с шагом  $0.2 \text{ м}$ .

Рисунок 8.12(в) показывает, что измеренный спектр волны очень хорошо соответствует целевому спектру во всем диапазоне круговых частот с учетом показанного доверительного интервала. Дополнительно к экспериментальным измерениям, на график нанесены результаты расчета в численном гидроволновом лотке для дополнительного подтверждения его высокой точности. Форма волны, измеренная в координате  $x_p = 2 \text{ м}$ , практически точно совпадает с целевой формой, а также с результатами моделирования, как видно из рис. 8.12(г)

## 8.2. Исследование алгоритма на базе уравнения Шредингера

Раздел 8.1. показал, что применение алгоритма управления волнопродуктором на базе уравнения Захарова дает существенное повышение точности генерации волн. Тем не менее, некоторая погрешность в форме волны все равно сохраняется. Это можно объяснить, в первую очередь, ограничением алгоритма вкладами 2-го порядка нелинейности по  $\epsilon$  и пренебрежением вкладами более высоких порядков. В настоящем разделе исследуется алгоритм на базе нелинейного уравнения Шредингера, расширяющий точность до вкладов 3-го порядка по  $\epsilon$  для некоторых типов волновых пакетов.

### 8.2.1. Режимы генерации волн

Алгоритм управления волнопродуктором на базе нелинейного уравнения Шредингера использует форму представления волнового пакета через модулированную комплексную огибающую. Хорошим примером в таком случае может служить волновой пакет с гауссовой огибающей (6.4). Приводя данное выражение к нужной форме (7.34) можно записать:

$$\begin{aligned}\eta^{(1)}(x = x_f, t) &= \frac{1}{2}\psi_0\Psi e^{-i\omega_0 t} + \text{к.с.} \\ \Psi(x = x_f, t) &= \exp\left\{-\left(\frac{t}{mT_0}\right)^2\right\} \exp(-ik_0x_f)\end{aligned}\quad (8.6)$$

где  $x_f$  - положение линейного фокуса, как подробно обсуждается в разделе 6.2.;  $\psi_0$  - амплитудная постоянная;  $\omega_0$  и  $k_0$  - несущая круговая частота и несущее волновое число;  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  - несущий период; безразмерный параметр  $t$  задет ширину спектра волнового пакета.

Поскольку уравнение Шредингера применимо только для волновых пакетов, характеризуемых узкополосным спектром, требуется выполнить соответствующую оценку ширины спектра. Предположим, что энергетический вклад частот в диапазоне  $(\omega_0 - \Delta\omega/2) \leq \omega \leq (\omega_0 + \Delta\omega/2)$  превышает половину максимального вклада в спектре волн. Тогда величину  $\Delta\omega/\omega_0$  принято называть шириной спектра. Для её нахождения можно воспользоваться преобразованием Фурье  $\mathfrak{F}$ :

$$\mathfrak{F}\left(\eta^{(1)}(t)\right) = \frac{\psi_0 m T_0}{2\sqrt{2}} \exp\left\{-\pi^2 m^2 \left(1 + \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\} \left(1 + \exp\left\{4\pi^2 m^2 \frac{\omega}{\omega_0}\right\}\right) \quad (8.7)$$

Ширина спектра находится из решения следующего уравнения:

$$\left(\frac{\mathfrak{F}(\eta^{(1)})}{\psi_0 m T_0 / (2\sqrt{2})}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad (8.8)$$

Решение запишется:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\sqrt{\ln 4}}{\pi m} \quad (8.9)$$

Видно, что варьирование параметром  $t$  напрямую влияет на ширину спектра.

Прежде всего, требуется оценить влияние увеличения ширины спектра на

точность алгоритма генерации волн. Для этого производится прямое сравнение методов на основе уравнения Захарова и уравнения Шредингера, первый из которых никак не ограничен шириной спектра. При этом, в анализ включены только вклады 1-го и 2-го порядков нелинейности по  $\epsilon$ . Отклонение двух алгоритмов друг от друга оценивается по следующей величине, рассчитанной для волнового пакета (8.6):

$$\text{err} = \frac{\left| \max X_S^{(1+2)} - \max X_Z^{(1+2)} \right|}{\left| \max X_Z^{(1+2)} \right|} \quad (8.10)$$

Величина err указывает на относительное отклонение алгоритма на базе уравнения Шредингера от алгоритма на базе уравнения Захарова. Функции перемещения поверхности волнопродуктора  $X_Z$  и  $X_S$  рассчитываются согласно уравнениям (7.31) и (7.53).

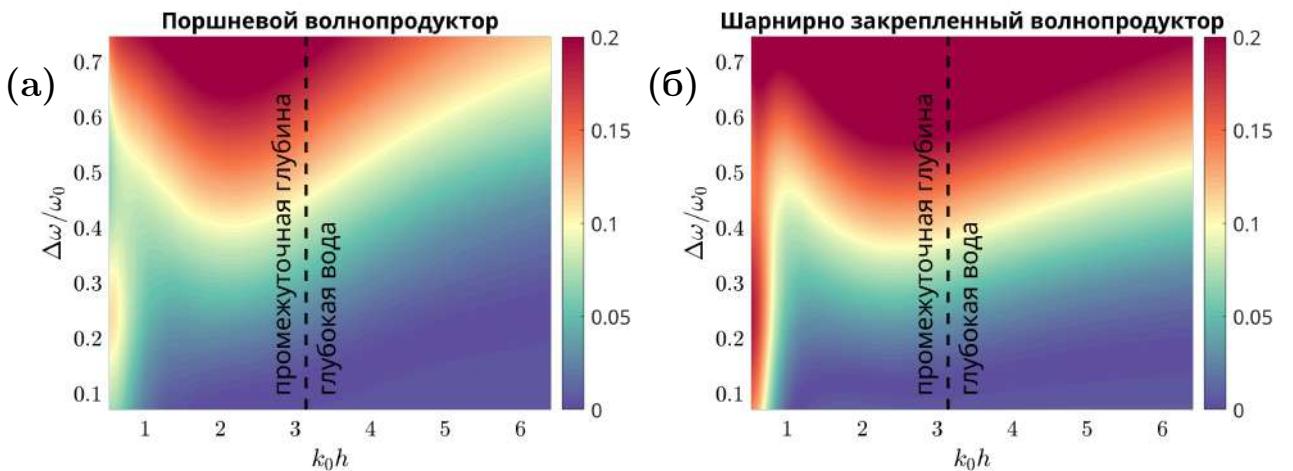


Рис. 8.13. Относительное отклонение алгоритма на базе уравнения Шредингера от алгоритма на базе уравнения Захарова в зависимости от ширины спектра  $\Delta\omega/\omega_0$  и безразмерной глубины воды  $k_0h$ : (а) волнопродуктор поршневого типа ( $L \rightarrow \infty$ ); (б) волнопродуктор закрепленный шарнирно на дне лотка ( $L = 0$ ).

Рисунок 8.13 показывает величину (8.10) в зависимости от ширины спектра  $\Delta\omega/\omega_0$  и безразмерной глубины воды  $k_0h$ . Исследуются волнопродукторы поршневого типа ( $L \rightarrow \infty$ , см. рис. 7.6) и с шарнирным закреплением на дне гидроволнового лотка ( $L = 0$ ). Графики показывают, что бесконечно малая

ширина спектра  $\Delta\omega \rightarrow 0$  приводит к полностью совпадающим результатам вне зависимости от использованного алгоритма, т.е.  $\text{err} \rightarrow 0$  (8.10). Причем, глубина воды в этом случае не оказывает влияния на точность результатов.

С другой стороны, как и ожидалось, увеличение ширины спектра приводит к нарастанию погрешности алгоритма на базе уравнения Шредингера. Скачкообразное ухудшение результатов наблюдается при  $\Delta\omega/\omega_0 > 0.4$ . Однако уже при  $\Delta\omega/\omega_0 \sim 0.2$  наблюдается ненулевое отклонение. Таким образом, требуется указать ширину спектра  $\Delta\omega/\omega_0 \approx 0.2$  в качестве предельно допустимой для алгоритма на базе нелинейного уравнения Шредингера.

### 8.2.2. Численные исследования

Как уже отмечалось выше по тексту, особенную сложность представляет задача генерации волнового пакета в условиях режима промежуточной глубины воды, т.е при  $0.1\pi < \kappa_0 h < \pi$ . Для выдерживания данного режима требуется уменьшить глубину воды до  $h = 0.036$  м. Столь существенное понижение глубины воды невозможно в лабораторном гидроволновом лотке в связи с механическими особенностями установленного волнопродуктора. Исходя из этого, исследование генерации волн в режиме промежуточной глубины осуществляется при помощи численного гидроволнового лотка и модели квазипотенциального течения на основе Метода Границных Элементов (ВЕМ), разработанного и исследованного в главах 3 и 6 настоящей диссертации (см. рис. 3.8).

Для исследования выбран гауссов волновой пакет (8.6) со следующими параметрами: несущий период  $T_0 = 0.7$  с, несущая длина волны  $\lambda_0 = 0.395$  м, крутизна (7.37) волнового пакета  $\kappa_0\psi_0 = 0.06$ . Для указанных параметров безразмерная глубина равна  $\kappa_0 h = 0.572 < \pi$  и лежит в диапазоне режима промежуточной глубины. Выбор параметра  $m = 3$  обеспечивает узкий спектр  $\Delta\omega/\omega_0 = 0.125$ . Длина домена численного гидроволнового лотка выбрана рав-

ной 10 м, в то время как полная длина волнового пакета не превышает 5 м. Этим гарантируется достаточно место для размещения полной длины волнового пакета в расчетной области численного лотка.

На начальном этапе, рассматривается применение простейшей линейной теории волнопродуктора для генерации заданного волнового пакета. Поверхность поршневого волнопродуктора перемещается по закономерности  $X = X^{(1)}$  (7.53). Как видно из рис. 8.14(а), в данном случае фиксируется порождение значительных “паразитных волн” на частотах  $\omega_0$ ,  $2\omega_0$  и  $3\omega_0$ .

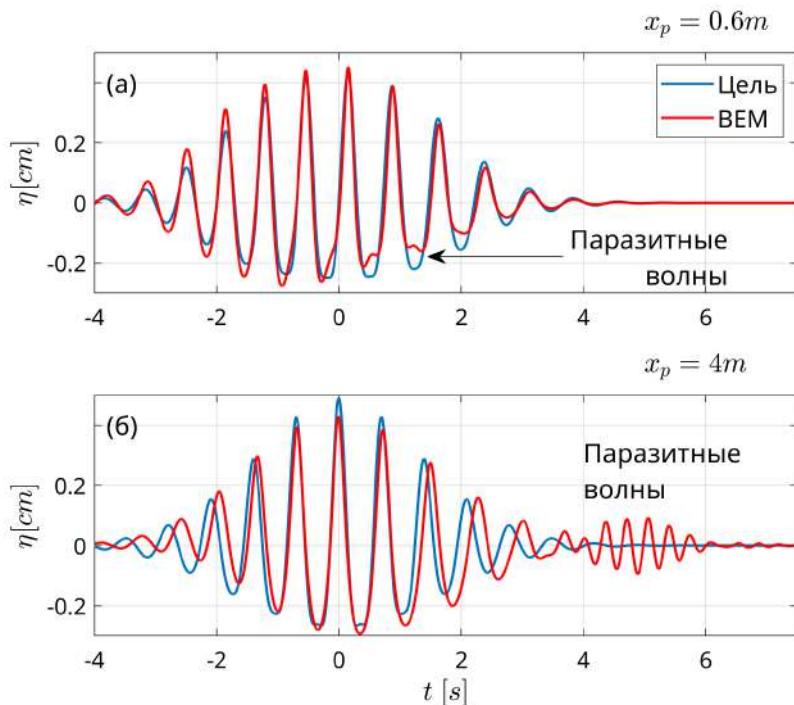


Рис. 8.14. Генерация гауссова волнового пакета (8.6) в режиме промежуточной глубины  $0.1\pi < (\kappa_0 h = 0.572) < \pi$  при помощи простейшей линейной теории волнопродуктора.

Моделирования выполнено при помощи численного гидроволнового лотка (ВЕМ):  
 (а) форма волны в координате  $x_p = 0.6$  м; (б) форма волны в координате  $x_p = 4.0$  м.

Если в координате  $x_p = 0.6$  м паразитные волны складываются с волновым пакетом, то на большей дистанции от волнопродуктора  $x_p = 4.0$  м паразитные волны отделяются от волнового пакета (см. рис. 8.14(а) и (б)). Это вызвано тем, что паразитные волны распространяются на меньшей групповой скорости по сравнению с целевым волновым пакетом. Следует отме-

тить, что групповая скорость (3.16) целевого волнового пакета составляет  $c_g(\omega_0) = 0.512$  м/с, в то время как скорость паразитных волн на частоте  $2\omega_0$  составляет  $c_g(2\omega_0) = 0.326$  м/с.

Рисунок 8.15(а) показывает, что поправки 2-го порядка нелинейности в движении волнопродуктора ( $X^{(2)} + X_d^{(2)}$ ) составляют около 10% от основного вклада 1-го порядка  $X^{(1)}$ . Столь значительная величина поправки говорит о нелинейном характере исследуемой задачи генерации поверхностной волны. Форма волны, полученная с учетом поправки 2-го порядка в движении волнопродуктора, указывает на явное отсутствие значительных паразитных волн, как видно из рис. 8.15(б). Тем не менее, численные расчеты указывают на то, что форма волны все еще отличается от целевой.

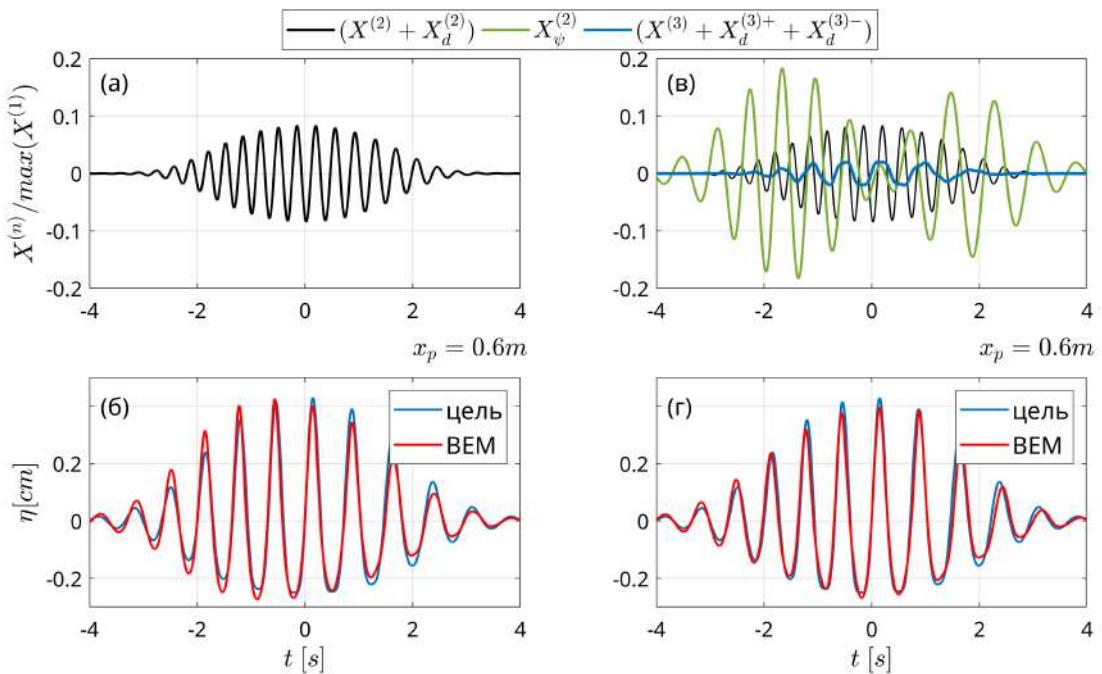


Рис. 8.15. Нелинейная генерация волнового пакета (8.6) в режиме промежуточной глубины  $0.1\pi < (\kappa_0 h = 0.572) < \pi$  в численном гидроволновом лотке при помощи алгоритма на базе нелинейного уравнения Шредингера: (а) поправка 2-го порядка точности в движении волнопродуктора ( $X^{(2)} + X_d^{(2)}$ ); (б) форма волны  $\eta(x = x_p, t)$ , полученная в координате  $x_p = 0.6$  м при помощи движения волнопродуктора, показанного на подрисунке (а); (в) поправки 2-го и 3-го порядков в движении волнопродуктора; (г) форма волны, полученная движением волнопродуктора, показанным на подрисунке (в). ВЕМ - модель численного гидроволнового лотка.

Для исправления данной ситуации, в движение волнопродуктора добавляются поправки 3-го порядка нелинейности  $X^{(3)} + X_d^{(3)-} + X_d^{(3)+}$ , как по-

казано на рис. 8.15(в). Также в расчет добавляется поправка 2-го порядка нелинейности  $X_{\psi}^{(2)}$ ; см. уравнение (7.53). Из графиков видно, что поправка  $X_{\psi}^{(2)}$  является наиболее существенной. Тем не менее, поправки 3-го порядка также играют определенную роль.

Применение наиболее полного выражения для движения волнопродуктора 3-го порядка (7.53) приводит к резкому улучшению точности генерации волнового пакета, как видно из рис. 8.15(г). Видно, что в данном случае синтезированная форма волнового пакета очень точно совпадает с целевой.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о предпочтительности алгоритма управления волнопродуктором на базе уравнения Шредингера для волновых пакетов с узкополосным спектром  $\Delta\omega/\omega_0 \leq 0.2$ . В этих случаях выдерживаются ограничения алгоритма, а также возникает возможность повышения точности генерации волны за счет учета вкладов 3-го порядка в движение волнопродуктора (7.53). С другой стороны, волновые пакеты с широкополосным спектром  $\Delta\omega/\omega_0 > 0.2$  требуют применения алгоритма на базе уравнения Захарова.

### 8.2.3. Экспериментальные исследования

Исследование алгоритма генерации волн на базе нелинейного уравнения Шредингера в условиях глубокой воды ( $\kappa_0 h > \pi$ ) выполнялось в лабораторном гидроволновом лотке Тель-Авивского университета (рис. 6.1). Глубина воды в лотке остается неизменной и равной  $h = 0.6$  м. Несущий период и частота волнового пакета (8.6) выбраны равными  $T_0 = 0.7$  с и  $\omega_0 = 8.976$  рад/с. Несущая длина волны, определяемая дисперсионным соотношением (1.61), составляет  $\lambda_0 = 0.765$  м. Тогда безразмерная глубина воды находится в диапазоне режима глубокой воды, а именно  $\kappa_0 h = 4.928 > \pi$ . Координата линейного фокуса волнового пакета (8.6) выбрана равной  $x_f = 4$  м, а амплитудный параметр  $\psi_0$  выбран так, чтобы обеспечить крутизну волны (7.37) равную

$$\kappa_0 \psi_0 = 0.216.$$

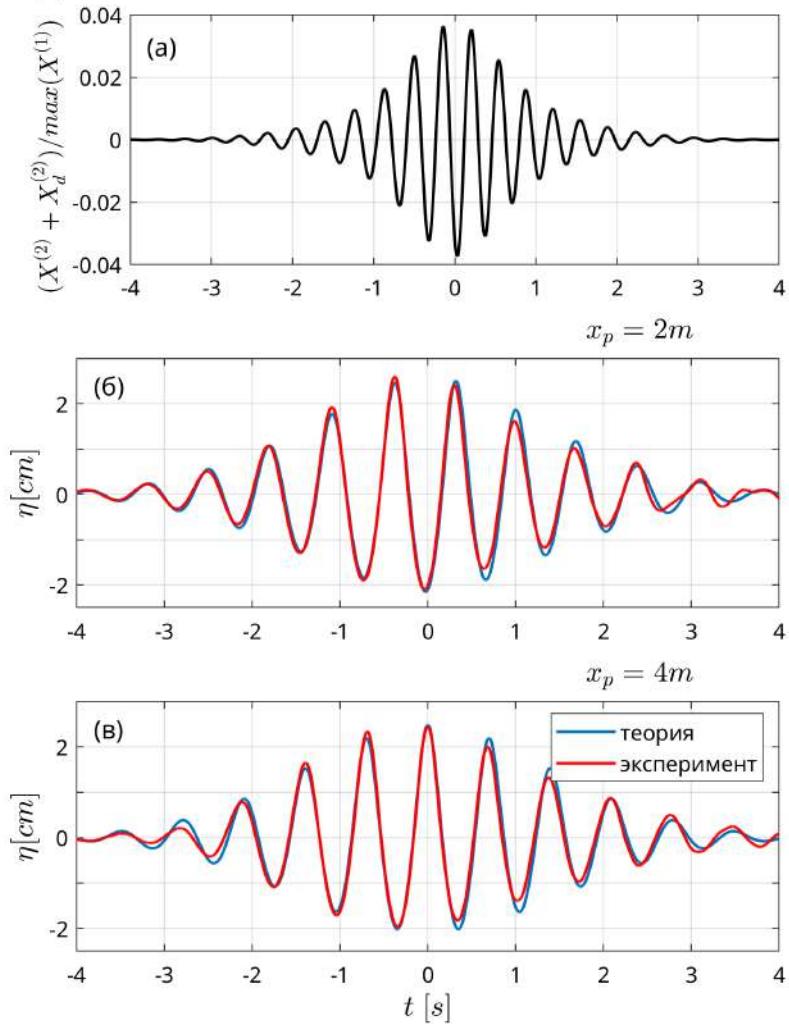


Рис. 8.16. Нелинейная генерация волнового пакета (8.6) с узкополосным спектром в лабораторном лотке Тель-Авивского университета при помощи алгоритма на базе уравнения Шредингера: (а) поправка 2-го порядка нелинейности в движение волнопродуктора; (б) сравнение высоты свободной поверхности  $\eta(x = x_p, t)$ , измеренной лабораторным волномером в координате  $x_p = 2$  м, с целевой формой волны; (в) в координате  $x_p = 4$  м. Параметр ширины спектра выбран равным  $m = 3$ , что соответствует ширине спектра  $\Delta\omega/\omega_0 = 0.125$ . Параметр крутизны волнового пакета (7.37) выбран равным  $\kappa_0 \psi_0 = 0.216$ .

На рис. 8.16(а) показана поправка 2-го порядка в движение лабораторного шарнирно закрепленного волнопродуктора. Видно, что она достигает порядка 4% от основного движения на 1-ом порядке  $X^{(1)}$ . Экспериментальные измерения формы волны в координате  $x_p = 2$  м, представленные на рис. 8.16(б),

демонстрируют высокую точность алгоритма на базе нелинейного уравнения Шредингера для узкополосных волновых пакетов в условиях глубокой воды. Более того, опираясь на рис. 8.16(в) можно заключить, что высокая точность формы волны сохраняется на большом удалении от волнопродуктора в координате  $x_p = 4$  м и далее.

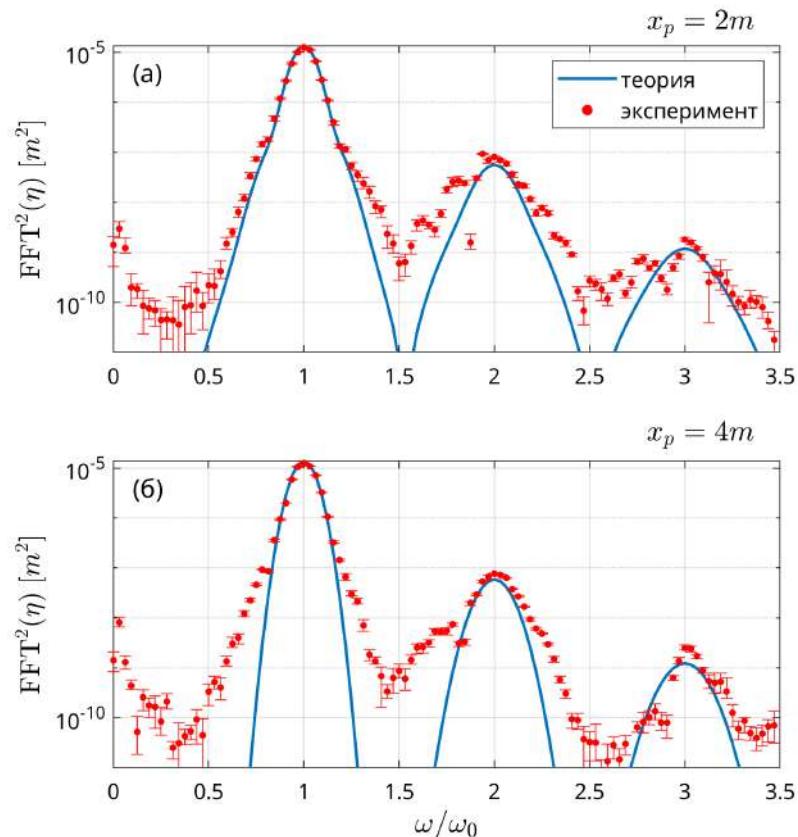


Рис. 8.17. Дискретные энергетические спектры, вычисленные при помощи быстрого преобразования Фурье  $\text{FFT}^2(\eta)$  для экспериментальных измерений, показанных на рис. 8.16 (б) и (в).

Энергетические спектры  $\text{FFT}^2(\eta)$ , рассчитанные для экспериментальных измерений волнового пакета на рис. 8.16(б) и (в), изображены на рис. 8.17(а) и (б), соответственно. Графики показывают очень хорошее совпадение лабораторных измерений с целевыми графиками в области пиковых значений. Некоторое расхождение экспериментальных данных с целевыми графиками на других круговых частотах вызвано, прежде всего, шумами в

волновых полях, механическими неточностями волнопродуктора и другими неучтанными факторами, которые неизбежно проявляются в лабораторных исследованиях.

Рисунок 8.18 показывает результат генерации волнового пакета (8.6) в абсолютно тех же условиях, но с уменьшенным параметром  $m$ . Выбор  $m = 0.5$  приводит к широкополосному спектру  $\Delta\omega/\omega_0 = 0.7496 > 0.2$ . В этом случае нелинейное уравнение Шредингера теряет свою применимость, что, как ожидается, должно вызвать нарастание ошибки в форме сгенерированной волны.

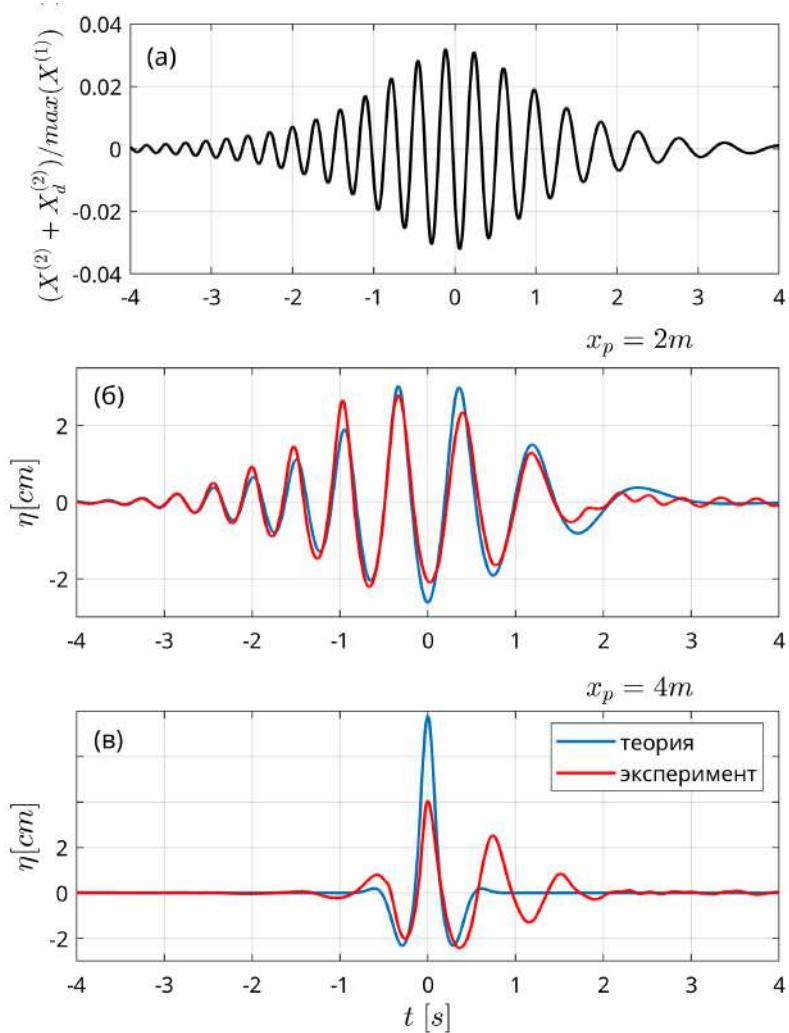


Рис. 8.18. Как на рис. 8.16 для широкополосного волнового пакета. Параметр ширины спектра равен  $m = 0.5$ , что соответствует ширине спектра  $\Delta\omega/\omega_0 = 0.7496$ . Параметр крутизны волнового пакета равен  $\kappa_0\psi_0 = 0.186$ .

Приведенные графики показывают расхождение лабораторных измере-

ний с целевой функцией уже вблизи волнопродуктора, в координате  $x_p = 2$  м. По мере удаления от волнопродуктора, погрешности нарастают и становятся драматически большими в координате фокуса  $x_p = x_f = 4$  м.

Рисунок 8.19 исследует энергетические спектры волновых пакетов, измеренных в лаборатории и изображенных на рис. 8.18 (б) и (в). Вблизи волнопродуктора ( $x_p = 2$  м), лабораторные измерения достаточно хорошо совпадают с целевым графиком как с точки зрения положения пика спектра, так и с точки зрения ширины спектра. Однако по мере удаления от волнопродуктора погрешность быстро нарастает. В координате линейного фокуса  $x_p = x_f = 4$  м, измеренный энергетический спектр становится значительно уже целевого, а его пик смещается в область низких частот.

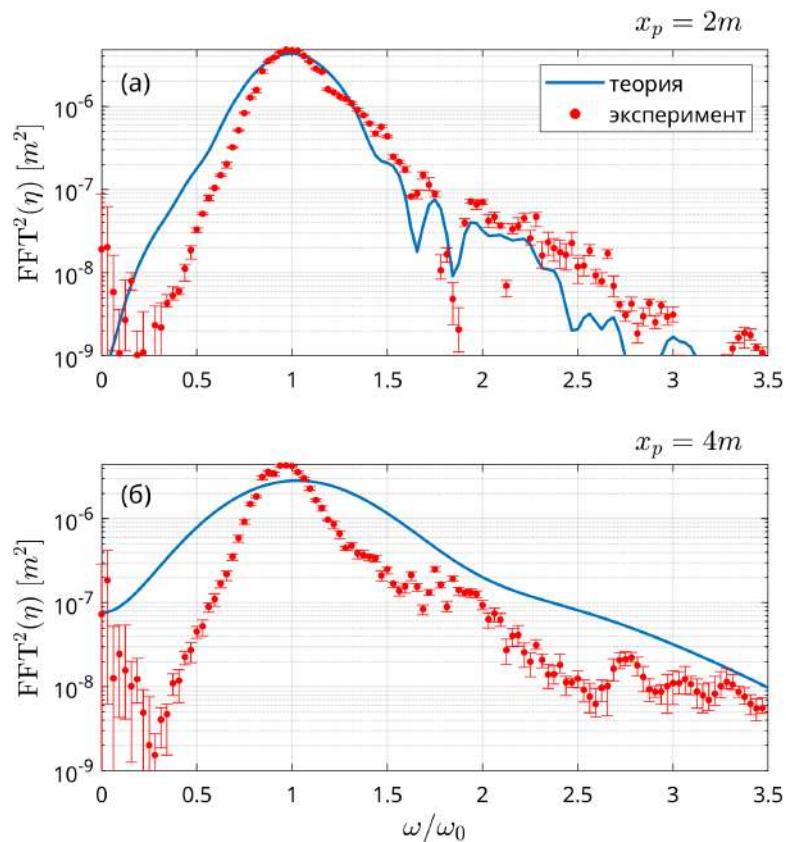


Рис. 8.19. Как на рис. 8.17 для широкополосного волнового пакета.

Приведенные исследования дополнительно подчеркивают применимость алгоритма генерации волн на базе уравнения Шредингера только для волно-

вых пакетов с узкополосным спектром  $\Delta\omega/\omega_0 \leq 0.2$ . В случае превышения указанного порога требуется применение алгоритма на базе уравнения Захарова, подробно исследованного выше по тексту.

### 8.3. Итерационный метод повышения точности генерации волн

Новые слабо-нелинейные алгоритмы управления волнопродуктором на базе уравнений Захарова и Шредингера показали свою применимость в широком диапазоне режимов. Они позволяют в значительной степени подавить рождение “паразитных волн” и, тем самым, в значительной степени повысить точность генерации волновых пакетов. Тем не менее, некоторая погрешность в форме и спектре свободной поверхности, измеренных в непосредственной близости от волнопродуктора, сохраняется во всех случаях. См., например, рис. 8.9, 8.10, 8.15, 8.16.

Для дальнейшего повышения точности генерации поверхностных волн, в настоящем разделе предлагается и исследуется новый итерационный метод, основанный на работах [392, 393, 426]. Отличительная особенность нового итерационного метода состоит в использование численного гидроволнового лотка, разработанного в главах 3 и 6 настоящей диссертации.

#### 8.3.1. Сильно нелинейный волновой пакет

Рассматривается гауссов волновой пакет (6.4) со значительной величиной крутизны  $\epsilon = \kappa_0\zeta_0 = 0.21$ . Параметр ширины спектра выбран равным  $m = 1.2$ , период несущей волны  $T_0 = 0.7$  с, координата линейного фокуса  $x_f = 4$  м, средняя глубина воды  $h = 0.6$  м; длина расчетной области численного гидроволнового лотка  $L_\Omega = 6$  м. Требуется получить целевую форму волнового пакета на расстоянии  $x_t = 3.3h = 2$  м от шарнирно закрепленного волнопродуктора. Дисперсионное соотношение (1.61) дает длину несущей волны  $\lambda_0 = 0.765$  м и безразмерную глубину воды  $\kappa_0 h = 1.569\pi > \pi$ , что со-

ответствует режиму глубокой воды.

Далее требуется использовать один из новых алгоритмов управления волнопродуктором на базе уравнений Захарова или Шредингера для вычисления функции перемещения поверхности волнопродуктора  $X(t)$ , см. уравнения (7.31) и (7.53). Выполняя высокоточное численное моделирования процесса генерации волнового пакета при помощи модели квазипотенциального течения (3.9) на базе метода граничных элементов ВЕМ, можно определить форму волны в требуемой координате  $\eta(x = x_t, t)$ . Используя быстрое преобразование Фурье (FFT) вычисляется дискретный спектр  $A(\omega) = \text{FFT}(\eta)$  волнового пакета, приведенный на рис. 8.20(а).

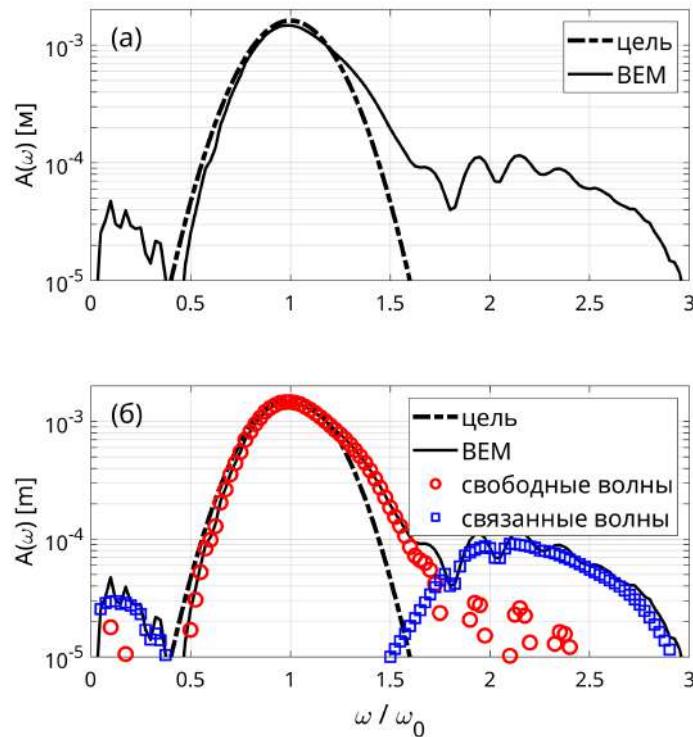


Рис. 8.20. Разделение дискретного спектра на свободные волны 1-го порядка и связанные волны 2-го и 3-го порядков. ВЕМ - результаты численного моделирования. Сильно нелинейный волновой пакет.

Сравнения спектр, полученный в численном волновом лотке, с целевым спектром на рис. 8.20(а) можно заметить их существенное отличие. Это вызвано тем, что измеренный в модели спектр содержит как вклады свободных волн 1-го порядка, так и вклады связанных волн 2-го, 3-го и более высоких

порядков. Далее требуется отфильтровать вклад связанных волн из спектра пользуясь методом на базе теории Захарова, обсуждаемым в работах [392, 393]. Разновидность данного подхода уже обсуждалась в разделе 6.3.2. настоящей диссертации.

Предполагается, что смоделированную форму волны  $\eta^{BEM}$  можно записать как сумму вкладов на разных порядках нелинейности по  $\epsilon$  (6.16):

$$\eta^{BEM} = \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \eta^{(3)} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \quad (8.11)$$

Причем, вклады связанных волн 2-го и 3-го порядков  $\eta^{(2)}$  и  $\eta^{(3)}$  определяются теорией Захарова опираясь на форму свободной волны 1-го порядка  $\eta^{(1)}$ ; см. уравнения (1.71) и (1.72). Таким образом, зная результаты численного моделирования  $\eta^{BEM}$  и пользуясь формулой (8.11), можно определить вклад свободных волн 1-го порядка  $\eta^{(1)}$  итерационным способом. В результате данный метод позволяет выделить в сложном спектре вклады свободных и связанных волн разных порядков.

Применение итерационного метода (8.11) к смоделированному спектру волн дает результат, показанный на рис. 8.20(б). Видно, что амплитуды связанных волн примерно на порядок меньше амплитуд свободных волн. Тем не менее, их вклад существенен, и им пренебрегать нельзя.

Отличия полученного спектра свободных волн 1-го порядка от целевого спектра можно исправить проводя итерационную корректировку эмпирической функции  $\beta$ ; см. рис. 8.5 и 8.6. Предположим, что на итерации номер  $j$  численно получен спектр свободных волн с амплитудами  $A_j$  и фазами  $\phi_j$ , которые отличаются от целевых на следующие величины:  $\Delta A = A_j - A_{\text{цель}}$  и  $\Delta \phi = \phi_j - \phi_{\text{цель}}$ . Тогда величина  $\beta$  и фазы движения волнопродуктора на

следующей итерации  $j + 1$  будут вычисляться следующим образом:

$$\begin{cases} \beta_{j+1} = \beta_j + c\Lambda^{(1)}\Delta A \\ \phi_{\text{волнопродуктор},j+1} = \phi_{\text{волнопродуктор},j} + \Delta\phi \end{cases} \quad (8.12)$$

где  $c$  - некоторый безразмерный коэффициент, от выбора которого зависит скорость сходжения итерационной схемы.

Вычисления показали, что итерационная схема (8.12) сходится быстро при правильном выборе коэффициента  $c$ . В таблице 8.2 приведены величины ошибки генерации рассматриваемого волнового пакета на различных итерациях. Видно, что уже на второй итерации среднеквадратичная ошибка генерации волнового пакета значительно снижается.

Таблица 8.2  
Сходимость итерационной схемы (8.12) для сильно нелинейного гауссово волнового пакета.

Номер итерации	Ошибка генерации $\left\langle (\eta_{BEM} - \eta_{цель})^2 \right\rangle^{0.5} /  \eta_{цель} _{max}$
1	26.3%
2	1.43%
3	1.05%
4	1.01%

Рисунок 8.21 показывает смоделированные амплитудные спектры и разницу фаз  $\Delta\phi$  для первой и последней итерации. Видно, что итерационная корректировка фактически исключила ошибки генерации волнового пакета. Подтверждение этому дают также результаты физических экспериментов, проведенных в гидроволновом лотке (рис. 6.1 и 6.2). Несколько более значительная ошибка генерации волнового пакета на рис. 8.22, по сравнению с численными экспериментами (рис. 8.21), объясняется механическими неточностями исполнительных механизмов привода волнопродуктора и другими шумами, неизбежными при проведении лабораторных исследований.

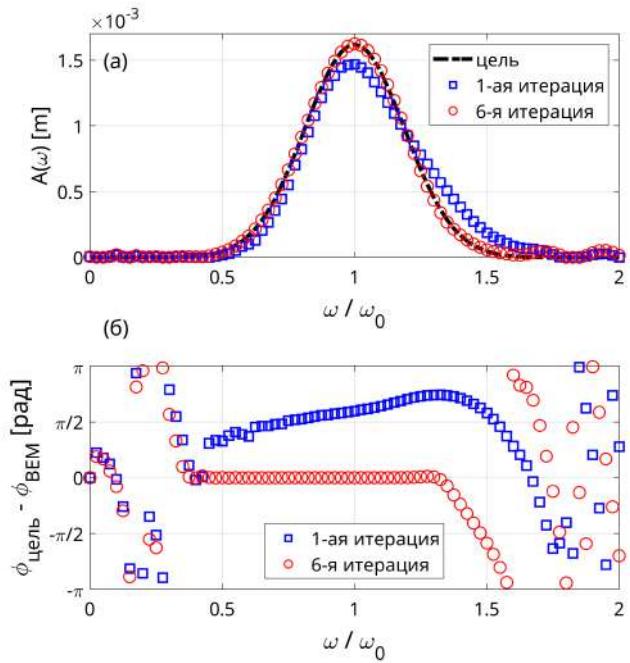


Рис. 8.21. Итерационная корректировка поправочной функции  $\beta$  в передаточной функции 1-го порядка  $\beta \times \Lambda^{(1)}$ , а также фаз гармонических компонент движения волнопродуктора  $\phi$ . Сильно нелинейный волновой пакет.

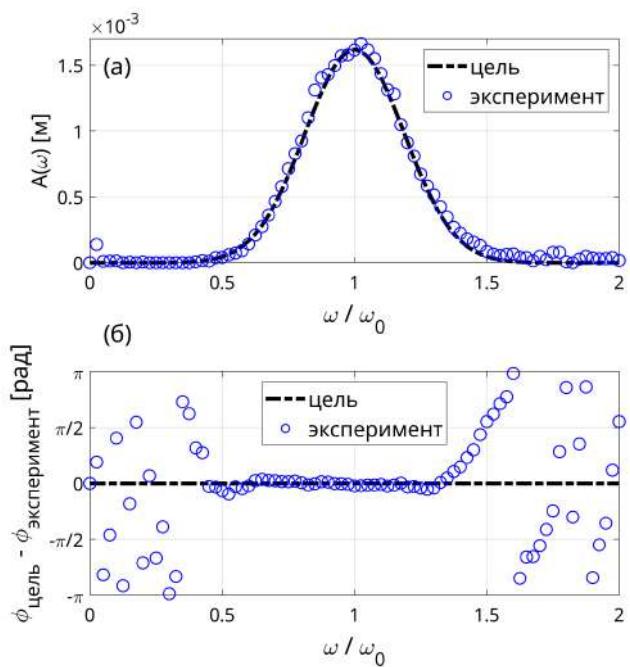


Рис. 8.22. Измеренный спектр свободных волн в лабораторном гидроволновом лотке после процедуры итерационной корректировки (8.12). Сильно нелинейный волновой пакет.

Финальный вид волнового пакета (после итерационной корректировки), смоделированный в численном гидроволновом лотке (ВЕМ), а также измеренный в лабораторном лотке, показан на рис. 8.23. Сравнивая графики с целевой формой волнового пакета можно заметить, что ошибка генерации волнового пакета была минимизирована.

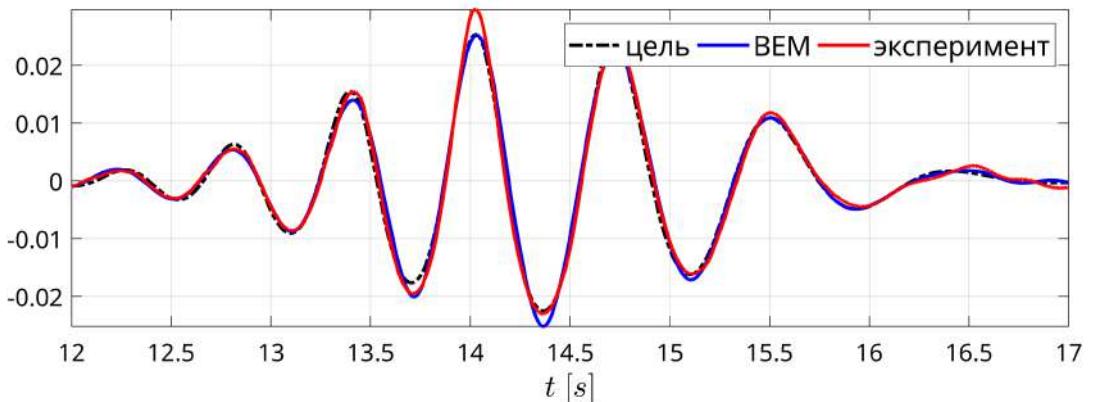


Рис. 8.23. Сравнение смоделированного и экспериментально измеренного волнового пакета с целевой формой волны. Измерения выполнены в координате  $x_t = 2$  м. Сильно нелинейный волновой пакет.

### 8.3.2. Слабо нелинейный волновой пакет

Аналогичные численные и экспериментальные исследования были выполнены для волнового пакета (6.4) с меньшим параметром крутизны  $\epsilon = \kappa_0 \zeta_0 = 0.12$  (слабо нелинейный случай). Фокальная точка была смешена дальше от волнопродуктора в координату  $x_f = 8.5$  м. Процесс разделения свободных волн 1-го порядка и связанных волн 2-го и 3-го порядков показан на рис. 8.24. В данном случае, области спектров свободных и связанных волн практически не перекрываются, что делает процесс их разделения значительно проще. Фактически, применение сложной теории Захарова можно заменить простым частотным фильтром.

Итерационная корректировка амплитудного и фазового спектров по прежнему выполняется при помощи численного гидроволнового лотка. Аналогичное быстрое схождение итерационного процесса (8.12) показано в таб-

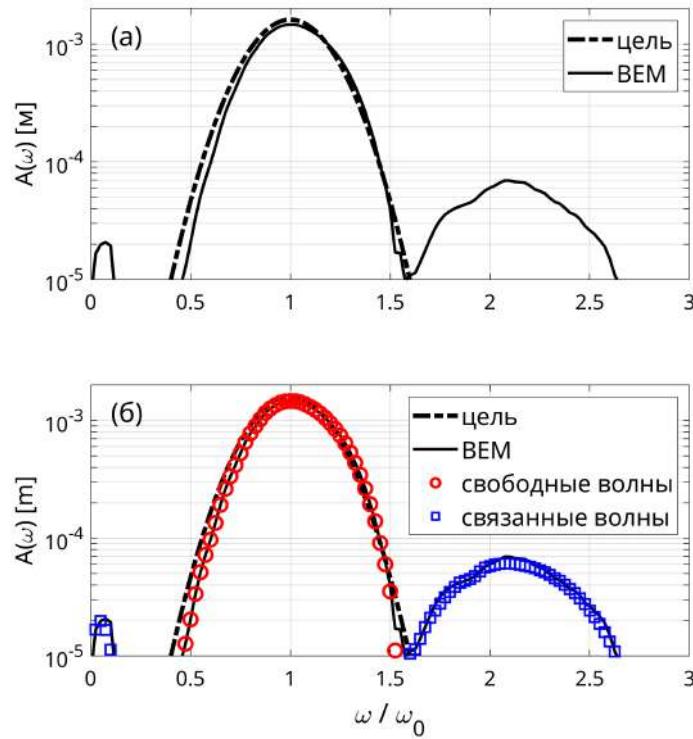


Рис. 8.24. Разделение дискретного спектра на свободные волны 1-го порядка и связанные волны 2-го и 3-го порядков. ВЕМ - результаты численного моделирования. Слабо нелинейный волновой пакет.

лице 8.3. Однако в данном случае финальная ошибка генерации волнового пакета составила порядка 0.5%, в отличие случая сильно нелинейного волнового пакета, где ошибка была равной  $\sim 1\%$ .

Таблица 8.3  
Сходимость итерационной схемы (8.12) для слабо нелинейного гауссово волнового пакета.

Номер итерации	Ошибка генерации $\left\langle (\eta_{BEM} - \eta_{цель})^2 \right\rangle^{0.5} /  \eta_{цель} _{max}$
1	40.5%
2	1.12%
3	0.67%
4	0.60%
5	0.59%

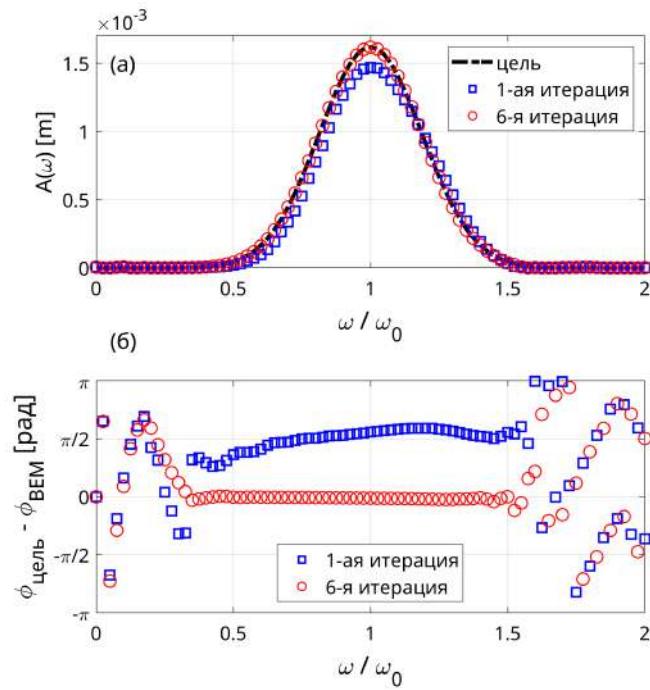


Рис. 8.25. Итерационная корректировка поправочной функции  $\beta$  в передаточной функции 1-го порядка  $\beta \times \Lambda^{(1)}$ , а также фаз гармонических компонент движения волнопродуктора  $\phi$ . Слабо нелинейный волновой пакет.

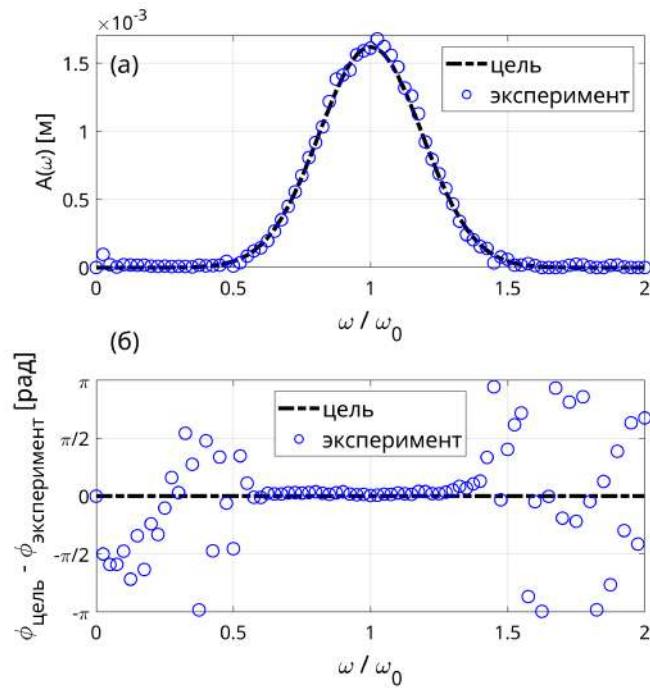


Рис. 8.26. Измеренный спектр свободных волн в лабораторном гидроволновом лотке после процедуры итерационной корректировки (8.12). Слабо нелинейный волновой пакет.

Результаты численных и лабораторных экспериментов со слабо нелинейным волновым пакетом представлены на рис. 8.25 и 8.26, соответственно. В то же время, экспериментально измеренная форма волнового пакета в координате  $x_p = 2$  м сравнивается с моделью и целевой формой на рис. 8.27. В целом можно заключить, что ошибка генерации слабо нелинейного волнового пакета ниже по сравнению с сильно нелинейным случаем. Это объясняется тем, что с ростом параметра крутизны волн  $\epsilon = k_0 \zeta_0$  и, соответственно, высоты волны, усложняются нелинейные физические процессы в течении жидкости.

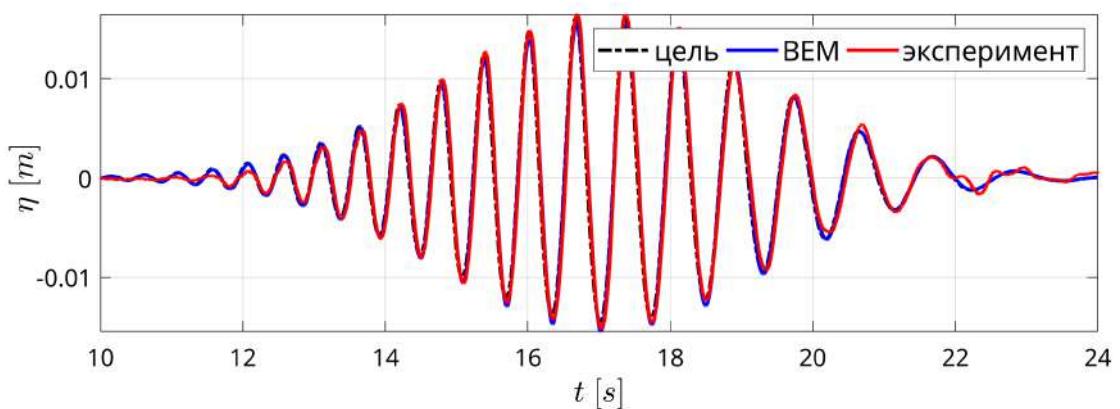


Рис. 8.27. Сравнение смоделированного и экспериментально измеренного волнового пакета с целевой формой волны. Измерения выполнены в координате  $x_t = 2$  м. Слабо нелинейный волновой пакет.

## 8.4. Выводы по главе

- Проведено исследование отклонения нового алгоритма управления волнопродуктором на базе уравнения Захарова от теории Шаффера. Установлено, что данное отклонение не превышает 1.5% для широкого диапазона режимов генерации волн. Причем, это выполняется как для волнопродуктора поршневого типа, так и для шарнирно закрепленного волнопродуктора. Более того, отклонение практически исчезает в режиме глубокой воды для безразмерной глубины  $\kappa h > \pi$ .
- Установлено, что фактически измеренные в лаборатории значения передаточной функции 1-го порядка  $\Lambda^{(1)}$  могут значительно отличаться

(более 15%) от теоретических значений. Это наблюдение хорошо согласуется с рядом литературных источников [405, 425]. В исследовании установлено, что данное отклонение вызвано, прежде всего, формированием сложных вихревых течений в непосредственной близости от волнопродуктора.

3. Для исключения возникающих погрешностей требуется эмпирическая корректировка величины передаточной функции путем введения функции  $\beta$ , а именно  $\Lambda_{\text{эксперимент}}^{(1)} = \beta \times \Lambda_{\text{теория}}^{(1)}$ . Серия численных экспериментов, проведенная при помощи высокоточного численного гидроволнового лотка, разработанного в главах 3 и 6, показала среднее значение  $\langle \beta \rangle = 1.0944$  для поршневого волнопродуктора, и  $\langle \beta \rangle = 1.0893$  - для шарнирно закрепленного, с учетом крутизны волны  $\epsilon = 0.25$ .
4. На практике особенную сложность представляют задачи генерации поверхностных волн при уменьшении глубины воды, т.е. режимы мелкой воды  $\zeta h < 0.1\pi$  и промежуточной глубины  $0.1\pi \leq \zeta h \leq \pi$ . Исследование таких режимов не представляется возможным в лабораторном гидроволновом лотке, используемом в настоящей диссертации, в связи с механическими ограничениями привода установленного волнопродуктора. Вместо этого, исследования выполнены в высокоточном численном гидроволновом лотке, разработанном в главах 3 и 6.
5. Исследования алгоритмов управления волнопродуктором в условиях глубокой воды ( $\zeta h > \pi$ ) выполнено в лабораторном гидроволновом лотке Тель-Авивского университета, средняя глубина воды в котором составляла  $h = 0.6$  м. Лабораторный лоток имеет длину 18 м, оборудован шарнирно закрепленным волнопродуктором с автоматизированным компьютерным управлением. Программное обеспечение лабораторного лотка было дополнено новыми алгоритмами управления волнопродуктором на базе уравнений Захарова и Шредингера.
6. Лабораторные и численные исследования показали существенное по-

давление генерации “паразитных волн” при использовании нового алгоритма на базе уравнения Захарова. С другой стороны, алгоритм на базе уравнения Шредингера показал повышение точности генерации волн, но только в случае генерации волновых пакетов с узкополосным спектром. Ширина спектра волнового пакета в этом случае должна быть ограничена следующим образом:  $\Delta\omega/\omega_0 \leq 0.2$ . В случае превышения данного порога требуется использовать алгоритм на базе уравнения Захарова.

7. Численные и экспериментальные исследования показали применимость алгоритмов управления волнопродуктором на базе уравнения Шредингера и Захарова в широком диапазоне режимов. Тем не менее, в случае генерации сильно нелинейных волновых пакетов с параметром крутизны  $\epsilon > 0.2$  неизбежно сохраняются некоторые ошибки в форме поверхностной волны. Для дополнительного увеличения точности генерации волн был предложен и разработан итерационный метод корректировки функции  $\beta$  в выражении для передаточной функции 1-го порядка  $\beta \times \Lambda^{(1)}$ .
8. Итерационный метод корректировки функции  $\beta$  основан на проведении серии вычислительных экспериментов в численном гидроволновом лотке, разработанном в главах 3 и 6. Установлено, что предложенный метод быстро сходится, а общее количество требуемых итераций не превышает 4...5. Экспериментально подтвержденная остаточная ошибка генерации поверхностных волновых пакетов не превышает 1% для сильно нелинейных волн и 0.5% для слабо нелинейных волн.
9. Основные результаты исследований, обсуждаемых в настоящей главе, опубликованы соискателем и его соавторами в ряде международных журналов [400, 422, 423], а также обсуждены на международных конференциях [350, 424, 427].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В диссертации решена научная проблема повышения точности прогнозирования интегральных характеристик гидропневмоаппаратов, имеющая важное хозяйственное значение для развития страны.
- На основе анализа сложных физических явлений, наблюдавшихся в проточных частях вихревых труб и поршневых волнопродукторов, разработаны значительно усовершенствованные математические модели турбулентных одно- и двухфазных течений жидкости и газа, предназначенные для прогнозирования интегральных характеристик указанных гидропневмоаппаратов. Математические модели учитывают впервые введенный турбулентный поток энергии  $q_\gamma$ , вызванный эффектами сжимаемости жидкости и дополняющий ранее учтенные турбулентные потоки  $q_\sigma$  и  $q_\lambda$ . Модели также учитывают кинематический критерий, который верно отражает физику обрушения волн, что впервые экспериментально доказано в диссертации.
  - Разработаны компьютерные программы для численного решения уравнений математических моделей при помощи современных методов параллельных и распределенных вычислений (OpenMP, MPI), методов конечных объемов (FVM) и граничных элементов (BEM).
  - Выполнена калибровка и верификация модифицированных моделей турбулентных течений по отношению к серии лабораторных измерений. Экспериментально определены величины калибровочных коэффициентов моделей турбулентных течений:  $c_\gamma \approx 0.985$  и  $B_x \approx 1$ .
  - Усовершенствованные модели турбулентных течений показали значительный рост точности прогнозирования интегральных характеристик вихревых труб и поршневых волнопродукторов. Экспериментально подтвержденная погрешность прогноза величины изоэнтропного КПД вихревой трубы снижена с  $\sim 30\%$  до  $\sim 2\ldots 10\%$ , а погрешность определения пространственной координаты начала обрушения гребня волны, сгенерированной волнопродуктором,

снижена до  $\sim 0.15\ldots 0.55\%$  от длины гидроволнового лотка.

Разработанные модификации моделей турбулентных течений жидкости и газа были использованы для совершенствования рабочих процессов вихревых труб и поршневых волнопродукторов.

2. На основе разработанных усовершенствованных математических моделей, выполнено детальное теоретическое и экспериментальное исследование течений жидкости и газа в проточных частях вихревых труб и волнопродукторов.
  - Разработан новый экспериментальный метод исследования кинематических характеристик обрушающихся поверхностных волн, который отличается высокоточной синхронизацией режимов и параметров работы лабораторного и численного волнопродукторов (мгновенных координат, скоростей и ускорений).
  - Экспериментально доказано, что обрушение волн возникает в тот момент, когда лагранжева скорость жидкой частицы на гребне волны превышает скорость самого гребня. Это, в свою очередь, дает надежные основания для применения кинематического критерия обрушения волн для замыкания модели течений жидкости в гидроволновом лотке с волнопродуктором.
  - Показано, что разработанная модель турбулентных течений жидкости и газа хорошо отражает положения гипотезы взаимодействия вихрей А.П. Меркулова. Найдены экспериментальные и численные подтверждения верности гипотезы взаимодействия вихрей.
3. Используя разработанные математические модели, обнаружены и исследованы новые физические явления, важные для инженерной практики.
  - Применяя метод минимизации порождения энтропии для анализа течения в вихревой трубе, впервые установлено существование паразитной области течения в камере энергоразделения вихревой трубы. Данная область течения отвечает за некоторую часть необратимых потерь энергии, но при этом не вносит полезный вклад в эффект температурного разделения.

- Впервые обнаружен эффект дестабилизации течения в камере энергоразделения вихревой трубы со сверхзвуковым сопловым вводом нового типа и спрямляющим лопаточным аппаратом холодного потока. Данный эффект приводит к резкому ухудшению энергетических характеристик вихревой трубы и вызван неверно выбранными размерами и режимными параметрами сверхзвукового соплового ввода и спрямляющего аппарата.
  - Впервые обнаружено явление “фазовой синхронизации” (phase locking effect), вызванное влиянием турбулентных течений, порожденных в результате обрушения поверхностных волн. Найден способ эмпирической параметризации эффекта “фазовой синхронизации”.
  - Впервые обнаружено формирование сложных нестационарных вихревых течений вблизи волнопродуктора, вызванных его функционированием.
4. Проведенные численные и экспериментальные исследования позволили разработать ряд усовершенствований проточной части вихревой трубы.
- Создан экспериментальный стенд для исследования работы вихревой трубы в двухконтурном и разделительном режимах, который отличается применением оригинальных расходомеров типа трубы Вентури и автоматизированной системы сбора и обработки данных, оценивающей интегральные характеристики вихревой трубы и неопределенность измерений.
  - Серия вычислительных и лабораторных экспериментов позволила определить размеры камеры энергоразделения и режимные параметры работы вихревой трубы, позволяющие уменьшить или полностью исключить паразитную область течения. Установлено, что исключение паразитной области течения приводит к росту КПД вихревой трубы.
5. Применяя полученные математические модели течений жидкости и газа, разработаны усовершенствования отдельных узлов вихревой трубы с целью повышения ее интегральных характеристик.
- Предложен и запатентован принципиально новый тип сверхзвукового соплового ввод вихревой трубы. Новый тип соплового ввода отличается наличием

дополнительного сегмента, выполненного в виде аналога сопла Лаваля и расположенного непосредственно за сужающимися межлопаточными каналами.

- Разработана методика инженерного расчета соплового ввода нового типа, опирающаяся на газодинамические уравнения квазиодномерного движения.
- Разработан новый способ эффективного торможения высокоскоростного холодного потока вихревой трубы за счет установки спрямляющего лопаточного аппарата (развихрителя) непосредственно перед диффузором холодного потока.

Реализация разработанных усовершенствований вихревой трубы и ее отдельных узлов в промышленных образцах ВТ 30Р, РЕСШ.4414 и др. вихревых трубах показала рост изоэнтропного КПД в режиме наибольшей холодопроизводительности ( $\varphi_c = 0.6$ ) на  $\sim 4\ldots 5\%$  (в отдельных случаях до  $\sim 7\%$ ), до величины  $\eta_s = 0.4\ldots 0.41$ . Полученный результат вносит существенный вклад в решение проблемы повышения энергоэффективности вихревых труб, имеющей важное хозяйственное значение для развития страны.

6. Разработаны принципиально новые слабонелинейные алгоритмы автоматизированного управления поршневым и шарнирно закрепленным волнопродуктором на основе нелинейных уравнений Захарова и Шредингера.
  - Применение уравнений Захарова и Шредингера в новых алгоритмах управления волнопродуктором взамен стандартных аналитических подходов позволило повысить точность генерации волн за счет впервые учтенных нелинейных поправок 3-го порядка нелинейности.
  - Алгоритмы сформулированы на языках программирования Matlab, Python и C++, зарегистрированы в реестре РФ программ для ЭВМ и имплементированы в системы управления волнопродукторами (в том числе волнопродуктором большого гидроволнового лотка Тель-Авивского университета).
7. Используя разработанные модели турбулентных течений жидкости и газа, выполнено детальное исследование структуры обнаруженных сложных

нестационарных вихревых течений, формирующихся вблизи волнопродуктора.

- Установлено, что данные течения являются причиной возникновения погрешности генерации волн волнопродукторами, поскольку они не учтены в аналитических методах на базе нелинейных уравнений Захарова и Шредингера.
- Опираясь на новые знания о структуре обнаруженных вихревых течений, предложен оригинальный метод корректировки алгоритмов управления волнопродуктором на базе уравнений Захарова и Шредингера путем введения эмпирической функции  $\beta$ . Разработан итерационный метод поиска числовых значений функции  $\beta$  с использованием моделей сложных течений жидкости и газа.

Совокупность новых разработок позволила внести существенный вклад в решение проблемы повышения точности генерации поверхностных волн волнопродукторами, которая имеет важное значение для развития судоходства, морского и прибрежного строительства страны. Экспериментально установленная остаточная погрешность генерации поверхностных волн, оцениваемая среднеквадратичным отклонением свободной поверхности воды, не превышает 0.5...1% в зависимости от режима работы волнопродуктора.

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$x, y, z$	декартова система координат
$s, n$	локальная система координат, тангенциальное и нормальное направления
$r, z$	цилиндрическая система координат
A	физическая амплитуда поверхности волны (м)
B	комплексные амплитуды теории Захарова ( $m^{3/2}/c^{1/2}$ )
$B_x$	порог устойчивости в кинематическом критерии обрушения гребня волны
$c_p$	удельная изобарная теплоемкость (Дж/кг·К)
$c_v$	удельная изохорная теплоемкость (Дж/кг·К)
$c_p$	фазовая скорость волны (м/с)
$c_g$	групповая скорость (м/с)
$c_\gamma$	новая постоянная ВД модели турбулентности
e	внутренняя энергия газа (Дж/кг)
E	полная внутренняя энергия газа (Дж/кг)
$\mathcal{E}$	интегральный поток энергии волны через поперечное сечение гидроволнового лотка (Дж/м)
$\mathcal{F}^{NL}$	нелинейный поток энергии волны через поперечное сечение гидроволнового лотка (Вт/м)
$\mathcal{F}^L$	линеаризованный поток энергии волны через поперечное сечение гидроволнового лотка (Вт/м)
$g$	ускорение свободного падения (м/с <sup>2</sup> )
G	массовый расход газа (кг/с)
h	средняя глубина воды (м)
h	статическая энталпия (Дж/кг)
H	энталпия торможения (Дж/кг)
k	кинетическая энергия турбулентности (м <sup>2</sup> /с <sup>2</sup> )

$\kappa$	волновое число (рад/м)
$p$	статическое (термодинамическое) давление (Па)
$p_{tot}$	давление торможения (Па)
$P_k$	порождения турбулентной энергии (Вт/м <sup>3</sup> )
$q$	удельный тепловой поток (Вт/м <sup>3</sup> )
$q_\sigma$	теплопередача за счет механической работы (Вт/м <sup>3</sup> )
$q_\lambda$	теплопередача за счет молекулярной и турбулентной теплопроводности (Вт/м <sup>3</sup> )
$q_\gamma$	теплопередача за счет сжимаемости газа – поправка Ван Деемтера (ВД) (Вт/м <sup>3</sup> )
$Q_\tau$	диссипативная функция (Вт/м <sup>3</sup> )
$\mathfrak{R}$	газовая постоянная (Дж/кг·К)
$\dot{S}$	тензор скоростей деформаций (1/с)
$t$	время (сек)
$T$	период волны (сек)
$T$	статическая (термодинамическая) температура (К)
$T_{tot}$	температура торможения (К)
$u^+$	безразмерная скорость
$V$	вектор скорости жидкости (м/с)
$\langle V \rangle$	средняя компонента скорости (м/с)
$V'$	пульсационная компонента скорости (м/с)
$V_{fl}$	скорость жидкой частицы (м/с)
$V_{cr}$	скорость гребня волны (м/с)
$y^+$	безразмерное расстояние от твердой стенки
$X(t)$	перемещение поверхности поршневого или шарнирно закрепленного волнопродуктора в зависимости от времени
$U(t)$	мгновенная скорость поверхности волнопродуктора
$\alpha$	коэффициент температуропроводности газа (м <sup>2</sup> /с)

$\alpha_1, \alpha_2$	объемная доля жидкой и газовой фазы в модели VOF
$\gamma$	показатель адиабаты
$\Gamma$	граница расчетного домена; площадь ( $\text{м}^2$ )
$\varepsilon$	диссипация энергии турбулентности ( $\text{м}^2/\text{с}^3$ )
$\epsilon$	крутизна поверхностной волны
$\eta$	возвышение свободной поверхности (м)
$\eta_s$	изоэнтропный КПД вихревой трубы
$\eta_c$	холодильный КПД вихревой трубы
$\lambda$	длина волны (м)
$\lambda$	коэффициент теплопроводности ( $\text{Вт}/\text{м}\cdot\text{К}$ )
$\lambda_t$	турбулентная теплопроводность ( $\text{Вт}/\text{м}\cdot\text{К}$ )
$\lambda_{eff}$	эффективная теплопроводность ( $\text{Вт}/\text{м}\cdot\text{К}$ )
$\Lambda$	передаточная функция поршневого или шарнирно закрепленного волнопродуктора
$\nu$	коэффициент кинематической вязкости ( $\text{м}^2/\text{с}$ )
$\nu_t$	турбулентная кинематическая вязкость ( $\text{м}^2/\text{с}$ )
$\mu$	коэффициент динамической вязкости (Па·с)
$\mu_t$	турбулентная вязкость (Па·с)
$\mu_{eff}$	эффективная вязкость (Па·с)
$\pi_{i,j}$	напряжение Рейнольдса
$\Pi$	тензор напряжений Рейнольдса
$\rho$	плотность ( $\text{кг}/\text{м}^3$ )
$\tau$	тензор напряжений жидкости
$\varphi$	гидродинамический потенциал ( $\text{м}^2/\text{с}$ )
$\phi$	фаза волны (рад)
$\varphi_c$	доля холодного потока
$\varphi_h$	доля горячего потока
$\psi$	комплексная огибающая волнового пакета

$\Psi$	безразмерная комплексная огибающая
$\omega$	круговая частота (рад/с)
$\Omega$	расчетный домен; объем ( $\text{м}^3$ )
CFL	критерий Куранта-Фридрихса-Леви
Eu	безразмерное число Эйлера
Fr	безразмерное число Фруда
Ma	безразмерное число Маха
Nu	безразмерное число Нуссельта
Pr	безразмерное число Прандтля
$\text{Pr}_t$	турбулентное число Прандтля
Re	безразмерное число Рейнольдса
St	безразмерное число Струхала
We	безразмерное число Вебера
$\mathcal{F}$	преобразование Фурье
$\mathcal{H}$	преобразование Гильберта

### Надстрочные и подстрочные индексы

c	холодный поток газа
h	горячий поток газа
in	входной поток газа
eff	эффективный параметр
T	транспонирование
t	параметр турбулентности
tot	параметр торможения потока
*	параметр торможения газа
(.)	порядок слагаемого в разложении по малому параметру
$\langle \cdot \rangle$	обозначение ядер в теории Захарова

$\langle p \rangle$	потенциальная компонента течения
$\langle np \rangle$	непотенциальная (турбулентная) компонента течения

## Аббревиатуры

МЖГ	Механика Жидкости и Газа
BEM	Метод Границых Элементов (Boundary Element Method)
CFD	Computational Fluid Dynamics
FVM	Метод Конечных Элементов (Finite Volume Method)
FFT	быстрое преобразование Фурье (Fast Fourier Transform)
LES	Large Eddy Simulation turbulence model
RANS	Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations
RNG	Renormalization Group turbulence model
RSM	Reynolds Stress turbulence Model
SST	Shear Stress Transport turbulence model
VOF	модель двухфазного течения Volume-of-Fluid
VD	поправка Ван Деемтера (ВД)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тurbulentные течения. / Г.Н. Абрамович, О.Ф. Васильев, А.С. Гиневский и др.. // Труды Всесоюзной школы по проблемам турбулентных течений жидкостей и газов. — 1977. — Москва.
2. Lorenz E.N. Deterministic Nonperiodic Flow // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1963. — Vol. 20. — P. 130–141.
3. Кузнецов С.П. Динамический хаос. Курс лекций. — М.: Физматлит, 2001.
4. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. — М.: Физматлит, 2005. — 288 с.
5. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. — М.: Наука, 1977.
6. Campbell L., Garnett W. Life of James Clerk Maxwell. — 1882. — Macmillan, London.
7. Healey J. Hydrodynamic Stability Theory. — 2020. — Keele University Lecture Notes.
8. Lord Rayleigh. On the stability, or instability, of certain fluid motions // Proceedings of the London Mathematical Society. — 1880. — Vol. 11. — P. 57–70.
9. Orr W.M'F. The stability or instability of the steady motions of a liquid. Part I and II. // Proceedings of the Royal Irish Academy. — 1907. — Vol. A 27. — P. 9–138.
10. Sommerfeld A. Ein Beitrag zur hydrodynamische Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen // Proceedings of the 4th International Congress of Mathematicians III. Rome. — 1908. — P. 116–124.
11. Reynolds O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of

- the law of resistance in parallel channels // Phil. Trans. R. Soc. Lond. — 1883. — Vol. A 174. — P. 935–982.
12. Хинце И.О. Тurbulentность, ее механизм и теория. — М.: Физматгиз, 1963. — 680 с.
  13. Roy J. // Aeronaut. Soc. — 1937. — Vol. 41. — P. 1109.
  14. Ландау Л. К проблеме турбулентности // Доклады Академии Наук СССР. — 1944. — Т. 44. — С. 339–342.
  15. Malkus W.V.R. Discrete transitions in turbulent convection // Proc. Roy. Soc. Lond. — 1954. — Vol. A 225. — P. 185–195.
  16. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence // Commun. Math. Phys. — 1971. — Vol. 20. — P. 167–192.
  17. Newhouse S., Ruelle D., Takens F. Occurrence of strange axiom. Attractors near quasi-periodic flows on  $T^m$ ,  $m \geq 3$  // Commun. Math. Phys. — 1978. — Vol. 64. — P. 35–40.
  18. Libchaber A., Maurer J. Local probe in a Rayleigh-Benard experiment in liquid helium // Physique Lett. — 1978. — Vol. 39. — P. 369–372.
  19. Feigenbaum M.J. The transition to aperiodic behaviour in turbulent systems // Commun. Math. Phys. — 1980. — Vol. 77. — P. 65–86.
  20. Pomeau Y., Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems // Commun. Math. Phys. — 1980. — Vol. 74. — P. 189–197.
  21. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. — М.: Наука, 1982.
  22. Barkley D. Theoretical perspective on the route to turbulence in a pipe // J. Fluid Mech. — 2016. — Vol. 803. — P1.
  23. Avila K., Moxey D., De Lozar A., Avila M., Barkley D., Hof B.. The Onset of Turbulence in Pipe Flow // Science. — 2011. — Vol. 333. — P. 192–196.

24. Barkley D. Simplifying the complexity of pipe flow // Physical Review E. — 2011. — Vol. 84. — 016309.
25. Thomson W. On the propagation of laminar motion through a turbulent moving inviscid liquid // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science Series 5. — 1887. — Vol. 149. — P. 342–353.
26. Shi J.Z.. Some Early Studies of Isotropic Turbulence: A Review // Atmosphere. — 2024. — Vol. 15. — 494.
27. Thomson W. Stability of motion - Broad river flowing down an inclined plane bed // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 5. — 1887. — Vol. 148. — P. 272–278.
28. Saint-Venant A.J.C. Note a joindre au Memoire sur la dynamique des fluids // Comptes Rendus Des Seances De, L'Academie Des Sciences, Paris. — 1843. — P. 1240–1243.
29. Boussinesq J. Essai sur la theorie des eaux courantes // Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France Paris. — 1877. — Vol. 71. — P. 389–393.
30. King G.P., Stewart I.N. Symmetric and chaos // Nonlinear Equations in the Applied Sciences, Academic Press, New York. — 1991. — P. 257–315.
31. Reynolds O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. — 1895. — Vol. A186. — P. 123–164.
32. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. — М.: Дрофа, 2003.
33. Batchelor G.K. An Introduction to Fluid Dynamics. — Cambridge University Press, 1987.
34. Genc J.N. Homogeneous turbulence // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1983. — Vol. 15. — P. 201–222.

35. Batchelor G.K. Geoffrey Ingram Taylor 7 March 1886 – 27 June 1975 // Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society of London. — 1976. — Vol. 22. — P. 565–633.
36. Richardson L.F. Weather prediction by numerical process. — Cambridge University Press, 1922.
37. Subhasish Dey. Fluvial Hydrodynamics. Hydrodynamic and Sediment Transport Phenomena. — Springer, 2014.
38. Колмогоров Л.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Доклады академии наук СССР. — 1941. — Т. 30, № 4. — С. 299–303.
39. Обухов А.М., Колмогоров Л.Н. О распределении энергии в спектре турбулентного потока // Известия академии наук СССР. Серия географическая и геофизическая. — 1941. — С. 453–463.
40. Монин А.С., Яглом А.М. О законах мелкомасштабных турбулентных движений жидкостей и газов // Успехи математических наук. — 1963. — Т. 18, № 5. — С. 93–114.
41. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. — М.: Наука, 1965.
42. Batchelor G.K. The Theory of Homogeneous Turbulence. — Cambridge University Press, 1953.
43. Jiji L.M. Heat Convection. — Springer, 2009.
44. Davidson P.A. Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers. — Oxford University Press, 2007.
45. Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.N. Transport Phenomena. — John Wiley & Sons, 2002.
46. Cengel Y.A., Ghajar A.J., Kanoglu M. Heat and Mass Transfer: Fundamentals and Applications. — McGraw-Hill, 2011.

47. Issa R. Solution of the implicitly discretized fluid flow equations by operator-splitting // Journal of Computational Physics. — 1985. — Vol. 62. — P. 40–65.
48. Oliveria P.J., Issa R.I. An improved PISO algorithm for the computation of buoyancy-driven flows // Numerical Heat Transfer, Part B. — 2001. — Vol. 40. — P. 473–493.
49. Влияние подвижности стенки щели на течение газа в радиальном зазоре “поршневое кольцо - зеркало цилиндра” компрессора / Пронин В.А., Цветков В.А., Молодова Ю.И., Жигновская Д.В. // Вестник Международной академии холода. — 2020. — № 2. — С. 19–25.
50. Карапетьянц М.Х. Химическая термодинамика. — Государственное научно-техническое издательство химической литературы, 1949.
51. Вукалович М.П., Новиков И.И. Техническая термодинамика. — М.: Энергия, 1968.
52. Щерба В.Е. Рабочие процессы компрессоров объемного действия. — М.: Наука, 2008.
53. Насос-компрессоры: рабочие процессы и основы проектирования. / Щерба В.Е., Болштянский А.П., Шалай В.В., Ходорева Е.В. — М.: Машиностроение, 2013.
54. Hanjalic K., Launder B.E. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows // Journal of Fluid Mechanics. — 1972. — Vol. 52. — 609.
55. Naot D., Shavit A., Wolfshtein M. Two-point correlation model and the redistribution of Reynolds stress // Physics of Fluids. — 1973. — Vol. 16. — 738.
56. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the development of a Reynolds-Stress turbulence closure // Journal of Fluid Mechanics. — 1975. — Vol. 68. — P. 537–566.

57. Speziale C.G., Sarkar S., Gatski T.B. Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach // Journal of Fluid Mechanics. — 1991. — Vol. 227. — P. 245–272.
58. Wilcox D.C. Turbulence modeling for CFD. — DCW Industries, California, 1994.
59. Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений. — Балт. гос. техн. ун-т. СПб., 2001.
60. Davidson L.. Fluid mechanics, turbulent flow and turbulence modeling. — 2024. — URL: <https://www.tfd.chalmers.se>.
61. Prandtl L.. Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 1925. — Vol. 5, no. 2. — P. 136–139.
62. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows // Computer methods in applied mechanics and engineering. — 1974. — Vol. 3, no. 2. — P. 269–289.
63. El Tahry S.H. k-epsilon equation for compressible reciprocating engine flows // Journal of Energy. — 1983. — Vol. 7, no. 4. — P. 345–353.
64. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model // Turbulence, Heat and Mass Transfer. — 2003. — Vol. 4.
65. Menter F.R., Egorov Y. A scale-adaptive simulation model using two equation models // AIAA paper 2005-1095. — 2005.
66. Smagorinsky J. General circulation experiments with primitive equations. The basic experiment // Weather Rev. — 1963. — P. 99–164.
67. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1969.
68. Iafrati A. Numerical study of the effects of the breaking intensity on wave breaking flows // J. Fluid Mech. — 2009. — Vol. 622. — P. 371–411.

69. Dean R.G., Dalrymple R.A. Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists. — World Scientific Publishing Company, 1991.
70. Mei C.C. The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves. — World Scientific Publishing Company, 1989.
71. Whitham G.B. Linear and Nonlinear Waves. — John Wiley & Sons, 1999.
72. Stokes G.G. On the theory of oscillatory waves // Transactions of the Cambridge Philosophical Society. — 1847. — Vol. VIII. — P. 441.
73. Найфэ А.Х. Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984.
74. Fenton J.D. A Fifth-Order Stokes Theory for Steady Waves // Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering. — 1985. — Vol. 111, no. 2. — P. 216–234.
75. Stuhlmeier R. An introduction to the Zakharov equation for modelling deep water waves. // Nonlinear Dispersive Waves. — Springer Lecture Notes in Mathematical Fluid Mechanics. — 2024. — P. 99–131.
76. Phillips O.M. On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. Part 1. The elementary interactions // J. Fluid Mech. — 1960. — Vol. 9, no. 2. — P. 193–217.
77. Захаров В.Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой воды // ПМТФ. — 1968. — Т. 2. — С. 86–94.
78. Yuen Y.C., Lake B.M. Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves // Adv. Appl. Mech. — 1982. — Vol. 22. — P. 67–229.
79. Stiassnie M., Shemer L. On modification of Zakharov equation for surface gravity waves // J. Fluid Mech. — 1984. — Vol. 143. — P. 47–67.
80. Stiassnie M., Shemer L. Energy computations for evolution of Class I and II instabilities of Stokes waves // J. Fluid Mech. — 1987. — Vol. 174. — P. 299–312.
81. Kit E., Shemer L. Spatial versions of the Zakharov and Dysthe evolution equations for deep-water gravity waves // J. Fluid Mech. — 2002. — Vol. 450. — P. 201–205.

82. Krasitskii V.P. On reduced equations in the Hamiltonian theory of weakly nonlinear surface waves // J. Fluid Mech. — 1994. — Vol. 272. — P. 1–20.
83. Hasselmann K. On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1. General theory. // J. Fluid Mech. — 1962. — Vol. 12, no. 4. — P. 481–500.
84. Hasselmann K. On the non-linear energy transfer in a gravity wave spectrum. Part 2. Conservation theorems; wave-particle analogy; irrevesibility // J. Fluid Mech. — 1963. — Vol. 15, no. 2. — P. 273–281.
85. Hasselmann K. On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 3. Evaluation of the energy flux and swell-sea interaction for a Neumann spectrum // J. Fluid Mech. — 1963. — Vol. 15, no. 3. — P. 385–398.
86. Захаров В.Е., Филоненко Н.Н. Слабая турбулентность капиллярных волн // ПМТФ. — 1967. — Т. 5. — С. 62–67.
87. Annenkov S.Y., Shrira V.I. Role of non-resonant interactions in the evolution of nonlinear random water wave fields // J. Fluid Mech. — 2006. — Vol. 561. — P. 181–207.
88. Annenkov S.Y., Shrira V.I. Spectral evolution of weakly nonlinear random waves: kinetic description versus direct numerical simulations // J. Fluid Mech. — 2018. — Vol. 844. — P. 766–795.
89. Vrecica T., Toledo Y. Consistent nonlinear stochastic evolution equations for deep to shallow water wave shoaling // J. Fluid Mech. — 2016. — Vol. 794. — P. 310–342.
90. Захаров В.Е. Слабая турбулентность в средах с распадным спектром // ПМТФ. — 1965. — Т. 6, № 4. — С. 35–39.
91. Захаров В.Е., Филоненко Н.Н. Спектр энергии для стохастических колебаний поверхности жидкости // Докл. АН СССР. — 1966. — Т. 170, № 6. — С. 1292–1295.

92. Dias F., Guyenne P., Zakharov V.E. Kolmogorov spectra of weak turbulence in media with two types of interacting waves // Physics Letters A. — 2001. — Vol. 291. — P. 139–145.
93. Evolution of a nonlinear wave field along a tank: experiments and numerical simulations based on the spatial Zakharov equation. / Shemer L., Jiao H., Kit E., Agnon Y. // J. Fluid Mech. — 2001. — Vol. 427. — P. 107–129.
94. Shemer L. Quantitative Analysis of Nonlinear Water-Waves: A Perspective of an Experimentalist // New Approaches to Nonlinear Waves. Lecture Notes in Physics. / Eds. Tobisch E. — 2016. — Vol. 908. — Springer. — P. 211–293.
95. Babanin A.V., Chalikov D. Numerical investigation of turbulence generation in non-breaking potential waves // J. Geophys. Res. — 2012. — Vol. 117. — C06010.
96. Babanin A. Breaking and Dissipation of Ocean Surface Waves. — Cambridge University Press, 2011.
97. Young I., Babanin A. Ocean Wave Dynamics. — World Scientific, 2020.
98. Rainey R.C.T., Longuet-Higgins M.S. A close one-term approximation to the highest Stokes wave on deep water // Ocean Engineering. — 2006. — Vol. 33. — P. 2012–2024.
99. Longuet-Higgins M.S. On an approximation to the limiting Stokes wave in deep water // Wave Motion. — 2008. — Vol. 45. — P. 770–775.
100. Deike L., Melville W., Popinet S. Air entrainment and bubble statistics in breaking waves // J. Fluid Mech. — 2016. — Vol. 801. — P. 91–129.
101. Kiger K.T., Duncan J.H. Air-entrainment mechanisms in plunging jets and breaking waves // Annu. Rev. Fluid Mech. — 2012. — Vol. 44. — P. 563–596.

102. Veron F. Ocean spray // *Annu. Rev. Fluid Mech.* — 2015. — Vol. 47. — P. 507–538.
103. Melville W.K., Veron F., White C.J. The velocity field under breaking waves: coherent structures and turbulence // *J. Fluid Mech.* — 2002. — Vol. 454. — P. 203–233.
104. Transition to turbulence in wind-drift layers. / Wagner G.L., Pizzo N., Lenain L., Veron F. // *J. Fluid Mech.* — 2023. — Vol. 976. — A8.
105. Vrecica T., Pizzo N., Lenain L. Observations of Strongly Modulated Surface Wave and Wave Breaking Statistics at a Submesoscale Front // *Journal of Physical Oceanography*. — 2022. — Vol. 52, no. 2. — P. 289–304.
106. Nwogu O.G. Interaction of finite-amplitude waves with vertically sheared current fields // *J. Fluid Mech.* — 2009. — Vol. 627. — P. 179–213.
107. Shrira V.I. Surface waves on shear currents: solution of the boundary-value problem // *J. Fluid Mech.* — 1993. — Vol. 252. — P. 565–584.
108. Touboul J., Banner M.L. On the breaking inception of unsteady water wave packets evolving in the presence of constant vorticity // *J. Fluid Mech.* — 2021. — Vol. 915. — A16.
109. Melville W.K. The role of surface-wave breaking in air-sea interaction // *Annu. Rev. Fluid Mech.* — 1996. — Vol. 28, no. 1. — P. 279–321.
110. Tian Z., Perlin M., Choi W. Energy dissipation in two-dimensional unsteady plunging breakers and an eddy viscosity model // *J. Fluid Mech.* — 2010. — Vol. 655. — P. 217–257.
111. Ruvinsky K.D., Feldstein F.I., Freidman G.I. Numerical simulations of the quasi-stationary stage of ripple excitation by steep gravity-capillary waves // *J. Fluid Mech.* — 1991. — Vol. 230. — P. 339–353.
112. Longuet-Higgins M.S. Theory of weakly damped stokes waves: a new formulation and its physical interpretation // *J. Fluid Mech.* — 1992. — Vol. 235. — P. 319–324.

113. Dias F., Dyachenko A.I., Zakharov V.E. Theory of weakly damped free-surface flows: A new formulation based on potential flow solutions // Physics Letters A. — 2008. — Vol. 372, no. 8. — P. 1297–1302.
114. Dosaev A., Troitskaya Y.I., Shrira V.I. On the physical mechanism of front-back asymmetry of non-breaking gravity-capillary waves // J. Fluid Mech. — 2021. — Vol. 906. — A11.
115. On a unified breaking onset threshold for gravity waves in deep and intermediate depth water. / Barthelemy X., Banner M.L., Peirson W.L., Fedele F., Allis M., Dias F. // J. Fluid Mech. — 2018. — Vol. 841. — P. 463–488.
116. Derakhti M., Banner M.L., Kirby J.T. Predicting the breaking strength of gravity water waves in deep and intermediate depth // J. Fluid Mech. — 2018. — Vol. 848. — R2.
117. A Unified Breaking Onset Criterion for Surface Gravity Water Waves in Arbitrary Depth. / Derakhti M., Kirby J.T., Banner M.L., Grilli S.T., Thomson J. // Journal of Geophysical Research: Oceans. — 2020. — Vol. 125, no. 7. — e2019JC015886.
118. Deike L., Pizzo N., Melville W.K. Lagrangian transport by breaking surface waves // J. Fluid Mech. — 2017. — Vol. 829. — P. 364–391.
119. Lenain L., Pizzo N., Melville W.K. Laboratory studies of Lagrangian transport by breaking surface waves // J. Fluid Mech. — 2019. — Vol. 876. — R1.
120. Pizzo N., Melville W.K., Deike L. Lagrangian Transport by Nonbreaking and Breaking Deep-Water Waves at the Ocean Surface // Journal of Physical Oceanography. — 2019. — Vol. 49. — P. 983–992.
121. A machine learning architecture for including wave breaking in envelope-type wave models. / Liu Y., Eeltink D., van den Bremer T.S., Adcock T.A.A. // Ocean Engineering. — 2024. — Vol. 305. — 118009.

122. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. — М.: Машиностроение, 1992.
123. Ranque G.J. Experiments on expansion in a vortex with the simultaneous exhaust of hot air and cold air // J. Phys. Radium. — 1933. — Vol. 4, no. 7. — P. 112–114.
124. Hilsch R. The Use of the Expansion of Gases in a Centrifugal Field as Cooling Process // Review of Scientific Instruments. — 1947. — Vol. 18, no. 2. — P. 108–113.
125. Мартынов А.В., Бродянский В.М. Что такое вихревая труба. — М.: Энергия, 1976.
126. Современное состояние и возможности применения вихревых труб в холодильной технике и в системах кондиционирования. / Бобровников Г.Н., Поляков А.А., Лепявко А.П., Ильина Н.И. — М.: ЦИНТИхимнефтемаш, 1978.
127. Меркулов А.П. Вихревой эффект и его применение в технике. — М.: Машиностроение, 1969.
128. Вихревые аппараты. / Суслов А.Д., Иванов С.В., Мурашкин А.В., Чижиков Ю.В. — М.: Машиностроение, 1985.
129. Пиралишвили Ш.А., Поляев В.М., Сергеев М.Н. Вихревой эффект. Эксперимент, теория, технические решения. — Учебно-научный производственный центр “Энергомаш”, 2000.
130. Кузнецов В.И. Теория и расчет эффекта Ранка. — Научное издание ОмГТУ, Омск, 1994.
131. Взаимосвязь сепарационных и термодинамических характеристик трехпоточных вихревых труб. / Жидков М.А., Комаров Г.А., Гусев А.П., Исхаков Р.М. // Нефтегазовое оборудование. — 2001. — Т. 5. — С. 8–11.
132. Опыт эксплуатации промышленной установки выделения метанола из продувочных газов синтеза с применением вихревой трубы. / Жидков

- М.А., Комаров Г.А., Воробьев В.С., Курилов А.В., Селезнев С.В., Лукьянов Е.Н. // Хим промышленность. — 2000. — Т. 5. — С. 3–6.
133. Система подготовки попутного газа нефтедобычи к транспорту с применением регулируемой трехпоточной вихревой трубы. / Гусев А.П., Исхаков Р.М., Жидков М.А., Комарова Г.А. // Химическое и нефтегазовое машиностроение. — 2000. — Т. 7. — С. 16–18.
134. Применение ТВТ для конденсации тяжелых углеводородов из попутного газа. / Исхаков Р.М., Николаев В.В., Жидков М.А., Комарова Г.А. // Газовая промышленность. — 1998. — Т. 7. — С. 42–43.
135. Ловцов А.В., Носков А.С., Хайт А.В. Использование вихревой трубы в системе сжижения природного газа // Строительство и образование. — 2010. — Т. 13. — С. 380–383.
136. Вихревая система воздушного охлаждения зоны резания материалов аэрокосмического назначения. / Белов Г.О., Барбонов Е.О., Угланов Д.А., Чертыковцев П.А. // Вестник Международной академии холода. — 2018. — № 2. — С. 22–27.
137. Белоусов А.М., Исраfilov И.Х., Харчук С.И. Вихревая труба Ранка-Хилша как перспективное устройство получения низких температур // Научный журнал НИУ ИТМО, Серия “Холодильная техника и кондиционирование”. — 2014. — № 2.
138. Патент на изобретение №2406952 Российская Федерация, F26B 9/06 (2006.01). Циклическая сушилка семян и зерна : №2009128539/06 : заявл. 23.07.2009 : опубл. 20.12.2010 / Сыропятов В.П., Ловцов А.В., Ан А.В., Кирсанов Ю.А., Хайт А.В. ; заявитель и патентообладатель Общество с ограниченной ответственностью “Конструкторское бюро “ЧКЗ-ЮГСОН”.
139. Энергоэффективность и экономическая целесообразность применения систем искусственного климата на базе вихревой трубы. / Носков А.С.,

- Ловцов А.В., Хайт А.В., Бутымова А.П., Плешков С.Ю. // Инженерно-строительный журнал. — 2011. — Т. 19. — С. 17–23.
140. Энергетическая эффективность систем искусственного климата на базе вихревой трубы и способы ее повышения. / Носков А.С., Алехин В.Н., Ловцов А.В., Хайт А.В. // Академический вестник УралНИИпроект РААСН. — 2011. — Т. 3/2011. — С. 73–78.
141. Исследование энергетической эффективности холодильно-нагревательной системы на базе двухконтурной вихревой трубы. / Алехин В.Н., Носков А.С., Хайт А.В., Иванов Р.И., Аношин Н.М. // Академический вестник УралНИИпроект РААСН. — 2015. — Т. 3/2015. — С. 77–81.
142. Соловьев А.А. Численное и физическое моделирование процессов энерго и фазоразделения в вихревых трубах. // Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. — 2008. — Уфа.
143. Пархимович А.Ю. Имитационное моделирование температурной стратификации закрученных потоков в вихревых хладогенераторах. // Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. — 2008. — Уфа.
144. Целищев А.В. Методика расчета и моделирования процесса фазоразделения газожидкостного потока в противоточной вихревой трубе. // Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. — 2012. — Уфа.
145. Азаров А. И. Вихревые трубы нового поколения // Конструктор. Машиностроитель. — 2007. — Т. 3. — С. 18–24.
146. Аликина О.Н. Гидродинамика и теплообмен в вихревой трубке Ранка-Хилша. // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. — 2003. — Пермь.
147. Мартыновский В.С., Алексеев В.П. Вихревой эффект охлаждения и его применение // Холодильная техника. — 1953. — Т. 3. — С. 23–31.

148. Гуцол А.Ф. Эффект Ранка // Успехи физических наук. — 1997. — Т. 167, № 6. — С. 665–687.
149. Thakare H.R., Monde A., Parekh A.D. Experimental, computational and optimization studies of temperature separation and flow physics of vortex tube: A review // Renewable and Sustainable Energy Reviews. — 2015. — Vol. 52. — P. 1043–1071.
150. Lagrandeur J., Poncet S., Sorin M. Review of predictive models for the design of counterflow vortex tubes working with perfect gas // International Journal of Thermal Sciences. — 2019. — Vol. 142. — P. 188–204.
151. Мартыновский В.С., Алексеев В.П. Исследование вихревого эффекта температурного разделения для газа и пара // Журнал технической физики. — 1956. — Т. 1. — С. 33–43.
152. Blatt T.A., Trusch R.B. An experimental investigation of an improved vortex cooling device // American Society of Mechanical Engineers, Winter Annual Meeting. — 1962. — P. 74–81.
153. Чижиков Ю.В. . Экспериментальное исследование расходных характеристик вихревой трубы // Глубокий холод и кондиционирование: Сб. научных трудов МВТУ. — 1976. — С. 87–90.
154. Aydin O., Markal B., Avci M. A new vortex generator geometry for a counter-flow Ranque-Hilsch vortex tube // Applied Thermal Engineering. — 2010. — Vol. 30. — P. 2505–2511.
155. Admin O., Baki M. An experimental study on the design parameters of a counter flow vortex tube // Energy. — 2006. — Vol. 31, no. 14. — P. 2763–2772.
156. Experimental investigation and energy analysis of the performance of a counter flow Ranque-Hilsch vortex tube with regard to nozzle cross-section areas. / Dincer K., Avci A., Baskaya S., Berber A. // International Journal of Refrigeration. — 2010. — Vol. 33. — P. 954–962.

157. Eiamsa-ard S., Promvonge P.. Numerical investigation of the thermal separation in a Ranque–Hilsch vortex tube // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2007. — Vol. 50, no. 5. — P. 821–832.
158. Modeling of the effects of length to diameter ration and nozzle number on the performance of counterflow Ranque-Hilsch vortex tubes using artificial neural networks. / Dincer K., Tasdemir S., Baskaya S., Uysal B.Z. // Applied Thermal Engineering. — 2008. — Vol. 28. — P. 2380–2390.
159. Volkan K.. Exergy analysis and performance of a counter flow Ranque–Hilsch vortex tube having various nozzle numbers at different inlet pressures of oxygen and air // International Journal of Refrigeration. — 2009. — Vol. 32, no. 7. — P. 1626–1633.
160. Shamsoddini R., Nezhad A.H.. Numerical analysis of the effects of nozzles number on the flow and power of cooling of a vortex tube // International Journal of Refrigeration. — 2010. — Vol. 33, no. 4. — P. 774–782.
161. Rafiee S.E., Rahimi M. Experimental study and three-dimensional (3D) computational fluid dynamics (CFD) analysis on the effect of the convergence ratio, pressure inlet and number of nozzle intake on vortex tube performance - Validation and CFD optimization // Energy. — 2013. — Vol. 63. — P. 195–204.
162. Cebeci I., Kirmaci V., Topcuoglu U.. The effects of orifice nozzle number and nozzle made of polyamide plastic and aluminum with different inlet pressures on heating and cooling performance of counter flow Ranque–Hilsch vortex tubes: An experimental investigation // International Journal of Refrigeration. — 2016. — Vol. 72. — P. 140–146.
163. Rafiee S.E., Sadeghiazad M.M. Three-dimensional and experimental investigation on the effect of cone length of throttle valve on thermal performance of a vortex tube using  $k-\varepsilon$  turbulence model // Applied Thermal Engineering. — 2014. — Vol. 66, no. 1. — P. 65–74.

164. Rafiee S.E., Sadeghiazed M.M. Experimental and 3D CFD investigation on heat transfer and energy separation inside a counter flow vortex tube using different shapes of hot control valves // Applied Thermal Engineering. — 2017. — Vol. 110. — P. 648–664.
165. Parulekar B.B. The short vortex tube // Journal of Refrigeration. — 1961. — Vol. 4. — P. 74–80.
166. Райский Ю.Д., Тункель Л.Е. Влияние формы и длины вихревой трубы на процесс энергетического разделения // Журнал технической физики. — 1974. — Т. 27, № 6. — С. 78–81.
167. Такахама Х., Иокосава Х. Энергетическое разделение потоков в вихревой трубе с диффузорной камерой (перевод с английского) // Теплопередача. — 1981. — Т. 103, № 2. — С. 10–18.
168. Lizan Zangana M.K., Barwari R.R.I. The effect of convergent-divergent tube on the cooling capacity of vortex tube: An experimental and numerical study // Alexandria Engineering Journal. — 2020. — Vol. 59, no. 1. — P. 239–246.
169. Бобровников Г.Н., Поляков А.А., Ильина Н.И. Исследование работы вихревых труб на влажном воздухе // Холодильная техника. — 1976. — Т. 11.
170. Метенин В.И. К выводу уравнения рабочего процесса идеальной вихревой трубы // Известия вузов. Авиационная техника. — 1972. — Т. 2. — С. 175–176.
171. Amitani T., Adachi T., Kato T. A study on temperature separation in large vortex tube // Transactions JSME. — 1983. — Vol. 49. — P. 877–884.
172. Бирюк В.В., Вилякин В.Е. . Исследование работы вихревой конической трубы с охлаждением горячего конца // Некоторые вопросы исследования вихревого эффекта и его промышленного применения: Труды I науч.-техн. конф., Куйбышев. — 1974. — С. 138–142.

173. Бирюк В.В., Вилякин В.Е. . Экспериментальное исследование охлаждающей вихревой трубы // Вихревой эффект и его применение в технике: Материалы II Всесоюз. науч.-техн. конф., Куйбышев. — 1976. — С. 90–96.
174. CFD analysis and experimental investigations towards optimizing the parameters of Ranque-Hilsch vortex tube. / Behera U., Paul P.J., Kasthurirengan S., Karunanithi R., Ram S.N., Dinesh K., Jacob S. // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2005. — Vol. 48, no. 10. — P. 1961–1973.
175. Application of Response Surface Methodology to optimization of a standard Ranque-Hilsch vortex tube refrigerator. / Bovand M., Valipour M.S., Dincer K., Eiamsa-ard S. // Applied Thermal Engineering. — 2014. — Vol. 67. — P. 545–553.
176. Thermodynamic modeling and artificial neural network of air counterflow vortex tubes. / Lagrandeur J., Poncet S., Sorin M., Khennich M. // International Journal of Thermal Sciences. — 2019. — Vol. 146. — P. 106097.
177. Valipour M.S., Niazi N. Experimental modeling of a curved Ranque-Hilsch vortex tube refrigerator // International Journal of Refrigeration. — 2011. — Vol. 34. — P. 1109–1116.
178. Numerical analysis for curved vortex tube optimization. / Bovand M., Valipour M.S., Eiamsa-ard S., Tamayol A. // International Communications in Heat and Mass Transfer. — 2014. — Vol. 50. — P. 98–107.
179. Девисилов В.А., Жидков Д.А. Применение вихревой технологии очистки сбросных газов производства винилхлорида // Методы и средства обеспечения безопасности. — 2013. — Т. 6. — С. 46–51.
180. Соловьев А.А., Пархимович А.Ю. Качественный анализ системы регулирования давления магистрального газа // Вестник УГАТУ. — 2006. — Т. 8, № 1. — С. 7–12.

181. Моделирование системы регулирования давления магистрального газа. / Целищев В.А., Юрьев В.Л., Ахметов Ю.М., Соловьев А.А., Пархимович А.Ю. // Наука–производству: Ежегодный научно-технический сборник. Выпуск 4. Под общ. ред. В.Л. Юрьева. — 2007. — Уфа. — С. 109–120.
182. Исследование измерения температурных параметров в изотермическом вихревом регуляторе давления газа. / Русак А.М., Целищев В.А., Ахметов Ю.М., Соловьев А.А., Пархимович А.Ю. // Сборник трудов Российской научно-технической конференции “Мавлютовские чтения”, Том 4, Уфа, УГАТУ. — 2006. — С. 95–100.
183. Соловьев А.А., Гурин С.В. Исследование возможности получения изотермического процесса при дросселировании в вихревом регуляторе давления газа // Вестник УГАТУ. — 2006. — Т. 8, № 1. — С. 3–6.
184. Опыт реализации квазизотермического редуцирования в вихревых регуляторах давления энергетических систем. / Соловьев А.А., Бакиров Ф.Г., Ахметов Ю.М., Гурин С.В., Пархимович А.Ю. // Вестник УГАТУ. — 2007. — Т. 9, № 6. — С. 66–74.
185. Соловьев А.А., Пархимович А.Ю. Исследование экспериментальных характеристик вихревого регулятора // Вестник УГАТУ. — 2006. — Т. 8, № 1. — С. 13–15.
186. Экспериментальное исследование двухступенчатой вихревой трубы для охлаждения замкнутого объема. / Русак А.М. Целищев В.А., Ахметов Ю.М., Соловьев А.А., Пархимович А.Ю. // Сборник трудов Российской научно-технической конференции “Мавлютовские чтения”. Том 4, Уфа, УГАТУ. — 2006. — С. 106–111.
187. Piralishvili Sh.A., Polyaev V.M. Flow and thermodynamic characteristics of energy separation in a double-circuit vortex tube - An experimental investigation // Experimental Thermal and Fluid Science. — 1996. — Vol. 12, no. 4. — P. 399–410.

188. Piralishvili Sh.A., Fuzeeva A.A. Hydraulic characteristics of Ranque-Hilsch energy separation // High temperature. — 2005. — Vol. 43, no. 6. — P. 900–907.
189. Rafiee S.E., Sadeghiazad M.M. Improving the energetical performance of vortex tubes based on a comparison between parallel, Ranque-Hilsch and Double-Circuit vortex tubes using both experimental and CFD approaches // Applied Thermal Engineering. — 2017. — Vol. 123. — P. 1223–1236.
190. Rafiee S.E., Sadeghiazad M.M. Experimental and CFD analysis on thermal performance of Double-Circuit vortex tube (DCVT) - geometrical optimization, energy transfer and flow structural analysis // Applied Thermal Engineering. — 2018. — Vol. 128. — P. 1223–1237.
191. Bruun H.H. . Experimental investigation of the energy separation in vortex tubes // J. Mesh. Eng. Sci. — 1969. — Vol. 11. — P. 567–582.
192. An investigation of energy separation in vortex tube. / Stephan K., Lin S., Durst M., Huang F., Seher D. // Int. J. Heat Mass Transfer. — 1983. — Vol. 26. — P. 341–348.
193. Linderstrm-Lang C.U. The three-dimensional distribution of tangential velocities and total-temperature in vortex tubes // J. Fluid Mech. — 1971. — Vol. 45. — P. 161–187.
194. Experimental study on a simple Ranque–Hilsch vortex tube. / Gao C.M., Bosschaart K.J., Zeegers J.C.H., de Waele A.T.A.M. // Cryogenics. — 2005. — Vol. 45, no. 3. — P. 173–183.
195. A computational and experimental study of thermal energy separation by swirl. / Kobiela B., Younis B.A., Weigand B., Neumann O. // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2018. — Vol. 124. — P. 11–19.
196. Gao C. Experimental study on the Ranque-Hilsch vortex tube. — 2005. — Ph.D. thesis.

197. Piralishvili Sh.A., Kudryavtsev V.M. Distribution of volume-averaged parameters of vortex flow over the energy separation chamber of a vortex tube with supplemented flow // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 1992. — Vol. 62, no. 4. — P. 380–384.
198. Пиралишвили Ш.А., Веретенников С.В., Тряпина В.А. Визуализация структуры течения в противоточной вихревой трубе // Тепловые процессы в технике. — 2023. — Т. 15, № 10. — С. 439–447.
199. Наблюдение крупномасштабных гидродинамических структур в вихревой трубке и эффект Ранка. / Арбузов В.А., Дубницев Ю.Н., Лебедев А.В., Правдина М.Х., Яворский Н.И. // Письма в ЖТФ. — 1997. — Т. 23, № 23. — С. 84–90.
200. Derksen J.J. Simulations of confined turbulent vortex flow // Computers and Fluids. — 2005. — Vol. 34. — P. 301–318.
201. Farouk T., Farouk B. Large eddy simulations of the flow field and temperature separation in the Ranque-Hilsch vortex tube // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2007. — Vol. 50. — P. 4724–4735.
202. Farouk T., Farouk B., Gutsol A. Simulation of gas species and temperature separation in the counter-flow Ranque–Hilsch vortex tube using the large eddy simulation technique // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2009. — Vol. 52, no. 13. — P. 3320–3333.
203. Numerical simulation of turbulent flow in a Ranque–Hilsch vortex tube. / Secchiaroli A., Ricci R., Montelpare S., D’Alessandro V. // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2009. — Vol. 52, no. 23. — P. 5496–5511.
204. Guo X., Zhang B., Shan Y.. LES study on the working mechanism of large-scale precessing vortices and energy separation process of Ranque–Hilsch vortex tube // International Journal of Thermal Sciences. — 2021. — Vol. 163. — 106818.

205. Numerical study of energy separation in a vortex tube with different RANS models. / Baghdad M., Ouadha A., Imine O., Addad Y. // International Journal of Thermal Sciences. — 2011. — Vol. 50. — P. 2377–2385.
206. Kazantseva O.V., Piralishvili Sh.A., Fuzeeva A.A. Numerical Simulation of Swirling Flows in Vortex Tubes // High Temperature. — 2005. — Vol. 43, no. 4. — P. 608–613.
207. Xue Y., Arjomandi M., Kelso R.. Visualization of the flow structure in a vortex tube // Experimental Thermal and Fluid Science. — 2011. — Vol. 35, no. 8. — P. 1514–1521.
208. Тарунин Е.Л., Аликина О.Н. Вычислительные эксперименты для вихревой трубки Ранка-Хилша // Вычислительные технологии. — 2001. — Т. 6, № 2. — С. 363–371.
209. Makarov M.S., Makarova S.N., Shibaev A.A. The numerical study of energy separation in a two-cascade Leontiev tube // Journal of Physics: Conference Series. — 2016. — Vol. 754. — 062010.
210. Роль профессора А.П. Меркулова в процессе исследования и развития вихревого эффекта. / Бирюк В.В., Лукачев С.В., Волов В.Т., Пиралишвили Ш.А. // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. — 2021. — Т. 20, № 2. — С. 105–121.
211. Кузнецов В.И., Макаров В.В. К вопросу о сущности эффекта Ранка // Омский научный вестник. — 2018. — № 2. — С. 48–52.
212. Webster D.S. An analysis of the Hilsch Vortex Tube // Refr. Engng. — 1950. — Vol. 2. — P. 16–21.
213. Алексеев Т.С. О природе эффекта Ранка // ИФЖ. — 1964. — Т. 4. — С. 121–130.
214. Fulton C.D. Ranque's Tube // Journal of the American Society of Refrigerating Engineers. — 1950. — Vol. 58. — P. 473–479.

215. Aljuwayhel N.F., Nellis G.F., Klein S.A. Parametric and internal study of the vortex tube using a CFD model // International Journal of Refrigeration. — 2005. — Vol. 28, no. 3. — P. 442–450.
216. Dyck N.J., Parker M.J., Straatman A.G. The impact of boundary treatment and turbulence model on CFD simulations of the Ranque-Hilsch vortex tube // International Journal of Refrigeration. — 2022. — Vol. 141. — P. 158–172.
217. Kurosaka M. Acoustic streaming in swirling flow and the Ranque—Hilsch (vortex-tube) effect // Journal of Fluid Mechanics. — 1982. — Vol. 124. — P. 139–172.
218. Experimental investigation on the acoustic characteristics and cooling performance of the vortex tube. / Liang F., Xu Ch., Tang G., Wang J., Wang Z., Li N. // International Journal of Refrigeration. — 2021. — Vol. 131. — P. 535–546.
219. Van Deemter J.J. On the theory of the Ranque-Hilsch cooling effect // Applied Scientific Research, Section A. — 1952. — Vol. 3. — P. 174–196.
220. Deissler R.G., Perlmutter M. Analysis of the flow and energy separation in a turbulent vortex // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 1960. — Vol. 1, no. 2–3. — P. 173–191.
221. Maxwell's Demon in the Ranque-Hilsch Vortex Tube. / Liew R., Zeegers J.C.H., Kuerten J.G.M., Michalek W.R. // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Vol. 109. — 054503.
222. Пиралишвили Ш.А. Модифицированная гипотеза взаимодействия вихрей, как физико-математическая модель эффекта Ранка // Процессы горения и охрана окружающей среды: Мат. I Всесоюзной науч.-техн. конф. РГАТА, Рыбинск. — 1993. — С. 87–88.
223. Пиралишвили Ш.А., Сергеев М.Н. Физическая природа процесса энергоразделения в вихревой трубе // Теплоэнергетика. Межвузовский сб. научн. трудов, Воронеж, ВГТУ. — 1996. — С. 194–199.

224. Поляев В.М., Пиралишвили Ш.А. Взаимосвязь микроструктуры потока с характеристиками процесса энергоразделения в вихревых трубах // Вестник МГТУ, Машиностроение. — 1996. — Т. 1, № 22. — С. 45–57.
225. Skye H.M., Nellis G.F., Klein S.A. Comparison of CFD analysis to empirical data in a commercial vortex tube // International journal of refrigeration. — 2006. — Vol. 29, no. 1. — P. 71–80.
226. Experimental investigation of vortex tube refrigerator with a divergent hot tube. / Chang K., Li Q., Zhou G., Li Q. // International Journal of Refrigeration. — 2011. — Vol. 34, no. 1. — P. 322–327.
227. Singh S., Sinhamahapatra K.P., Bej N. Investigation on Ranque-Hilsch vortex tube using different turbulence models // Advances in Mechanical Processing and Design. — 2021. — P. 237–244.
228. Oberti R., Lagrandeur J., Poncet S. Numerical benchmark of a Ranque–Hilsch vortex tube working with subcritical carbon dioxide // Energy. — 2023. — Vol. 263. — 125793.
229. Романенко П.А., Корольков А.В. Моделирование завихренного течения воздуха в вихревой трубе А.П. Меркулова с вариацией положения заслонки соплового выхода горячего потока // Научно-практический электронный журнал Аллея Науки. — 2021. — Т. 6, № 57.
230. Носков А.С., Ловцов А.В., Хайт А.В. Моделирование газового потока в двухконтурной вихревой трубе Ранка–Хилша // Вычислительная механика сплошных сред. — 2012. — Т. 5, № 3. — С. 313–321.
231. Noskov A.S., Alekhin V.N., Khait A.V. Numerical investigation of Ranque-Hilsch energy separation effect // Applied Mechanics and Materials. — Vol. 281. — 2013. — P. 355–358.
232. Semi-empirical turbulence model for numerical simulation of swirled compressible flows observed in Ranque–Hilsch vortex tube. / Khait A.V., Noskov A.S., Lovtsov A.V., Alekhin V.N. // International Journal of Refrigeration. — 2014. — Vol. 48. — P. 132–141.

233. Numerical investigation of a double-circuit Ranque–Hilsch vortex tube. / Alekhin V., Bianco V., Khait A., Noskov A. // International Journal of Thermal Sciences. — 2015. — Vol. 89. — P. 272–282.
234. A comparison of the application of RSM and LES turbulence models in the numerical simulation of thermal and flow patterns in a double-circuit Ranque-Hilsch vortex tube. / Bianco V., Khait A., Noskov A., Alekhin V. // Applied Thermal Engineering. — 2016. — Vol. 106. — P. 1244–1256.
235. Analysis of the local entropy generation in a double-circuit vortex tube. / Khait A., Noskov A., Alekhin V., Bianco V. // Applied Thermal Engineering. — 2018. — Vol. 130. — P. 1391–1403.
236. Zinn I., Khait A., Avrahami I. Validation of the Modified  $k-\varepsilon$  Turbulence Model for Conical Vortex Tubes Accounting for Compressibility Effects // Heat Transfer Engineering. — 2025. — P. 1–19.
237. Sharma T.K., Rao G.A.P., Murthy K.M.. Numerical Analysis of a Vortex Tube: A Review // Arch Computat Methods Eng. — 2017. — Vol. 24. — P. 251–280.
238. Годунов С.К., Рябенъкий В.С. Разностные схемы (введение в теорию). — М.: Наука, 1977.
239. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. — М.: Наука, 1982.
240. Ferziger J.H. Computational methods for fluid dynamics. — Springer, 2002.
241. Blazek J. Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications. — Elsevier, 2001.
242. Toro E.F.. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. — Springer, 2009.

243. Жарковский А.А. Математическое моделирование рабочих процессов в центробежных насосах низкой и средней быстроходности для решения задач автоматизированного проектирования. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. // Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. — 2003. — Санкт-Петербург.
244. Волков А.В. Разработка методологии повышения эффективности и надежности эксплуатации теплоэнергетического насосного оборудования. // Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. — 2006. — Москва.
245. Алексенский В.А., Жарковский А.А., Пугачёв П.В. Исследование структуры потока и прогнозирование характеристик секционного центробежного насоса низкой быстроходности // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. — 2011. — Т. 13, № 1(2). — С. 407–410.
246. Алексенский В.А., Жарковский А.А., Пугачев П.В. Расчетное определение кавитационных характеристик центробежных насосов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. — 2011. — Т. 13, № 1(2). — С. 411–414.
247. Абдулин А.Я., Месропян А.В. Особенности численного моделирования рабочего процесса водометных движителей // Вестник УГАТУ. — 2013. — Т. 17, № 3(56). — С. 130–137.
248. Optimization Algorithm of Parameters of Low Head Microhydropower Plant at an Early Design Stage. / Parygin A.G., Volkov A.V., Ryzhenkov A.V., Naumov A.V., Druzhinin A.A. // International Journal of Applied Engineering Research. — 2016. — Vol. 11, no. 22. — P. 10878–10886.
249. Enhancing the Efficiency of Small-Scale and Microhydroturbines Using Nature-Imitation Technologies for the Development of Autonomous Energy Sources. / Druzhinin A.A., Orlova E.S., Volkov A.V., Parygin A.G.,

- Naumov A.V., Ryzhenkov A.V., Vikhlyantsev A.A., Soukal J., Sedlar M., Komarek M., Pochyly F., Rudolf P., Fialova S. // Thermal Engineering. — 2019. — Vol. 66, no. 12. — P. 944–952.
250. Иванов Е.А., Жарковский А.А., Борщев И.О. Улучшение гидравлических и пульсационных характеристик многоступенчатых центробежных насосов // Научно-технические ведомости СПбПУ. — 2018. — Т. 24, № 3. — С. 126–138.
251. Месропян А.В., Платонов Е.А., Рахматуллин Р.Р. Моделирование рабочих процессов водоходного движителя паромно-мостовой машины ПММ-2М // Вестник Дагестанского государственного технического университета. — 2020. — Т. 47, № 3. — С. 16–25.
252. Месропян А.В., Рахматуллин Р.Р. Исследование влияния геометрии корпуса на буксировочное сопротивление самоходных паромов при преодолении водных преград // Вестник Дагестанского государственного технического университета. — 2020. — Т. 47, № 4. — С. 69–80.
253. Исследование влияния пристеночного параметра  $y+$  на результаты численного моделирования конфузорного течения во входном устройстве центробежного компрессора. / Гилева Л.В., Аксенов А.А., Кожухов Ю.В., Петров А.Ю. // Вестник Международной академии холода. — 2020. — № 1. — С. 27–33.
254. Методы численного моделирования тепловых деформаций рабочих органов винтового однороторного компрессора. / Пронин В.А., Жигновская Д.В., Цветков В.А., Кованов А.В. // Вестник Международной академии холода. — 2021. — № 4. — С. 12–17.
255. Данилишин А.М., Кожухов Ю.В. Численное моделирование турбулентного течения в высоконапорном осерадиальном рабочем колесе центробежного компрессора холодильных машин // Омский научный вестник. — 2022. — Т. 6, № 2. — С. 59–70.

256. Моргунов Г.М., Волков А.В., Фролов В.В. Структура потока в лопастных системах нагнетательного типа // Теплоэнергетика. — 1986. — № 6. — С. 53–55.
257. Application of Heterogeneous Blading Systems Is the Way for Improving Efficiency of Centrifugal Energy Pumps. / Pochyly F., Haluza M., Fialova S., Dobsakova L., Volkov A.V., Parygin A.G., Naumov A.V., Vikhlyantsev A.A., Druzhinin A.A. // Thermal Engineering. — 2017. — Vol. 64, no. 11. — P. 794–801.
258. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques. / Weller H.G., Tabor G., Jasak H., Fureby C. // Computers in Physics. — 1998. — Vol. 12, no. 6. — P. 620–631.
259. Moukalled F., Mangani L., Darwish M. The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics. An Advanced Introduction with OpenFOAM® and Matlab®. — Springer, 2016.
260. Holzmann T. Mathematics, Numerics, Derivations and OpenFOAM®. — 2016. — URL: <https://holzmann-cfd.com/community/publications/mathematics-numerics-derivations-and-openfoam-free>.
261. Разработка, верификация и применение основанного на многоблочных вычислительных технологиях распараллеленного пакета открытого типа VP2/3 для решения фундаментальных, прикладных и эксплуатационных задач аэромеханики и теплофизики. / Исаев С.А., Судаков А.Г., Баранов П.А., Усачов А.Е., Стрижак С.В., Лоханский Я.К., Гувернюк С.В. // Вестник ЮУрГУ. — 2009. — Т. 17, № 150. — С. 59–72.
262. Influence of the Reynolds number and the spherical dimple depth on turbulent heat transfer and hydraulic loss in a narrow channel. / Isaev S.A., Kornev N.V., Leontiev A.I., Hassel E. // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2010. — Vol. 53. — P. 178–197.
263. Михайленко К.И. К моделированию вихревой трубы: подготовка гексагональной сетки для вычислительных экспериментов в среде

- OpenFOAM // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова. — 2016. — Т. 11, № 1. — С. 112–118.
264. Минибаев М.Р., Михайленко К.И. Исследование влияния граничных условий при численном решении модели вихревой трубы // Многофазные системы. — 2019. — Т. 14, № 2. — С. 89–100.
265. Kurganov A., Tadmor E. New high-resolution central schemes for non-linear conservation laws and convection-diffusion equations // Journal of computational physics. — 2000. — Vol. 160. — P. 241–282.
266. Molecular Diversity of Sea Spray Aerosol Particles: Impact of Ocean Biology on Particle Composition and Hygroscopicity. / Cochran R.E., Laskina O., Trueblood J.V. et al. // Chem. — 2017. — Vol. 2, no. 5. — P. 655–667.
267. Hannah L. Climate Change Biology. — Elsevier, 2015.
268. Wells N.C. The Atmosphere and Ocean. — Wiley-Blackwell, 2012.
269. Castelvecchi D., Gaind N. Climate modellers and systems theorist share physics nobel // Nature. — 2021. — Vol. 598. — P. 246–247.
270. Hasselmann K. Stochastic climate models part I. Theory. // Tellus. — 1976. — Vol. 28. — P. 473–485.
271. Gill A.E. Atmosphere-Ocean dynamics (International Geophysics Series). — Academic Press, 1982.
272. Ocean wave physics and modeling: The message from the 2019 WISE meeting. / Cavaleri L., Barbariol F., Benetazzo A., Waseda T. // Bulletin of the American Meteorological Society. — 2019. — Vol. 100. — P. ES297–ES300.
273. 15 priorities for wind-waves research: An Australian perspective. / Greenslade D., Hemer M., Babanin A., et al. // Bulletin of the American Meteorological Society. — 2020. — Vol. 101, no. 4. — P. E446–E461.

274. Richter D.H., Veron F. Ocean spray: An outsized influence on weather and climate // Physics Today. — 2016. — Vol. 69, no. 11. — P. 34–39.
275. Deike L. Mass Transfer at the Ocean–Atmosphere Interface: The Role of Wave Breaking, Droplets, and Bubbles // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2022. — Vol. 54, no. 1. — P. 191–224.
276. Lubin P., Glockner S. Numerical simulations of three-dimensional plunging breaking waves: generation and evolution of aerated vortex filaments // Journal of Fluid Mechanics. — 2015. — Vol. 767. — P. 364–393.
277. Pizzo N., Deike L., Ayet A. How does the wind generate waves? // Physics Today. — 2021. — Vol. 74. — P. 38–43.
278. Geva M., Shemer L. Excitation of Initial Waves by Wind: A Theoretical Model and Its Experimental Verification // Phys. Rev. Lett. — 2022. — Vol. 128. — 124501.
279. Zavadsky A., Shemer L. Water waves excited by near-impulsive wind forcing // J. Fluid Mech. — 2017. — Vol. 828. — P. 459–495.
280. Shemer L., Singh S.K., Chernyshova A. Spatial evolution of young wind waves: numerical modelling verified by experiments // J. Fluid Mech. — 2020. — Vol. 901. — A22.
281. Kumar K., Shemer L. Spatial growth rates of young wind waves under steady wind forcing // J. Fluid Mech. — 2024. — Vol. 984. — A22.
282. Derakhti M., Kirby J.T. Bubble entrainment and liquid–bubble interaction under unsteady breaking waves // J. Fluid Mech. — 2014. — Vol. 761. — P. 464–506.
283. Deike L., Melville W.K. Gas transfer by breaking waves // Geophysical Research Letters. — 2018. — Vol. 45. — P. 10482–10492.
284. Bergillos R.J., Rodriguez-Delgado C., Iglesias G. Wave farm impacts on coastal flooding under sea-level rise: A case study in southern Spain // Science of The Total Environment. — 2019. — Vol. 653. — P. 1522–1531.

285. Waals O.J., Bunnik T.H.J., Otto W.J. Model Tests and Numerical Analysis for a Floating Mega Island // International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering. — 2018. — V001T01A016.
286. Flikkema M., Waals O. Space@Sea the Floating Solution // Frontiers in Marine Science. — 2019. — Vol. 6.
287. Drummen I., Olbert G. Conceptual Design of a Modular Floating Multi-Purpose Island // Frontiers in Marine Science. — 2021. — Vol. 8.
288. Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A. Rogue Waves in the Ocean. — Springer-Verlag, 2009.
289. Stansell P. Distributions of extreme wave, crest and trough heights measured in the North Sea // Ocean Engineering. — 2005. — Vol. 32. — P. 1015–1036.
290. Xu G., Duan W. Review of prediction techniques on hydrodynamic impact of ships // Journal of Marine Science and Application. — 2009. — Vol. 8. — P. 204–210.
291. Kapsenberg G.K. Slamming of ships: where are we now? // Phil. Trans. R. Soc. A. — 2011. — Vol. 369. — P. 2892–2919.
292. Dysthe K., Krogstad H.E., Müller P. Oceanic rogue waves // Annual Review of Fluid Mechanics. — 2008. — Vol. 40. — P. 287–310.
293. Clauss G.F. Freak waves and their interaction with ships and offshore structures // Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves. — 2010. — World Scientific. — P. 641–687.
294. Bai W., Liu X. and Koh C. Numerical study of violent LNG sloshing induced by realistic ship motions using level set method // Ocean Engineering. — 2015. — Vol. 97. — P. 100–113.
295. Исследование взаимодействия уединенной волны с частично погруженным неподвижным сооружением. / Камынин Е.Ю., Максимов В.В., Нуднер И.С., Семёнов К.К., Хакимзянов Г.С. // Сборник научных

- трудов “Фундаментальная и прикладная гидрофизика”. — 2010. — № 4(10). — С. 39–54.
296. Assessment of Tsunami Hazard for the Coast of Oktyabrsky Spit, Western Kamchatka Based on Results of Numerical Modeling. / Gusiakov V.K., Beisel S.A., Gusev O.I., Lander A.V., Chebrov D.V., Chubarov L.B. // Journal of Volcanology and Seismology. — 2024. — Vol. 18, no. 5. — P. 432–445.
297. Laboratory and theoretical modeling of air-sea momentum transfer under severe wind conditions. / Troitskaya Y.I., Sergeev D.A., Kandaurov A.A., Baidakov G. A., Vdovin M.A., Kazakov V.I. // Journal of Geophysical Research. — 2012. — Vol. 117. — C00J21.
298. Troitskaya Y.I., Vdovin M.I., Sergeev D.A. Laboratory Modeling of the Atmosphere–Ocean Interaction Under a Stormwind (High-Speed Wind-Wave Channel of the Large Thermostatified Tank of the Institute of Applied Physics) // Radiophys Quantum El. — 2024. — Vol. 66. — P. 946–965.
299. Исследование взаимодействия длинных морских волн с сооружениями, защищенными вертикальными экранами. / Нуднер И.С., Семенов К.К., Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. — 2017. — Т. 10, № 4. — С. 31–43.
300. Афанасьев К.Е., Стуколов С.В. Численное моделирование работы опытного генератора одиночных поверхностных волн // Вестник КемГУ. — 2013. — Т. 3, № 3(55). — С. 6–14.
301. Численная модель гидроволновой лаборатории для исследования взаимодействия морских волн с гидротехническими сооружениями. / Нуднер И.С., Семенов К.К., Лебедев В.В., Хакимзянов Г.С., Захаров Ю.Н. // Вычислительные технологии. — 2019. — Т. 24, № 1. — С. 86–105.

302. Взаимодействие уединенной волны с плавающей упругой пластиной. / Комаров В.А., Коробкин А.А., Струрова И.В., Федотова З.И., Чубаров Л.Б. // Сборник научных трудов “Фундаментальная и прикладная гидрофизика”. — 2009. — № 2(4). — С. 4–14.
303. Моделирование поверхностных волн, генерируемых подводным оползнем в водохранилище. / Гусев О.И., Шокина Н.Ю., Кутергин В.А., Хакимзянов Г.С. // Вычислительные технологии. — 2013. — Т. 18, № 5. — С. 74–90.
304. Гусев О.И., Скиба В.С., Хакимзянов Г.С. Силовое воздействие длинных поверхностных волн на полупогруженное в воду тело. I. Влияние формы набегающей волны // Вычислительные технологии. — 2022. — Т. 27, № 4. — С. 33–62.
305. Simulation of surface waves generation by an underwater landslide. / Chubarov L.B., Eletskii S.V., Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S. // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2005. — Vol. 20, no. 5. — P. 425–437.
306. Havelock T.H. Forced surface waves on water // Phil. Mag. S. — 1929. — Vol. 7. — P. 569–576.
307. Madsen O.S. On the generation of long waves // J. Geoph. Res. — 1971. — Vol. 76. — P. 8672–8683.
308. Group bounded long waves in physical models. / Barthel V., Mansard E.P.D., Sand S.E., Vis F.C. // Ocean Eng. — 1983. — Vol. 10. — P. 261–294.
309. Schaffer H.A. Second-order wavemaker theory for irregular waves // Ocean Eng. — 1996. — Vol. 23. — P. 47–88.
310. Schaffer H.A., Steenberg C.M. Second-order wavemaker theory for multi-directional waves // Ocean Eng. — 2003. — Vol. 30. — P. 1203–1231.

311. Zhang H., Schaffer H.A. Approximate Stream Function wavemaker theory for highly non-linear waves in wave flumes // Ocean Eng. — 2007. — Vol. 34. — P. 1290–1302.
312. Eldrup M.R., Andersen T.L. Applicability of nonlinear wavemaker theory // J. Mar. Sci. Eng. — 2019. — Vol. 7. — P. 14.
313. A compressible multiphase flow model for violent aerated wave impact problems. / Ma Z.H., Causon D.M., Qian L., Mingham C.G., Gu H.B., Martínez Ferrer P. // Proc. R. Soc. A. — 2014. — Vol. 470. — 20140542.
314. A GPU based compressible multiphase hydrocode for modelling violent hydrodynamic impact problems. / Ma Z.H., Causon D.M., Qian L., Gu H.B., Mingham C.G., Martínez Ferrer P. // Computers and Fluids. — 2015. — Vol. 120. — P. 1–23.
315. A multi-region coupling scheme for compressible and incompressible flow solvers for two-phase flow in a numerical wave tank. / Martínez Ferrer P.J., Causon D.M., Qian L., Mingham C.G., Ma Z.H. // Computers and Fluids. — 2016. — Vol. 125. — P. 116–129.
316. Chandran J.R., Salih A. A modified equation of state for water for a wide range of pressure and the concept of water shock tube // Fluid Phase Equilibria. — 2019. — Vol. 483. — P. 182–188.
317. Brackbill J.U., Kothe D.B., Zemach C. A continuum method for modeling surface tension // Journal of computational physics. — 1992. — Vol. 100. — P. 335–354.
318. Nichols B.D., Hirt C.W. Methods for calculating multidimensional, transient free surface flows past bodies // International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, Gaithersburg, MD, USA. — 1975.
319. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // Journal of Computational Physics. — 1981. — Vol. 39(1). — P. 201–225.

320. Brebbia C.A. *The Boundary Element Method for Engineers.* — 1978. — Pentech Press, New York.
321. Fenner R. *Boundary Element Methods for Engineers, Part I: Potential Problems.* — Bookboon, 2014.
322. Grilli S.T., Svendsen I.A. Corner problems and global accuracy in the boundary element solution of nonlinear wave flows // *Eng. Anal. Boundary Elem.* — 1990. — Vol. 7(4). — P. 178–195.
323. Subramanya R., Grilli S.T. Domain regridding in the computation of nonlinear waves // *Transactions on Modelling and Simulation.* — 1994. — Vol. 9. — P. 139–150.
324. Wang P., Yao Y., Tulin M.P. An efficient numerical tank for non-linear water waves, based on the multi-subdomain approach with BEM // *Int. J. Numer. Methods Fluids.* — 1995. — Vol. 20. — P. 1315–1336.
325. Grilli S.T., Subramanya R. Numerical modeling of wave breaking induced by fixed or moving boundaries // *Comput. Mech.* — 1996. — Vol. 17. — P. 374–391.
326. Hague C.H., Swan C. A multiple flux boundary element method applied to the description of surface water waves // *J. Comput. Phys.* — 2009. — Vol. 228. — P. 5111–5128.
327. Grilli S.T., Horrillo J. Numerical Generation and Absorption of Fully Nonlinear Periodic Waves // *Journal of Engineering Mechanics.* — 1997. — P. 1060–1069.
328. Discovering Boundary Equations for Wave Breaking using Machine Learning. / Tang T., Chen Y., Cao R., Mostert W., Taylor P.H., McAllister M.L., Tai B., Ma Y., Callaghan A.H., Adcock T.A.A. // arXiv. — 2024. — URL: <https://arxiv.org/abs/2412.12348>.
329. Tian Z., Perlin M., Choi W. Evaluation of a deep-water wave breaking criterion // *Physics of Fluids.* — 2008. — Vol. 20, no. 6. — 066604.

330. Tian Z., Perlin M., Choi W. An eddy viscosity model for two-dimensional breaking waves and its validation with laboratory experiments // Physics of Fluids. — 2012. — Vol. 24, no. 3. — 036601.
331. Seiffert B.R., Ducrozet G., Bonnefoy F. Simulation of breaking waves using the high-order spectral method with laboratory experiments: Wave-breaking onset // Ocean Modelling. — 2017. — Vol. 119. — P. 94–104.
332. Seiffert B.R., Ducrozet G. Simulation of breaking waves using the high-order spectral method with laboratory experiments: wave-breaking energy dissipation // Ocean Dynamics. — 2018. — Vol. 68, no. 1. — P. 65–89.
333. Hasan S.A., Sriram V., Selvam R.P. Evaluation of an eddy viscosity type wave breaking model for intermediate water depths // European Journal of Mechanics - B/Fluids. — 2019. — Vol. 78. — P. 115–138.
334. Melville W.K., Rapp R.J. The surface velocity field in steep and breaking waves // J. Fluid Mech. — 1988. — Vol. 189. — P. 1–22.
335. Perlin M., Choi W., Tian Z. Breaking Waves in Deep and Intermediate Waters // Annu. Rev. Fluid Mech. — 2013. — Vol. 45. — P. 115–145.
336. Phillips O.M. The equilibrium range in the spectrum of wind-generated waves // J. Fluid Mech. — 1958. — Vol. 4. — P. 426–434.
337. Shemer L., Noskowitz S.H. On kinematics and dynamics of breaking water waves // Proc. IUTAM. — 2013. — Vol. 8. — P. 205–212.
338. Shemer L. On kinematics of very steep waves // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. — 2013. — Vol. 13. — P. 2101–2107.
339. Song J.B., Banner M.L. On determining the onset and strength of breaking for deep water waves. Part I: Unforced irrotational wave groups // J. Phys. Oceanogr. — 2002. — Vol. 32. — P. 2541–2558.
340. Banner M.L., Peirson W.L. Wave breaking onset and strength for two-dimensional deep-water wave groups // J. Fluid Mech. — 2007. — Vol. 585. — P. 93–115.

341. On the threshold for wave breaking of two-dimensional deep water wave groups in the absence and presence of wind. / Saket A., Peirson W.L., Banner M.L., Barthelemy X., Allis M.J. // J. Fluid Mech. — 2017. — Vol. 811. — P. 642–658.
342. Stansell P., MacFarlane C. An experimental investigation of breaking criteria based on wave phase speeds // J. Phys. Oceanogr. — 2002. — Vol. 32. — P. 1269–1283.
343. Tulin M., Landrini M. Breaking waves in the ocean and around ships // Proceedings of 23rd Symposium on Naval Hydrodynamics. — 2001. — P. 713–745.
344. Shemer L., Liberzon D. Lagrangian kinematics of steep waves up to the inception of a spilling breaker // Phys. Fluids. — 2014. — Vol. 26. — 016601.
345. Shemer L., Ee B.K. Steep unidirectional wave groups – Fully nonlinear simulations vs experiments // Nonlinear Processes Geophys. — 2015. — Vol. 22. — P. 737–747.
346. Itay U., Liberzon D. Lagrangian kinematic criterion for the breaking of shoaling waves // J. Phys. Oceanogr. — 2017. — Vol. 47. — P. 827–833.
347. Khait A., Shemer L. On the kinematic criterion for the inception of breaking in surface gravity waves: Fully nonlinear numerical simulations and experimental verification // Physics of Fluids. — 2018. — Vol. 30. — 057103.
348. Energy Dissipation and Nonpotential Effects in Wave Breaking. / Khait A., Ma Z., Qian L., Bai W., Lin Z. // International Journal of Offshore and Polar Engineering. — 2022. — Vol. 32. — P. 87–96.
349. Khait A., Ma Z. On an eddy viscosity model for energetic deep-water surface gravity wave breaking // Journal of Fluid Mechanics. — 2021. — Vol. 929. — A29.

350. Khait A., Shemer L. Wave energy dissipation in two-dimensional breakers // The 35th Israeli Conference on Mechanical Engineering. 2018.— ICME 2018.
351. Energy Dissipation and Non-Potential Effects in Wave Breaking. / Khait A., Ma Z., Qian L., Bai W., Lin Z. // The 30th International Ocean and Polar Engineering Conference. — 2020. — ISOPE 2020–TPC–0369.
352. Хайт А.В. Исследование эффекта энергоразделения с целью улучшения характеристик вихревой трубы. // Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. — 2012. — Екатеринбург.
353. Visualization of air flow in vortex tube using different turbulence models. / Noskov A.S., Alekhin V.N., Khait A.V., Anoshin N.M. // Russian Journal of Construction Science and Technology. — 2015. — Vol. 1. — P. 43–48.
354. Постникова А.Ю., Хайт А.В. Численные исследования вихревой трубы // Энерго- и ресурсосбережение. Энергообеспечение. Нетрадиционные и возобновляемые источники энергии. Сборник материалов научно-практической конференции. Екатеринбург: УрФУ. — 2011. — С. 193–196.
355. Разработка численной модели процесса энергоразделения, возникающего в разделительной вихревой трубе. / Носков А.С., Ловцов А.В., Хайт А.В., Бутымова А.П. // XIV Всероссийская научно-техническая конференция студентов и аспирантов. Гидравлические машины, гидроприводы и гидропневмоавтоматика. Москва, МЭИ. — 2011. — С. 146–149.
356. Numerical Simulation and Visualization of air Flow in Ranque-Hilsch Vortex Tube. / Khait A., Noskov A., Alekhin V., Antipin A. // Proceedings of the 13th International Conference on Construction Applications of Virtual Reality. — 2013. — P. 629–638.
357. Experimental investigation of performance of hot cascade type Ranque-Hilsch vortex tube and exergy analysis. / Dincer K., Yilmaz Y., Berber A., Baskaya S. // International Journal of Refrigeration. — 2011. — Vol. 34. — P. 1117–1124.

358. Bej N., Sinhamahapatra K.P. Exergy analysis of a hot cascade type Ranque-Hilsch vortex tube using turbulence model // International Journal of Refrigeration. — 2014. — Vol. 45. — P. 13–24.
359. Bejan A. Entropy Generation through Heat and Fluid Flow. — Wiley, New York, 1982.
360. Bejan A. Entropy generation minimization: the new thermodynamics of finite-size devices and finite-time processes // Journal of Applied Physics. — 1996. — Vol. 79. — P. 1191–1218.
361. Simulation of entropy generation under stall conditions in a centrifugal fan. / Zhang L., Lang J., Jiang K., Wang S. // Entropy. — 2014. — Vol. 16. — P. 3573–3589.
362. Lin D., Yuan X., Su X. Local entropy generation in compressible flow through a high pressure turbine with delayed detached eddy simulation // Entropy. — 2017. — Vol. 19. — 29.
363. Schmandt B., Herwig H. Diffuser and nozzle design optimization by entropy generation minimization // Entropy. — 2011. — Vol. 13. — P. 1380–1402.
364. Kock F., Herwig H. Local entropy production in turbulent shear flows: a high-Reynolds number model with wall functions // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2004. — Vol. 47. — P. 2205–2215.
365. Kock F., Herwig H. Entropy production calculation for turbulent shear flows and their implementation in CFD codes // International Journal of Heat and Fluid Flow. — 2005. — Vol. 26. — P. 672–680.
366. Herwig H., Kock F. Direct and indirect methods of calculating entropy generation rates in turbulent convective heat transfer problems // Heat Mass Transfer. — 2006. — Vol. 43. — P. 207–215.
367. Носков А.С., Ловцов А.В., Хаит А.В. Математическое моделирование эффекта энергоразделения Ранка-Хилша с целью увеличения энERGE-

- тических характеристик вихревой трубы // Омский научный вестник. Приборы, машины и технологии. — 2011. — Т. 103. — С. 182–186.
368. Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей. — Ленинград, Химия, 1982.
369. Патент на изобретение №2533590 Российская Федерация, F25B 9/04 (2006.01). Вихревая труба : №2013104581/06 : заявл. 04.02.2013 : опубл. 10.08.2014 / Ловцов А.В., Носков А.С., Сыропятов В.П., Хайт А.В. ; заявитель и патентообладатель Общество с ограниченной ответственностью “Конструкторское бюро “ЧКЗ-ЮГСОН”.
370. Parker M.J., Straatman A.G. Experimental study on the impact of pressure ratio on temperature drop in a Ranque-Hilsch vortex tube // Applied Thermal Engineering. — 2021. — Vol. 189. — 116653.
371. Bazgir A., Heydari A., Nabhani A. Investigation of the thermal separation in a counter-flow Ranque-Hilsch vortex tube with regard to different fin geometries located inside the cold-tube length // International Communications in Heat and Mass Transfer. — 2019. — Vol. 108. — 104273.
372. Чугаев Р.Р. Гидравлика. — Ленинград, Энергоиздат, 1982.
373. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. — Москва, Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1962.
374. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. — Москва, Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1963.
375. Farzaneh-Gord M., Sadi M. Improving vortex tube performance based on vortex generator design // Energy. — 2014. — Vol. 72. — P. 492–500.
376. Dyskin L.M. Characteristics of a vortex tube with detwisting of cold flow // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 1990. — Vol. 57, no. 1. — P. 756–758.
377. Deceleration of the Cold Flow in the Vortex Tube. / Anoshin N., Khait A., Bianco V., Noskov A., Alekhin V. // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2020. — Vol. 972. — 012077.

378. Novel transonic nozzle for Ranque-Hilsch vortex tube. / Khait A., Bianco V., Lovtsov A., Noskov A., Alekhin V. // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2021. — Vol. 180. — 121801.
379. Носков А.С., Ловцов А.В., Хайт А.В. Математическое исследование структуры газового потока в закручивающем аппарате вихревой трубы // Омский научный вестник. Приборы, машины и технологии. — 2010. — Т. 87. — С. 74–77.
380. Носков А.С., Ловцов А.В., Хайт А.В. Математическое исследование эффекта энергоразделения Ранка-Хилша // Строительство и образование. — 2009. — Т. 12. — С. 230–235.
381. Расчет газодинамического потока в закручивающем сопловом аппарате. / Носков А.С., Хайт А.В., Лаптев А.А., Постникова А.Ю. // Строительство и образование. — 2011. — Т. 14. — С. 184–186.
382. Оптимизация конструкции соплового аппарата вихревой трубы Ранка-Хилша. / Носков А.С., Ловцов А.В., Хайт А.В., Плешков С.Ю., Постникова А.Ю. // Строительство и образование. — 2011. — Т. 14. — С. 182–184.
383. Носков А.С., Якшина Н.В., Хайт А.В. Экологически безопасный способ охлаждения бурового раствора на базе вихревой трубы с учетом проведения работ в условиях вечной мерзлоты // Безопасность жизнедеятельности в третьем тысячелетии: сборник материалов IV Международной научно-практической конференции. Челябинск: изд. Центр ЮУрГУ. — 2009. — С. 133–137.
384. Хайт А.В., Бутымова А.П. О вихревой трубе как экологичном и энергосберегающем устройстве // Научные трубы XVII международной конференции молодых ученых по приоритетным направлениям развития науки и техники. — 2009. — Екатеринбург, УГТУ-УПИ.
385. Использование холодильно-нагревательных систем на базе вихревых труб для организации заданного микроклимата в производственных и

- складских помещениях. / Носков А.С., Якшина Н.В., Ловцов А.В., Хаит А.В. // Система управления экологической безопасностью. Сборник трудов Четвертой заочной международной научно-практической конференции. — 2010. — Екатеринбург, УГТУ-УПИ. — С. 81–87.
386. Ловцов А.В., Носков А.С., Хаит А.В. Оптимизация устройства закрутки газового потока, применяемого в вихревых трубах Ранка-Хилша // Тепломассообмен и гидродинамика в закрученных потоках: Четвертая международная конференция: тезисы докладов. М.: Издательский дом МЭИ. — 2011. — С. 282–283.
387. Mathematical simulation of Ranque-Hilsch vortex tube heat and power performances. / Khait A.V., Noskov A.S., Alekhin V.N., Lovtsov A.V. // Proceedings of the 14th International Conference on Computing in Civil and Building Engineering. — 2012.
388. Инновационные системы обеспечения комфортной среды в помещениях. / Носков А.С., Хаит А.В., Маракулина А.А., Урусов А.В. // Международная научно-практическая конференция по строительству и архитектуре “Современный город: проектирование, строительство и развитие”. — 2014. — С. 292–294.
389. Патент на полезную модель №124367 Российская Федерация, F22B 33/18 (2006.01). Переносной парогенераторный модуль с циркуляцией выхлопных газов : №2012135922/06 : заявл. 21.08.2012 : опубл. 20.01.2013 / Сыропятов В.П., Ловцов А.В., Хаит А.В., Пильник А.С., Чернобородов В.И. ; заявитель и патентообладатель Общество с ограниченной ответственностью “Конструкторское бюро “ЧКЗ-ЮГСОН”.
390. Gentle spilling breakers: Crest profile evolution. / Duncan J.H., Qiao H., Philomin H., Wenz A. // J. Fluid Mech. — 1999. — Vol. 379. — P. 191–222.

391. Quantum Mechanical and Optical Analogies in Surface Gravity Water Waves. / Rozenman G.G., Fu S., Arie A., Shemer L. // Fluids. — 2019. — Vol. 4, No. 2. — 96.
392. Shemer L., Goulitski K., Kit E. Steep Waves in Tanks: Experiments and Simulations // ASME Paper No. OMAE2006-92547. — 2006.
393. Shemer L., Goulitski K., Kit E. Evolution of wide-spectrum unidirectional wave groups in a tank: an experimental and numerical study // Eur. J. Mech. B Fluid. — 2007. — Vol. 26. — P. 193–219.
394. Derakhti M., Kirby J.T. Breaking-onset, energy and momentum flux in unsteady focused wave packets // J. Fluid Mech. — 2016. — Vol. 790. — P. 553–581.
395. Local overshoot and wind effects on wave overtopping at vertical coastal structures. / De Chowdhury S., Zhou J.G., Khait A., Causon D., Qian L., Mingham C., Pullen T. // Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Maritime Engineering. — 2023. — Vol. 176. — P. 3–13.
396. Wind Effects on Wave Overtopping at a Vertical Sea Defense. / De Chowdhury S., Zhou J.G., Khait A., Pullen T., Causon D., Qian L., Mingham C. // Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering. — 2023. — Vol. 149, no. 4. — 04023010.
397. Phase manipulation and the harmonic components of ringing forces on a surface-piercing column. / Fitzgerald C.J., Taylor P.H., Taylor R.E., Grice J., Zang J. // Proc. R. Soc. A. — 2014. — Vol. 470. — 20130847.
398. Buldakov E., Stagonas D., Simons R. Extreme wave groups in a wave flume: controlled generation and breaking onset // Coast. Eng. — 2017. — Vol. 128. — P. 75–83.
399. Stagonas D., Higuera P., Buldakov E. Simulating Breaking Focused Waves in CFD: Methodology for Controlled Generation of First and Second Order // J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng. — 2018. — Vol. 144, no. 2. — 06017005.

400. Khait A., Shemer L. Application of Boundary Element Method for Determination of the Wavemaker Driving Signal // Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering. — 2019. — Vol. 141. — 061102.
401. Spinneken J., Swan C. Second-order wave maker theory using force-feedback control. Part I: a new theory for regular wave generation // Ocean Eng. — 2009. — Vol. 36. — P. 539–548.
402. Spinneken J., Swan C. Second-order wave maker theory using force-feedback control. Part II: an experimental verification of regular wave generation // Ocean Eng. — 2009. — Vol. 36. — P. 549–555.
403. Spinneken J., Swan C. The operation of a 3D wave basin in force control // Ocean Eng. — 2012. — Vol. 55. — P. 88–100.
404. Spinneken J., Christou M., Swan C. Force-controlled absorption in a fully-nonlinear numerical wave tank // J. Comp. Phys. — 2014. — Vol. 272. — P. 127–148.
405. Aknin D., Spinneken J. A laboratory investigation concerning the super-harmonic free wave suppression in shallow and intermediate water conditions // Coast. Eng. — 2017. — Vol. 120. — P. 112–132.
406. Generation of a spatially periodic directional wave field in a rectangular wave basin based on higher-order spectral simulation. / Houtani H., Waseda T., Fujimoto W., Kiyomatsu K., TanizawaK. // Ocean Eng. — 2018. — Vol. 169. — P. 428–441.
407. Houtani H., Waseda T., Tanizawa K. Experimental and numerical investigations of temporally and spatially periodic modulated wave trains // Phys. Fluids. — 2018. — Vol. 30. — 034101.
408. Hasan S.A., Sriram V., Panneer Selvam R. Numerical modelling of wind-modified focused waves in a numerical wave tank // Ocean Eng. — 2018. — Vol. 160. — P. 276–300.
409. Hasimoto H., Ono H. Nonlinear modulation of gravity waves // J. Phys. Soc. Japan. — 1972. — Vol. 33. — P. 805–811.

410. Experiments on nonlinear wave groups in intermediate water depth. / Shemer L., Kit E., Jiao H., Eitan O. // J. Water. Port. Coast. Ocean Eng. — 1998. — P. 320–327.
411. Shemer L. Quantitative Analysis of Nonlinear Water-Waves: A Perspective of an Experimentalist // New Approaches to Nonlinear Waves. Lecture Notes in Physics. / Eds. Tobisch E. — 2016. — Vol. 908. — Springer. — P. 211–293.
412. Chabchoub A., Hoffmann N.P., Akhmediev N. Rogue wave observation in a water wave tank // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Vol. 106. — P. 204502.
413. Observation of a hierarchy of up to fifth-order rogue waves in a water tank. / Chabchoub A., Hoffmann N., Onorato M., Slunyaev A., Sergeeva A., Pelinovsky E., Akhmediev N. // Phys. Rev. E. — 2012. — Vol. 86. — 056601.
414. Experimental observation of dark solitons on the surface of water. / Chabchoub A., Kimmoun O., Branger H., Hoffmann N., Proment D., Onorato M., Akhmediev N. // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Vol. 110. — 124101.
415. Kuznetsov E.A. On solitons in parametrically unstable plasma // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1977. — Vol. 236. — P. 575–577.
416. Ma Y.C. The perturbed plane-wave solutions of the cubic Schrodinger equation // Stud. Appl. Math. — 1979. — Vol. 60. — P. 43–58.
417. Peregrine D.H. Water waves, nonlinear Schrodinger equations and their solutions // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. — 1983. — Vol. 25. — P. 16–43.
418. Akhmediev N., Eleonskii V.M., Kulagin N.E. Exact first-order solutions of the nonlinear Schrodinger equation // Theor. Math. Phys. — 1987. — Vol. 72. — 809.
419. Lo E., Mei C. A numerical study of water-wave modulation based on a higher-order nonlinear Schrodinger equation // J. Fluid Mech. — 1985. — Vol. 150. — P. 395–416.

420. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2025669129 Российская Федерация. PyWavemakerW : заявл. 11.07.2025 : опубл. 23.07.2025. / Хайт А.В., Щерба В.Е. ; заявитель и правообладатель Хайт А.В.
421. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2025669130 Российская Федерация. PyWavemakerZ : заявл. 11.07.2025 : опубл. 23.07.2025. / Хайт А.В., Щерба В.Е. ; заявитель и правообладатель Хайт А.В.
422. Khait A., Shemer L. Nonlinear wave generation by a wavemaker in deep to intermediate water depth // Ocean Engineering. — 2019. — Vol. 182. — P. 222–234.
423. Khait A. Third-order generation of narrow-banded wave trains by a wavemaker // Ocean Engineering. — 2020. — Vol. 218. — 108200.
424. Khait A., Shemer L. Nonlinear Generation of Narrow-Banded Wave Trains // ASME 2019 38th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering. — 2019. — OMAE2019-95364.
425. Ursell F., Dean R., Yu Y. Forced small-amplitude water waves: a comparison of theory and experiment // Journal of Fluid Mechanics. — 1960. — Vol. 7. — P. 33–52.
426. Schmittner C., Kosleck S., Hennig J. A Phase-Amplitude Iteration Scheme for the Optimization of Deterministic Wave Sequences // ASME Paper No. OMAE2009-80131. — 2009.
427. Khait A., Shemer L. Application of Boundary Element Method for Determination of the Wavemaker Driving Signal // ASME 2018 37th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering. — 2018. — OMAE2018-77069.

## Приложение 1

### Ядра теории Захарова

Уравнение Захарова 3-го порядка точности для свободных волн (1.68), а также уравнения для связанных волн 2-го (1.71) и 3-го порядков (1.72), содержат так называемые ядра  $V, T, \tilde{T}$ . Все сложности нелинейных процессов, возникающих в динамике поверхностных волн, заключены в эти функции. В этой связи, ядра представляют собой довольно сложные и длинные выражения, которые приводятся в данном приложении.

Для начала, с соответствии с [78, 79, 80], требуется ввести две функции:

$$V_{0,1,2} = V\left(\omega^{(1)}, \omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}\right) = \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{g\omega_2^{(1)}}{2\omega^{(1)}\omega_1^{(1)}}} \left[ \kappa^{(1)}\kappa_1^{(1)} + \left(\frac{\omega^{(1)}\omega_1^{(1)}}{g}\right)^2 \right] \quad (1.1)$$

$$W_{0,1,2,3} = V\left(\omega^{(1)}, \omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \omega_3^{(1)}\right) = \frac{1}{64\pi^2} \sqrt{\frac{\omega_2^{(1)}\omega_3^{(1)}}{\omega^{(1)}\omega_1^{(1)}}} \kappa^{(1)}\kappa_1^{(1)} \times \\ \left\{ 2\kappa^{(1)} \tanh(\kappa_1^{(1)}h) + 2\kappa_1^{(1)} \tanh(\kappa^{(1)}h) - \frac{1}{g} \tanh(\kappa^{(1)}h) \tanh(\kappa_1^{(1)}h) [\omega_{0+2}^2 + \omega_{0+3}^2 + \omega_{1+2}^2 + \omega_{1+3}^2] \right\} \quad (1.2)$$

В уравнениях  $\omega_{m+n} = \omega(\kappa_m + \kappa_n)$  вычисляется пользуясь дисперсионным соотношением (1.61);  $g$  - ускорение свободного падения;  $h$  - средняя глубина.

Пользуясь функциями (1.1) и (1.2), выражения для ядер можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} V_{0,1,2}^{<1>} &= -2V_{0,1,2} + V_{1,2,0} \\ V_{0,1,2}^{<2>} &= 2(V_{0,1,2} - V_{-0,2,1} - V_{-1,2,0}) \\ V_{0,1,2}^{<3>} &= 2V_{0,1,2} + V_{1,2,0} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}
W_{0,1,2,3}^{<1>} &= W_{1,2,-0,3} - W_{-0,1,2,3} \\
W_{0,1,2,3}^{<2>} &= W_{-0,-1,2,3} + W_{2,3-0,-1} - W_{2,-1,-0,3} - W_{-0,2,-1,3} \\
&\quad - W_{-0,3,2,-1} - W_{3,-1,2,-0}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}
W_{0,1,2,3}^{<3>} &= 2W_{-0,-1,-2,3} - W_{-0,3,-1,-2} + W_{-1,-2,-0,3} - 2W_{-1,3,-0,-2} \\
W_{0,1,2,3}^{<4>} &= W_{0,1,2,3} + W_{1,2,0,3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{0,1,2,3}^{<1>} &= W_{0,1,2,3}^{<1>} - \frac{V_{0,1,2+3}^{<1>} V_{2+3,3,2}^{<1>}}{\omega_{2+3} - \omega_2 - \omega_3} - \frac{V_{0,1+3,2}^{<1>} V_{1+3,3,1}^{<1>}}{\omega_{1+3} - \omega_1 - \omega_3} \\
&\quad - \frac{V_{0,-1-3,2}^{<2>} V_{-1-3,3,1}^{<3>}}{\omega_{1+3} + \omega_1 + \omega_3} \\
\tilde{T}_{0,1,2,3}^{<2>} &= W_{0,1,2,3}^{<2>} - \frac{V_{0,2,3-1}^{<1>} V_{3-1,1,3}^{<2>}}{\omega_{3-1} + \omega_1 - \omega_3} - \frac{V_{0,3-1,2}^{<1>} V_{3-1,1,3}^{<2>}}{\omega_{3-1} + \omega_1 - \omega_3} \\
&\quad - \frac{V_{0,2-0,2}^{<2>} V_{1-3,3,1}^{<2>}}{\omega_{1-3} + \omega_3 - \omega_1} - \frac{V_{0,-0-1,1}^{<3>} V_{-2-3,3,2}^{<3>}}{\omega_{2+3} + \omega_2 + \omega_3} \\
&\quad - \frac{V_{0,1,-0-1}^{<3>} V_{-2-3,3,2}^{<3>}}{\omega_{2+3} + \omega_2 + \omega_3} - \frac{V_{2+3,2,3}^{<1>} V_{0,1,0+1}^{<2>}}{\omega_{2+3} - \omega_2 - \omega_3} \\
\tilde{T}_{0,1,2,3}^{<3>} &= W_{0,1,2,3}^{<3>} - \frac{V_{0,1+2,3}^{<2>} V_{1+2,2,1}^{<1>}}{\omega_{1+2} - \omega_1 - \omega_2} - \frac{V_{0,1,-2+3}^{<2>} V_{-2+3,2,3}^{<2>}}{\omega_{2-3} + \omega_2 - \omega_3} \\
&\quad - \frac{V_{0,1,2-3}^{<3>} V_{2-3,3,2}^{<2>}}{\omega_{2-3} + \omega_3 - \omega_2} - \frac{V_{0,1-3,2}^{<3>} V_{1-3,3,1}^{<2>}}{\omega_{1-3} + \omega_3 - \omega_1} \\
&\quad - \frac{V_{0,3,-1-2}^{<1>} V_{-1-2,1,2}^{<3>}}{\omega_{1+2} + \omega_1 + \omega_2} - \frac{V_{0,-1-2,3}^{<1>} V_{-1-2,2,1}^{<3>}}{\omega_{1+2} + \omega_1 + \omega_2} \\
\tilde{T}_{0,1,2,3}^{<4>} &= W_{0,1,2,3}^{<4>} - \frac{V_{0,1,2+3}^{<3>} V_{2+3,3,2}^{<1>}}{\omega_{2+3} - \omega_2 - \omega_3} - \frac{V_{0,1+3,2}^{<3>} V_{1+3,3,1}^{<1>}}{\omega_{1+3} - \omega_1 - \omega_3} \\
&\quad - \frac{V_{0,1,-2-3}^{<2>} V_{-2-3,3,2}^{<3>}}{\omega_{2+3} + \omega_2 + \omega_3}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$T_{0,1,2,3}^{<2>} = \begin{cases} \tilde{T}_{0,1,2,3}^{<2>} & \text{для случая резонанса (1.69) и (1.70)} \\ 0 & \text{в других случаях} \end{cases} \tag{1.6}$$

Полные выражения для ядер (1.3) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 V^{<1>}(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \kappa_0, \kappa_1, \kappa_2) &= \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{g}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_1 \omega_2}} \left[ \left( \frac{\omega_1 \omega_2}{g} \right)^2 + \kappa_1 \kappa_2 \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_0 \omega_1}} \left[ \left( \frac{\omega_0 \omega_1}{g} \right)^2 - \kappa_0 \kappa_1 \right] \right\} \\
 V^{<2>}(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \kappa_0, \kappa_1, \kappa_2) &= \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{g}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_0 \omega_1}} \left[ \left( \frac{\omega_0 \omega_1}{g} \right)^2 + \kappa_0 \kappa_1 \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_0 \omega_2}} \left[ \left( \frac{\omega_0 \omega_2}{g} \right)^2 - \kappa_0 \kappa_2 \right] \right\} \\
 V^{<3>}(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \kappa_0, \kappa_1, \kappa_2) &= \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{g}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_0 \omega_1}} \left[ \left( \frac{\omega_0 \omega_1}{g} \right)^2 + \kappa_0 \kappa_1 \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_1 \omega_2}} \left[ \left( \frac{\omega_1 \omega_2}{g} \right)^2 + \kappa_1 \kappa_2 \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

## Приложение 2

### Метод Границных Элементов - Boundary Element Method (BEM)

Расчетная область (домен) однофазного квазипотенциального течения  $\Omega_{BEM}$  показан в нижней части рисунка 3.8 и детализирован на рис. 2.1. Для интегрирования первого уравнения системы (3.9), заменяющего собой уравнение Лапласа  $\nabla^2 \varphi = 0$ , используется метод граничных элементов. Граница домена  $\Gamma = \Gamma_{wm} \cup \Gamma_{fs} \cup \Gamma_L \cup \Gamma_b$  серией узлов разбивается на граничные элементы, в качестве которых могут быть использованы линейные, квадратичные, кубические (MII), сплайновые (QS) или другие интерполяционные элементы [324, 325]. В настоящей диссертации используются кубические граничные элементы, интегрируемые по срединному интервалу (так называемый метод MII - Mid-Interval Cubic Interpolation [325]), как показано на рис. 2.1.

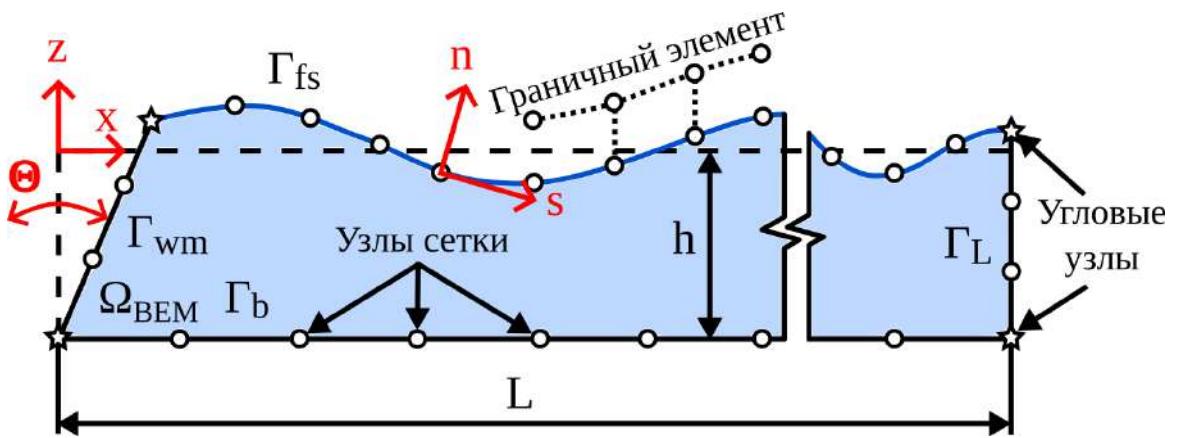


Рис. 2.1. Расчетная домен метода граничных элементов  $\Omega_{BEM}$ :  $\Gamma_{wm}$  - поверхность шарнирно закрепленного волнопродуктора;  $\Gamma_b$  - поверхность дна численного лотка;  $\Gamma_L$  - дальняя стенка;  $\Gamma_{fs}$  - свободная поверхность воды, по которой распространяется волна;  $x - z$  - глобальная прямоугольная система координат;  $s - n$  - локальная криволинейная система координат, прикрепленная к границе расчетного домена  $\Gamma = \Gamma_{wm} \cup \Gamma_{fs} \cup \Gamma_L \cup \Gamma_b$ .

Для интегрирования первого уравнения системы (3.9), вдоль каждого граничного элемента в методе МИ вводится локальная ось координат  $\xi$ , направленная вдоль элемента как показано на рис. 2.2. Также для удобства вводится еще одна ось координат  $\mu$ , получаемая из  $\xi$  линейным масштабированием. Для каждого граничного элемента вводится четыре интерполяционных полинома, по одному для каждого из четырех узлов:

$$N_c(\xi) = a + b\xi + c\xi^2 + d\xi^3 \quad (2.1)$$

После определения коэффициентов  $a, b, c$  и  $d$  для каждого из четырех полиномов, распределение координат, гидродинамического потенциала  $\varphi$ , его производной  $\partial\varphi/\partial n$  и других величин можно определить методом интерполяции:

$$\begin{bmatrix} x \\ z \\ \varphi \\ \partial\varphi/\partial n \end{bmatrix} = \sum_{c=1}^4 N_c(\xi) \begin{bmatrix} x_c \\ z_c \\ \varphi_c \\ (\partial\varphi/\partial n)_c \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

где  $x_c, z_c, \varphi_c$  и  $(\partial\varphi/\partial n)_c$  - значения величин в узлах сетки на границе  $\Gamma$ .

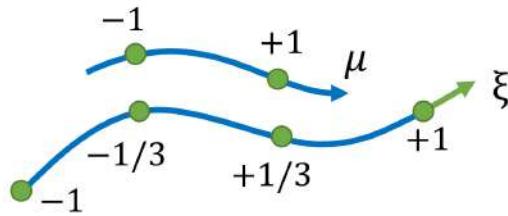


Рис. 2.2. Схема кубического граничного элемента в методе МИ [325]. Показаны локальные системы координат  $\xi$  и  $\mu$ .

Используя интерполяцию (2.2), первое уравнение системы (3.9) заменяется его численным приближением:

$$\frac{\pi\varphi(r_s)}{2} = \sum_{E=1}^{E_m} \sum_{c=1}^4 \left\{ \left( \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)_c \int_{-1}^1 \ln \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_s|} \right] N_c(\xi) J(\xi) d\xi - \varphi_c \int_{-1}^1 \frac{(\vec{r} - \vec{r}_s) \cdot \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}_s|^2} N_c(\xi) J(\xi) d\xi \right\} \quad (2.3)$$

Суммирование происходит по всем граничным элементам  $E_m$ ;  $E$  - номер текущего элемента;  $c$  - номер узла сетки внутри текущего граничного элемента  $N_c$  - интерполяционный полином (2.1), а  $J$  - якобиан преобразования систем координат. Вычисление определенных интегралов осуществляется также численно методом Гаусса (Gaussian quadrature method) по восьми точкам [322, 325]. Результирующие уравнения метода граничных элементов записываются в матричной форме как показано ниже:

$$\begin{aligned} \alpha\pi\varphi(r_s) &= \sum_{E=1}^{E_m} \sum_{c=1}^4 \left\{ \left( \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)_c \int_{-1}^1 \ln \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_s|} \right] N_c(\xi) J(\xi) d\xi - \varphi_c \int_{-1}^1 \frac{(\vec{r} - \vec{r}_s) \cdot \hat{\vec{n}}}{|\vec{r} - \vec{r}_s|^2} N_c(\xi) J(\xi) d\xi \right\} \\ [A]_{M \times M} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right\} &= [B]_{M \times M} \{ \varphi \} \\ [A]_{M \times M} \left\{ \frac{\partial^2\varphi}{\partial t \partial n} \right\} &= [B]_{M \times M} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\} \end{aligned}$$

Матрицы  $[A]_{M \times M}$  и  $[B]_{M \times M}$ , где  $M$  - количество узлов расчетной сетки, называются ядрами метода граничных элементов. Полученные линейные матричные уравнения решаются дважды: сначала для нахождения  $\partial\varphi/\partial n$ , а затем

для нахождения  $\partial^2\varphi/\partial t \partial n$ .

Следует отметить, что некоторую сложность представляют угловые узлы, отмеченные звездой на рис. 2.1. Вблизи данных узлов применяются специальные численные методы, подробно описанные в работе [322].

После нахождения течения жидкости решая матричные уравнения, требуется определить изменение формы свободной поверхности воды (эволюцию поверхности волны) за интервал времени  $\Delta t$  решая численно динамическое и кинематическое граничные условия (ДГУ и КГУ) в системе (3.9). Для этого также применяется метод интерполяции по пяти узлам свободной поверхности  $\Gamma_{fs}$ , как показано на рис. 2.3. На рисунке также показана схема поворота глобальной системы координат на угол  $\beta$ .

$$N_c(\xi) = a + b\xi + c\xi^2 + d\xi^3 + e\xi^4$$

$$\begin{bmatrix} x \\ z \\ \varphi \\ \partial\varphi/\partial n \end{bmatrix} = \sum_{c=1}^5 N_c(\xi) \begin{bmatrix} x_c \\ z_c \\ \varphi_c \\ (\partial\varphi/\partial n)_c \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

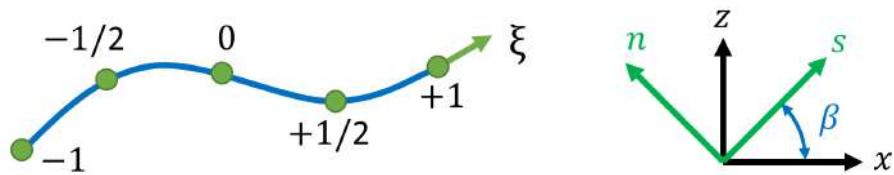


Рис. 2.3. Схема интерполяции для интегрирования по времени ДГУ и КГУ в системе уравнений (3.9). Также показана схема поворота глобальной системы координат  $x - z$  для перехода к локальной системе координат  $s - n$ .

Нахождение изменения за время  $\Delta t$  координат узла  $c$ , а также величины гидродинамического потенциала в этом узле  $\varphi$ , происходит явным образом

используя разложение в ряд Тейлора точностью до второго порядка [322, 325]:

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t \frac{D\vec{r}}{Dt}(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{D^2\vec{r}}{Dt^2}(t) \quad (2.5)$$

$$\varphi(\vec{r}, t + \Delta t) = \varphi(\vec{r}, t) + \Delta t \frac{D\varphi}{Dt}(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{D^2\varphi}{Dt^2}(t) \quad (2.6)$$

Выражения для первых производных находятся напрямую из динамического и кинематического граничных условий (ДГУ и КГУ) (3.9):

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{r}}{Dt} &= \left\{ -\frac{\partial\varphi}{\partial s} \cos\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial n} \sin\beta; -\frac{\partial\varphi}{\partial s} \sin\beta - \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cos\beta \right\} \\ \frac{D\varphi}{Dt} &= gz - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)^2 + \left( \frac{\partial\varphi}{\partial s} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} \end{aligned}$$

Угол  $\beta$  показан на рис. 2.3. Вторые производные вычисляются путем дифференцирования соответствующих граничных условий:

$$\begin{aligned} \frac{D^2r_x}{Dt^2} &= \sin\beta \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial s} \frac{\partial\beta}{\partial t} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial n} + \frac{\partial\varphi}{\partial n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} - \left( \frac{\partial\varphi}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial\beta}{\partial s} - \frac{\partial\varphi}{\partial s} \frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial n} \right] + \\ &\quad + \cos\beta \left[ -\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial s} + \frac{\partial\varphi}{\partial n} \frac{\partial\beta}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial n} - \frac{\partial\varphi}{\partial s} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \frac{\partial\beta}{\partial s} + \frac{\partial\varphi}{\partial s} \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} \right] \\ \frac{D^2r_z}{Dt^2} &= \sin\beta \left[ -\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial s} + \frac{\partial\varphi}{\partial n} \frac{\partial\beta}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial n} - \frac{\partial\varphi}{\partial s} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \frac{\partial\beta}{\partial s} + \frac{\partial\varphi}{\partial s} \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} \right] + \\ &\quad + \cos\beta \left[ -\frac{\partial\varphi}{\partial s} \frac{\partial\beta}{\partial t} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial n} - \frac{\partial\varphi}{\partial n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} + \left( \frac{\partial\varphi}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial\beta}{\partial s} + \frac{\partial\varphi}{\partial s} \frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial n} \right] \\ \frac{D^2\varphi}{Dt^2} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial s} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial s} - \frac{\partial\varphi}{\partial n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial n} + \frac{\partial\varphi}{\partial s} \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial s} \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial n} \right] - \\ &\quad - \frac{\partial\varphi}{\partial n} \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial s} \frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial n} \right] - g \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cos\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial s} \sin\beta \right] + g \frac{\partial\eta}{\partial t} \end{aligned}$$

Шаг интегрирования по времени  $\Delta t$  находится исходя из рекомендованной величины критерия Куранта-Фридрихса-Леви:  $CFL \leq 0.1$ . Сам критерий в рамках метода граничных элементов задается следующим выражением:

$$CFL = \sqrt{gh} \frac{\Delta t}{|\Delta r|_{min}}, \quad (2.7)$$

где  $|\Delta r|_{min}$  - наименьшее расстояние между двумя соседними узлами сетки. В процессе численного решения задачи, данная величина падает со временем, что связано с особенностями механики поверхностных волн. Для повышения точности численного моделирования, используется метод перестроения расчетной сетки (regridding), подробно описанный в работе [323]. Для сравнения, величина критерия  $CFL$  в методе конечных объемов вычисляется при помощи выражения (2.30).

### Приложение 3

#### Исследование сеточной сходимости моделей гидроволнового лотка

Выбор требуемого разрешения расчетных сеток моделей, входящих в численный гидроволновой лоток (см. рис. 3.8), возможен путем проведения серии расчетов и соответствующего анализа сеточной устойчивости (сходимости) результатов. Для этого рассматривается сильно нелинейный волновой пакет с гауссовой огибающей (6.4) с параметром  $\kappa_0\zeta_0 = 0.6$ . В качестве критерия сходимости используется интегральный поток энергии (6.12), перенесенный волновым пакетом через выделенное поперечное сечение гидроволнового лотка, как показано на рис. 3.1. Графики сравнивают результаты расчетов, полученные с использованием численных моделей ВЕМ (3.9) и VOF (3.8) на сетках разного разрешения, характеризуемых количеством узлов (ячеек), приходящихся на одну характерную длину волны  $\lambda_0$  (т.н. длину несущей волны).

Видно, что модель однофазного квазипотенциального течения (рис. 3.1(а)) дает разные результаты, сильно зависящие от разрешения сетки. При этом, по мере приближения разрешения к величине 40 узлов на  $\lambda_0$ , отклонение между соседними расчетами сокращается. Более того, в области  $x \geq 9$  м, сетки с разрешением 32 и 40 узлов на  $\lambda_0$  дают практически совпадающие результаты. Это говорит о том, что разрешение 40 узлов на  $\lambda_0$  дает достаточную точность и используется для всех вычислений в рамках

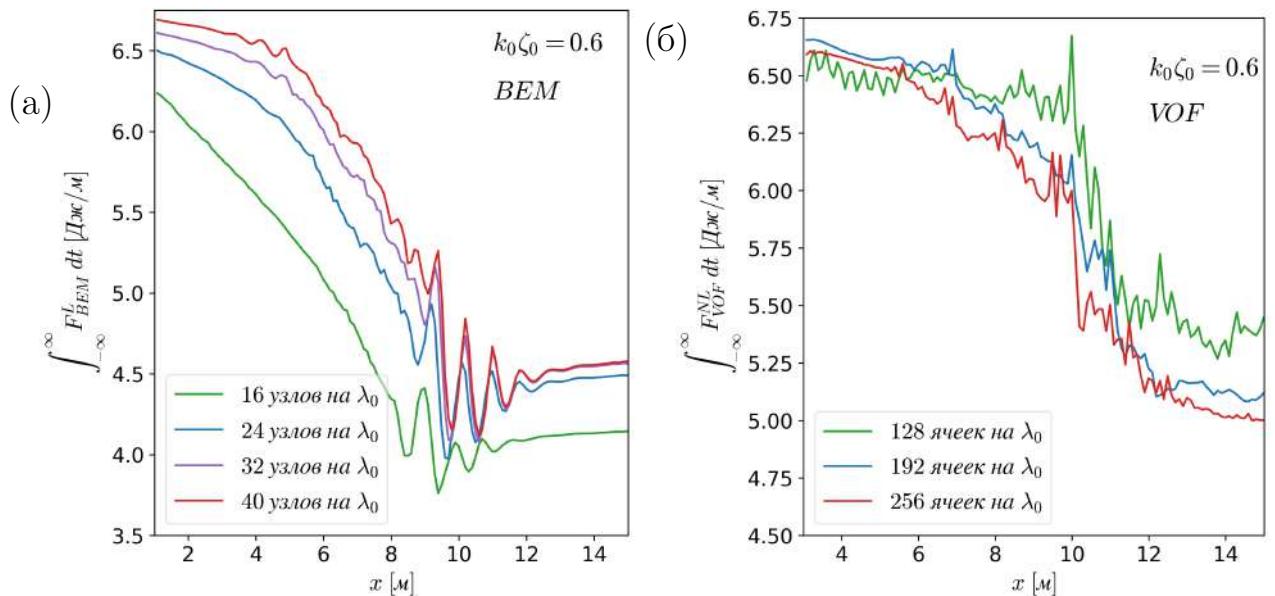


Рис. 3.1. Интегральный поток энергии (6.12), перенесенный волновым пакетом через выделенное поперечное сечение гидроволнового лотка, в зависимости от координаты  $x$ , отсчитываемой от волнопродуктора: (а) модель однофазного квазипотенциального течения ВЕМ (3.9); (б) модель двухфазного течения VOF (3.8). Рассматривается волновой пакет с гауссовой огибающей (6.4) с параметром  $k_0 \zeta_0 = 0.6$ . Цветом обозначены графики, соответствующие различным разрешениям используемых поверхностных (ВЕМ) и объемных (VOF) сеток.

настоящей диссертации.

Рисунок 3.1(б) исследует интегральный поток энергии для модели двухфазного течения VOF. Видно, что все исследованные разрешения расчетных сеток дают близкие результаты. Сетки с разрешением 192 и 256 ячеек на  $\lambda_0$  показывают практически совпадающие графики. С учетом достаточно больших чисел Рейнольдса в исследуемой задаче, во всех расчетах используется наибольшее разрешение сеток, а именно 256 ячеек на  $\lambda_0$ .

Для дополнительного подтверждения указанных выводов, на рис. 3.2 исследуется форма волнового пакета (возвышение свободной поверхности), полученная с использованием двух численных моделей с различными разрешениями сеток. Графики построены в области наиболее высоких волн, т.е. в непосредственной близости от фокальной точки волнового пакета  $x = x_f = 8.5$  м. Графики показывают высокую сходимость и устойчивость результатов расчетов для разрешений сеток, указанных выше.

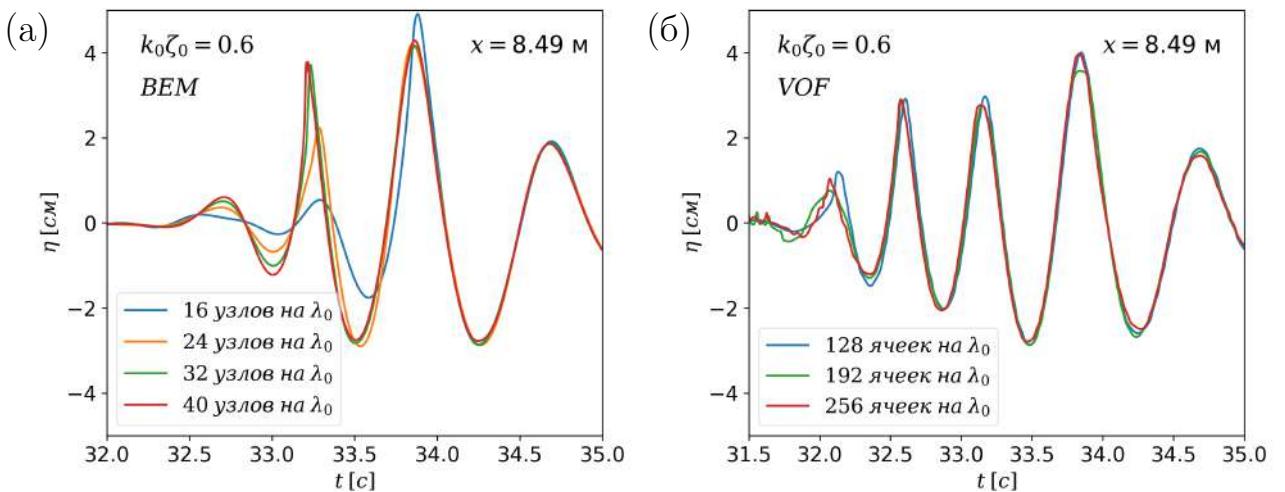


Рис. 3.2. Форма волнового пакета (возвышение свободной поверхности)  $\eta(t)$ , записанная в координате  $x = 8.49$  м: (а) модель однофазного квазипотенциального течения ВЕМ (3.9); (б) модель двухфазного течения VOF (3.8). Рассматривается волновой пакет с гауссовой огибающей (6.4) с параметром  $k_0 \zeta_0 = 0.6$ . Цветом обозначены графики, соответствующие различным разрешениям используемых поверхностных (ВЕМ) и объемных (VOF) сеток.

## Приложение 4

### Выражения для коэффициентов в алгоритме управления волнопродуктором на базе уравнения Шредингера

В выражениях ниже вводятся два волновых числа, а именно  $\kappa_{2\omega}$  и  $\kappa_{3\omega}$ . Они определяются из численного решения дисперсионного соотношения линейной теории поверхностных волн (1.61):

$$(2\omega_0)^2 = g\kappa_{2\omega} \tanh(\kappa_{2\omega} h)$$

$$(3\omega_0)^2 = g\kappa_{3\omega} \tanh(\kappa_{3\omega} h)$$

Выражения для коэффициентов  $S_d^{(2)}$ ,  $S_d^{(3)-}$  и  $S_d^{(3)+}$  можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
S_d^{(2)} = & -\frac{\psi_0^2 g^2 k_0^3 k_{2\omega}^2 (h+L) \cosh^2(k_0 h) [2k_0 h + \sinh(2k_0 h)] [1 + \cosh(2k_0 h)]^{-2}}{8\omega_0^4 [1 - \cosh(k_{2\omega} h) + k_{2\omega} (h+L) \sinh(k_{2\omega} h)] [1 - \cosh(k_0 h) + k_0 (h+L) \sinh(k_0 h)]} \times \\
& \left[ \frac{k_{2\omega}}{(k_0 - k_{2\omega})^2} - \frac{k_{2\omega}}{(k_0 + k_{2\omega})^2} + \frac{k_{2\omega} \cosh((k_0 + k_{2\omega})h)}{(k_0 + k_{2\omega})^2} + \frac{k_0 (h+L) \sinh((k_0 + k_{2\omega})h)}{k_0 + k_{2\omega}} \right. \\
& \left. - \frac{k_{2\omega} \cosh((k_0 - k_{2\omega})h)}{(k_0 - k_{2\omega})^2} + \frac{k_0 (k_0 - k_{2\omega}) (h+L) \sinh((k_0 - k_{2\omega})h)}{(k_0 - k_{2\omega})^2} \right] \\
S_d^{(3)-} = & \frac{\psi_0^3 g k_0^4 (h+L)}{16\omega_0^2} \sum_{j=1}^6 S_{d,j}^{(3)-} \\
S_d^{(3)+} = & \frac{\psi_0^3 g k_0^3 k_{3\omega}^2 (h+L)}{32\omega_0^2} \sum_{j=1}^6 S_{d,j}^{(3)+} \\
S_{d,1}^{(3)-} = & \frac{3(1 + 2k_0^2 h(h+2L) - \cosh(2k_0 h) + 2k_0 (h+L) \sinh(2k_0 h))}{16 \sinh^4(k_0 h) \cosh(k_0 h) (\cosh(k_0 h) - k_0 (h+L) \sinh(k_0 h) - 1)} \times \\
& \frac{4k_0 h + \sinh(4k_0 h)}{\cosh(2k_0 h) - 2k_0 (h+L) \sinh(2k_0 h) - 1} \\
S_{d,2}^{(3)-} = & \frac{g^2 k_0^2 (2k_0 h + \sinh(2k_0 h))^2}{192\omega_0^4 \cosh^6(k_0 h)} \times \\
& \frac{6k_0 (h+L) \cosh(2k_0 h) - 6k_0 L - 4k_0^3 h (h^2 + 3hL + 3L^2) - 3 \sinh(2k_0 h) (1 + 2k_0^2 (h+L)^2)}{(\sech(k_0 h) + k_0 (h+L) \tanh(k_0 h) - 1)^3} \\
S_{d,3}^{(3)-} = & \frac{2k_0 h + \sinh(2k_0 h)}{6 \sinh^4(k_0 h) \cosh(k_0 h)} \times \\
& \frac{10 - 9 \cosh(k_0 h) - \cosh(3k_0 h) + 3k_0 (h+L) (3 \sinh(k_0 h) + \sinh(3k_0 h))}{(1 - \cosh(k_0 h) + k_0 (h+L) \sinh(k_0 h))^2} \\
S_{d,4}^{(3)-} = & \frac{3 \operatorname{csch}^2(k_0 h) \operatorname{csch}^2(2k_0 h) (4k_0 h + \sinh(4k_0 h))}{2 (k_0 (h+L) - \tanh(k_0 h / 2)) (2k_0 (h+L) - \tanh(k_0 h))} \\
S_{d,5}^{(3)-} = & \frac{g^2 k_0^2 (2k_0 L - 2k_0 (h+L) \cosh(2k_0 h) + \sinh(2k_0 h)) (2k_0 h + \sinh(2k_0 h))^2}{32\omega_0^4 \cosh^6(k_0 h) (\sech(k_0 h) + k_0 (h+L) \tanh(k_0 h) - 1)^3} \\
S_{d,6}^{(3)-} = & \frac{(\cosh^3(k_0 h) - 1) (2k_0 h + \sinh(2k_0 h))}{\sinh^6(k_0 h) \cosh(k_0 h) (k_0 (h+L) - \tanh(k_0 h / 2))^2} \\
S_{d,1}^{(3)+} = & \frac{k_0 (4k_0 h + \sinh(4k_0 h))}{2 \sinh^4(k_0 h) \cosh(k_0 h) (k_0 - k_{3\omega})^2} \times \\
& \frac{1}{(1 - \cosh(2k_0 h) + 2k_0 (h+L) \sinh(2k_0 h)) (1 - \cosh(k_{3\omega} h) + k_{3\omega} (h+L) \sinh(k_{3\omega} h))} \times \\
& \left[ \cosh((k_0 - k_{3\omega})h) - 2 \frac{k_0^2 + k_{3\omega}^2}{(k_0 + k_{3\omega})^2} - \frac{k_0 - k_{3\omega}}{(k_0 + k_{3\omega})^2} [(k_{3\omega} - k_0) \cosh((k_0 + k_{3\omega})h) \right. \\
& \left. + 2(k_0 + k_{3\omega})(h+L) (k_0 \cosh(k_{3\omega} h) \sinh(k_0 h) - k_{3\omega} \cosh(k_0 h) \sinh(k_{3\omega} h))] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{d,2}^{(3)+} &= \frac{4k_0h + \sinh(4k_0h)}{\sinh^4(k_0h)\cosh(k_0h)(k_0^2 - k_{3\omega}^2)} \times \\
&\quad \frac{k_0 - k_0 \cosh(k_0h) \cosh(k_{3\omega}h) + k_{3\omega} \sinh(k_0h) \sinh(k_{3\omega}h)}{(1 - \cosh(2k_0h) + 2k_0(h+L)\sinh(2k_0h))(1 - \cosh(k_{3\omega}h) + k_{3\omega}(h+L)\sinh(k_{3\omega}h))} \\
S_{d,3}^{(3)+} &= \frac{g^2 k_0^4 (2k_0h + \sinh(2k_0h))^2}{24\omega_0^4 \cosh^5(k_0h)} \times \\
&\quad \frac{1}{(\cosh(k_{3\omega}h) - k_{3\omega}(h+L)\sinh(k_{3\omega}h) - 1)(\operatorname{sech}(k_0h) + k_0(h+L)\tanh(k_0h) - 1)^2} \times \\
&\quad \left[ \frac{2(h+L)\cosh((k_0 - k_{3\omega})h)}{(k_0 - k_{3\omega})^2} + \frac{2(k_0 + k_{3\omega})(h+L)\cosh((k_0 + k_{3\omega})h)}{(k_0 + k_{3\omega})^3} \right. \\
&\quad \left. - \frac{4(k_0^4 - k_{3\omega}^4)L + (k_0 + k_{3\omega})^3(2 + (k_0 - k_{3\omega})^2(h+L)^2)\sinh((k_0 - k_{3\omega})h)}{(k_0^2 - k_{3\omega}^2)^3} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sinh((k_0 + k_{3\omega})h)(2 + (k_0 + k_{3\omega})^2(h+L)^2)}{(k_0 + k_{3\omega})^3} \right] \\
S_{d,4}^{(3)+} &= \frac{g^2 k_0^3 (2k_0h + \sinh(2k_0h))^2}{12\omega_0^4 \cosh^5(k_0h)} \times \\
&\quad \frac{1}{(1 - \cosh(k_{3\omega}h) + k_{3\omega}(h+L)\sinh(k_{3\omega}h))(\operatorname{sech}(k_0h) + k_0(h+L)\tanh(k_0h) - 1)^2} \times \\
&\quad \left[ \frac{(h+L)\cosh((k_0 - k_{3\omega})h)}{k_0 - k_{3\omega}} + \frac{(h+L)\cosh((k_0 + k_{3\omega})h)}{k_0 + k_{3\omega}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2k_0(k_0^2 - k_{3\omega}^2)L + (k_0 + k_{3\omega})^2 \sinh((k_0 - k_{3\omega})h)}{(k_0^2 - k_{3\omega}^2)^2} - \frac{\sinh((k_0 + k_{3\omega})h)}{(k_0 + k_{3\omega})^2} \right] \\
S_{d,5}^{(3)+} &= \frac{k_0(2k_0h + \sinh(2k_0h))}{\sinh^4(k_0h)\cosh(k_0h)} \times \\
&\quad \frac{1}{(\cosh(k_0h) - k_0(h+L)\sinh(k_0h) - 1)(1 - \cosh(k_{3\omega}h) + k_{3\omega}(h+L)\sinh(k_{3\omega}h))} \times \\
&\quad \left[ \frac{1}{(k_{3\omega} - 2k_0)^2} + \frac{1}{(k_{3\omega} + 2k_0)^2} - \frac{\cosh((2k_0 - k_{3\omega})h)}{(k_{3\omega} - 2k_0)^2} - \frac{\cosh((2k_0 + k_{3\omega})h)}{(k_{3\omega} + 2k_0)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(h+L)\sinh((2k_0 - k_{3\omega})h)}{2k_0 - k_{3\omega}} + \frac{(h+L)\sinh((2k_0 + k_{3\omega})h)}{2k_0 + k_{3\omega}} \right] \\
S_{d,6}^{(3)+} &= \frac{2k_0h + \sinh(2k_0h)}{32(4k_0^2 - k_{3\omega}^2)\sinh^6(k_0h/2)\cosh^5(k_0h/2)\cosh(k_0h)} \times \\
&\quad \frac{2k_0 - 2k_0 \cosh(2k_0h) \cosh(k_{3\omega}h) + k_{3\omega} \sinh(2k_0h) \sinh(k_{3\omega}h)}{(k_0(h+L)\operatorname{csch}(k_0h/2) - \operatorname{sech}(k_0h/2))(1 - \cosh(k_{3\omega}h) + k_{3\omega}(h+L)\sinh(k_{3\omega}h))}
\end{aligned}$$

## Приложение 5

# Исходный код алгоритма управления волнопродуктором на базе уравнения Захарова

```
w = [1 : speccut] * 2 * pi / (ta(end)-ta(1));

syms kk;
disp('Start_evaluation_of_k_and_k2w');
k = zeros(size(w));
for j = 1:length(w)
    disp_rel = w(j)^2 == g * kk * tanh(kk * h);
    wave_num = vpasolve(disp_rel, kk, [0 inf]);
    k(j) = double(wave_num);
end
k2w = zeros(size(w));
for j = 1:length(w)
    disp_rel = (2*w(j))^2 == g * kk * tanh(kk * h);
    wave_num = vpasolve(disp_rel, kk, [0 inf]);
    k2w(j) = double(wave_num);
end
disp('Completed');

% Avoid all unnecessary frequencies
for j = 1:length(ETA)
    if abs(ETA(j)) < 1e-3
        ETA(j) = zerovalue;
    end
end

% Change sign of w
% From fft we have: c exp(i w t)
% But we need: c exp(i (kx - wt)) = c (i kx - i wt)
% Therefore, c should be complex conjugated:
% (a + ib) exp(i wt) = (a - ib) exp(-i wt)
Aa = conj(ETA);
clear ETA;

Ea = ta*0;
for j = 1:length(w)
    Ea = Ea + real(Aa(j) * exp(-1i*w(j)*ta));
end

%%%% Wavemaker velocities at 1st order

kappa1 = g*k./w./cosh(k*h);
Lambda1 = Lambda_n(kappa1, k, h, L);
AdX1 = Lambda1 .* Aa;

dX1 = zeros(size(Ea));
for l = 1:length(w)
    dX1 = dX1 + real(AdX1(l) * exp(-1i*w(l)*ta));
end

% Wavemaker displacements
spec_X1 = 1i * AdX1 ./ w;

X1 = zeros(size(dX1));
for l = 1:length(w)
    X1 = X1 + real(spec_X1(l) * exp(-1i*w(l)*ta));
end

%%%% 2nd-order correction due to finite displacements of the wavemaker

AdX2 = zeros(size(AdX1));
AdX2 = AdX2 + zerovalue;
for l = 1:length(w)
    if 2*l <= speccut
        kappa_d = Lambda1(l) * g * k(l) ...
            / (2.0 * (h + L) * w(l)^2 * cosh(k(l) * h));
        G = G_n(k(l), k2w(l), h, L);
        AdX2(2*l) = - kappa_d * k2w(l)^2 * (h + L) * G * Aa(l)^2;
    end
end

dX2 = zeros(size(dX1));
for l = 1:length(w)
    dX2 = dX2 + real(AdX2(l) * exp(-1i*w(l)*ta));
end

% Wavemaker displacements
spec_X2 = 1i * AdX2 ./ w;

X2 = zeros(size(dX2));
```

```

for l = 1:length(w)
    X2 = X2 + real(spec_X2(1) * exp(-1i*w(1)*ta));
end

%%%%%%
% 2nd-order correction due to bound waves

coord = 0;
Eb = zeros(size(Ea));
l = 1;
for j = 1:length(w)
    for m = 1:length(w)
        ki = k(j) + k(m);
        wi = sqrt(g * ki * tanh(ki * h));
        bnd = - V11(wi,w(j),w(m),ki,k(j),k(m)) / (wi-w(j)-w(m)) ...
            * (pi * sqrt(2.0*g/w(j)) * Aa(j)) ...
            * (pi * sqrt(2.0*g/w(m)) * Aa(m));
        AbZ(1) = (1.0/pi) * sqrt(wi/(2.0*g)) * bnd;
        wb(1) = w(j) + w(m);
        kb(1) = ki;
        hnum(1) = j + m;
        Eb = Eb + real(AbZ(1) * exp(1i*(kb(1)*coord - wb(1)*ta)));
        l = l + 1;

        if (j ~= m)
            ki = - k(j) + k(m);
            wi = sqrt(g * ki * tanh(ki * h));
            bnd = - V22(wi,w(j),w(m),ki,k(j),k(m)) / (wi+w(j)-w(m)) ...
                * conj(pi * sqrt(2.0*g/w(j)) * Aa(j)) ...
                * (pi * sqrt(2.0*g/w(m)) * Aa(m));
            AbZ(1) = (1.0/pi) * sqrt(wi/(2.0*g)) * bnd;
            wb(1) = - w(j) + w(m);
            kb(1) = ki;
            hnum(1) = - j + m;
            Eb = Eb + real(AbZ(1) * exp(1i*(kb(1)*coord - wb(1)*ta)));
            l = l + 1;
        end

        ki = - k(j) - k(m);
        wi = sqrt(g * ki * tanh(ki * h));
        bnd = - V33(wi,w(j),w(m),ki,k(j),k(m)) / (wi+w(j)+w(m)) ...
            * conj(pi * sqrt(2.0*g/w(j)) * Aa(j)) ...
            * conj(pi * sqrt(2.0*g/w(m)) * Aa(m));
        AbZ(1) = (1.0/pi) * sqrt(wi/(2.0*g)) * bnd;
        wb(1) = - w(j) - w(m);
        kb(1) = ki;
        hnum(1) = - j - m;
        Eb = Eb + real(AbZ(1) * exp(1i*(kb(1)*coord - wb(1)*ta)));
        l = l + 1;
    end
end

% Wavemaker motion to produce bound waves
AdX2bZ = zeros(size(AbZ));
spec_X2bZ = zeros(size(AbZ));
for l = 1:length(wb)
    kappa2 = 3.0 * wb(l) / (sinh(kb(l)*h) * (2.0 + cosh(kb(l)*h)));
    Lambda2 = Lambda_n(kappa2, kb(l), h, L);
    if ~isnan(Lambda2)
        AdX2bZ(l) = Lambda2 * AbZ(l);
        spec_X2bZ(l) = 1i * AdX2bZ(l) / wb(l);
    end
end

% Convert spectra to positive-frequency representation
Ab = zeros(size(Aa));
AdX2b = zeros(size(AdX2));
spec_X2b = zeros(size(spec_X2));
for j = 1:length(hnum)
    if abs(hnum(j)) <= specut
        if hnum(j) >= 0
            Ab(abs(hnum(j))) = Ab(abs(hnum(j))) + AbZ(j);
            AdX2b(abs(hnum(j))) = AdX2b(abs(hnum(j))) + AdX2bZ(j);
            spec_X2b(abs(hnum(j))) = spec_X2b(abs(hnum(j))) + spec_X2bZ(j);
        else
            Ab(abs(hnum(j))) = Ab(abs(hnum(j))) + conj(AbZ(j));
            AdX2b(abs(hnum(j))) = AdX2b(abs(hnum(j))) + conj(AdX2bZ(j));
            spec_X2b(abs(hnum(j))) = spec_X2b(abs(hnum(j))) + conj(spec_X2bZ(j));
        end
    end

```

```

end

dX2b = zeros(size(dX2));
for l = 1:length(w)
    dX2b = dX2b + real(AdX2b(l) * exp(-1i*w(l)*ta));
end

X2b = zeros(size(dX2b));
for l = 1:length(w)
    X2b = X2b + real(spec_X2b(l) * exp(-1i*w(l)*ta));
end

%% %%%%%%%%%%%%%%
% Full weakly-nonlinear solution

X = X1 + X2 + X2b;

spec_X = spec_X1 + spec_X2 + spec_X2b;
phase_X = wrapToPi(atan2(real(spec_X), imag(spec_X)) - pi/2);

X_rct = zeros(size(X));
for j = 1:length(w)
    X_rct = X_rct + abs(spec_X(j)) .* cos(phase_X(j) + w(j) * ta);
end

%% %%%%%%%%%%%%%%
% Write to text files

%{
fileName = 'displ_second_order.dat';
fileID = fopen(fileName, 'w');
fprintf(fileID, '#time displacement\n');
for j = 1:length(ta)
    fprintf(fileID, '%15.10e %15.10e\n', ta(j), X(j));
end
fclose(fileID);
%}

%{
% Output 2nd order spectrum
% X = amp * cos(phase + omega * t)
fileName = 'spec_second_order.dat';
fileID = fopen(fileName, 'w');
fprintf(fileID, '#amp omega phase\n');
for j = 1:length(w)
    fprintf(fileID, '%15.10e %15.10e %15.10e\n', abs(spec_X(j)), w(j), phase_X(j));
end
fclose(fileID);
%}

%% %%%%%%%%%%%%%%
% Plots

mtlbset = {[0, 0.4470, 0.7410]; [0.8500, 0.3250, 0.0980]; [0.9290, 0.6940, 0.1250]; ...
[0.4940, 0.1840, 0.5560]; [0.4660, 0.6740, 0.1880]; ...
[0.3010, 0.7450, 0.9330]; [0.6350, 0.0780, 0.1840]};

figure('units', 'centimeters', 'Position', [5, 0, 30, 21], 'Color',[1 1 1]);

subplot(3,2,1, 'FontSize', 14, 'XColor', [0 0 0], 'YColor', [0 0 0], 'box', 'on');
grid on;
hold on;
p1 = plot(ta, Ea, '--', 'LineWidth', 2, 'Color', mtlbset{1});
p2 = plot(ta, Eb, '--', 'LineWidth', 2, 'Color', mtlbset{5});
p3 = plot(ta, Ea+Eb, '--', 'LineWidth', 2, 'Color', 'black');
hold off;
axis([0 2*T0 -inf inf]);
xlabel('$$t, \sec$', 'FontSize', 15, 'interpreter', 'latex');
ylabel('$$\eta$', 'FontSize', 15, 'interpreter', 'latex');
legend([p1 p2 p3], {'$$\eta^{(1)}$$', '$$\eta^{(2)}$$', ...
'$$\eta^{(1)} + \eta^{(2)}$$'}, ...
'interpreter', 'latex', 'FontSize', 15, 'Location', 'NorthWest');

subplot(3,2,2, 'FontSize', 14, 'XColor', [0 0 0], 'YColor', [0 0 0], ...
'box', 'on', 'YScale', 'log');
grid on;
hold on;
p1 = plot(w, abs(Aa), '+', 'MarkerSize', 15, 'LineWidth', 3, ...
'Color', mtlbset{1});
p2 = plot(w, abs(Ab), 'x', 'MarkerSize', 15, 'LineWidth', 3, ...
'Color', mtlbset{5});

```

```

hold off;
axis([0 w(end) 1e-2 inf]);
set(gca,'YTick',[1e-2 2e-2 5e-2 1e-1]);
xlabel('$$\omega$', 'FontSize', 15, 'interpreter', 'latex');
ylabel('$$\sigma_{\omega}$$', 'FontSize', 15, 'interpreter', 'latex');
legend([p1 p2], {'$$\sigma_{\omega}^2$$', '$$\sigma_{\omega}^2/(2\pi)$$'}, ...
'interpreter', 'latex', 'FontSize', 15, 'Location', 'SouthWest');

subplot(3,2,3, 'FontSize', 14, 'XColor',[0 0 0], 'YColor',[0 0 0], ...
'box', 'on', 'YScale', 'log');
grid on;
hold on;
p1 = plot(w, abs(AdX1), '+', 'MarkerSize', 15, 'LineWidth', 3, ...
'Color', mtlbset{1});
p2 = plot(w, abs(AdX2), 'x', 'MarkerSize', 15, 'LineWidth', 3, ...
'Color', mtlbset{5});
p3 = plot(w, abs(AdX2b), 'o', 'MarkerSize', 11, 'LineWidth', 3, ...
'Color', mtlbset{2});

hold off;
axis([0 w(end) 1e-2 inf]);
set(gca,'YTick',[1e-2 1e-1 5e-1]);
xlabel('$$\omega$$', 'FontSize', 15, 'interpreter', 'latex');
ylabel('$$\sigma_{\omega}^2/U$$', 'FontSize', 15, 'interpreter', 'latex');
legend([p1 p2 p3], {'$$\sigma_{\omega}^2/(2\pi)$$', '$$\sigma_{\omega}^2/(2\pi)/U_b$$', ...
'$$\sigma_{\omega}^2/(2\pi)/U_d$$'}, ...
'interpreter', 'latex', 'FontSize', 15, 'Location', 'SouthWest');

subplot(3,2,4, 'FontSize', 14, 'XColor',[0 0 0], 'YColor',[0 0 0], ...
'box', 'on', 'YScale', 'log');
grid on;
hold on;
p1 = plot(w, abs(spec_X1), '+', 'MarkerSize', 15, 'LineWidth', 3, ...
'Color', mtlbset{1});
p2 = plot(w, abs(spec_X2), 'x', 'MarkerSize', 15, 'LineWidth', 3, ...
'Color', mtlbset{5});
p3 = plot(w, abs(spec_X2b), 'o', 'MarkerSize', 11, 'LineWidth', 3, ...
'Color', mtlbset{2});

hold off;
axis([0 w(end) 1e-3 inf]);
set(gca,'YTick',[1e-3 1e-2 1e-1]);
xlabel('$$\omega$$', 'FontSize', 15, 'interpreter', 'latex');
ylabel('$$\sigma_{\omega}^2/X$$', 'FontSize', 15, 'interpreter', 'latex');
legend([p1 p2 p3], {'$$\sigma_{\omega}^2/(2\pi)X^2$$', '$$\sigma_{\omega}^2/(2\pi)/X_d$$', ...
'$$\sigma_{\omega}^2/(2\pi)/X_b$$'}, ...
'interpreter', 'latex', 'FontSize', 15, 'Location', 'SouthWest');

subplot(3,2,5, 'FontSize', 14, 'XColor',[0 0 0], 'YColor',[0 0 0], 'box', 'on');
grid on;
hold on;
p1 = plot(ta, dX1, '—', 'LineWidth', 2, 'Color', mtlbset{1});
p2 = plot(ta, dX2, '—', 'LineWidth', 2, 'Color', mtlbset{5});
p3 = plot(ta, dX2b, '—', 'LineWidth', 2, 'Color', mtlbset{2});
p4 = plot(ta, dX1+dX2+dX2b, '—', 'LineWidth', 2, 'Color', 'black');
hold off;
axis([0 2*T0 -inf inf]);
xlabel('$$t$$', 'FontSize', 15, 'interpreter', 'latex');
ylabel('$$U$$', 'FontSize', 15, 'interpreter', 'latex');
legend([p1 p2 p3 p4], {'$$U^2/(2\pi)$$', '$$U_d^2/(2\pi)$$', ...
'$$U_b^2/(2\pi)$$', '$$\sum U_i^2$$'}, ...
'interpreter', 'latex', 'FontSize', 15, 'Location', 'NorthWest');

subplot(3,2,6, 'FontSize', 14, 'XColor',[0 0 0], 'YColor',[0 0 0], 'box', 'on');
grid on;
hold on;
p1 = plot(ta, X, '—', 'LineWidth', 3, 'Color', mtlbset{1});
p2 = plot(ta, X_rct, '.', 'MarkerSize', 5, 'Color', 'black');
hold off;
axis([0 2*T0 -inf inf]);
xlabel('$$t$$', 'FontSize', 15, 'interpreter', 'latex');
ylabel('$$X$$', 'FontSize', 15, 'interpreter', 'latex');
legend([p1 p2], {'$$\sum X_i^2$$', '$$X_{rct}^2$$'}, ...
'interpreter', 'latex', 'FontSize', 15, 'Location', 'NorthWest');

% Functions

function retrn = V012(w0, w1, w2, k0, k1)
global g;
retrn = 1.0/(8.0*pi) * sqrt(g*w2/(2*w0*w1)) * (k0*k1 + (w0*w1/g)^2);
end

```

```

function retrn = V11(w0, w1, w2, k0, k1, k2)
    retrn = -2.0 * V012(w0, w1, w2, -k0, k1) + V012(w1, w2, w0, k1, k2);
end

function retrn = V22(w0, w1, w2, k0, k1, k2)
    retrn = 2.0 * (V012(w0, w1, w2, k0, k1) - V012(w0, w2, w1, -k0, k2) ...
        - V012(w1, w2, w0, -k1, k2));
end

function retrn = V33(w0, w1, w2, k0, k1, k2)
    retrn = 2.0 * V012(w0, w1, w2, k0, k1) + V012(w1, w2, w0, k1, k2);
end

function retrn = Lambda_n(kappa_n, k_n, h, L)
    if L >= 0
        retrn = kappa_n .* k_n .* (h + L) .* (sinh(2*k_n*h) + 2*k_n*h) ./ ...
            (4 * (1 - cosh(k_n*h) + k_n*(h+L).*sinh(k_n*h)));
    else
        retrn = kappa_n .* k_n .* (h + L) .* (sinh(2*k_n*h) + 2*k_n*h) ./ ...
            (4 * (cosh(k_n*L) - cosh(k_n*h) + k_n*(h+L).*sinh(k_n*h)));
    end
end

function retrn = G_n(k, k2w, h, L)
    if L >= 0
        retrn = (k2w / (k - k2w)^2 - k2w / (k + k2w)^2 ...
            + k2w * cosh((k2w + k) * h) / (k + k2w)^2 ...
            + k * (h + L) * sinh((k + k2w)*h) / (k + k2w) ...
            + k * (k - k2w) * (h + L) * sinh((k - k2w)*h) / (k - k2w)^2 ...
            - k2w * cosh((k - k2w)*h) / (k - k2w)^2 ...
            / (2.0 * (1.0 - cosh(k2w * h) + k2w * (h + L) * sinh(k2w * h)));
    else
        sigma1 = sinh(k * h);
        sigma2 = sinh(k2w*h);
        sigma3 = sinh(k * L);
        sigma4 = sinh(k2w*L);
        sigma5 = cosh(k * h);
        sigma6 = cosh(k2w*h);
        sigma7 = cosh(k * L);
        sigma8 = cosh(k2w*L);
        retrn = (...
            k2w^3 * (sigma1 * sigma2 - sigma3 * sigma4) ...
            - k^3 * k2w * (h + L) * sigma2 * sigma5 ...
            + k^4 * (h + L) * sigma1 * sigma6 ...
            - k^2 * k2w * (sigma3 * sigma4 - sigma1 * sigma2 + ...
                k2w * (h + L) * sigma1 * sigma6) ...
            + k * k2w^2 * (k2w * (h + L) * sigma2 * sigma5 - ...
                2.0 * sigma5 * sigma6 + 2.0 * sigma7 * sigma8) ...
            ) / (k^2 - k2w^2)^2 ...
            / (cosh(k2w * L) - cosh(k2w * h) + k2w * (h + L) * sinh(k2w * h));
    end
end

```

## Приложение 6

### Исходный код алгоритма управления волнопродуктором на базе нелинейного уравнения Шредингера

```

clear all
clearvars
clearvars -global
format long

g = 9.81;
zerovalue = 1e-100;

%% %%%%%%%%%%%%%%
% Definition of the wavemaker shape

h = 0.6;
L = 1e5;

%% %%%%%%%%%%%%%%
% Definition of the target wave train at x=0

```

```

T0 = 2.2;
eps = 0.1;
w0 = 2*pi/T0;

syms kk;
disp_rel = w0^2 == g * kk * tanh(kk * h);
k0 = double(vpasolve(disp_rel, kk, [0 inf]));

disp_rel = (2*w0)^2 == g*kk*tanh(kk*h);
wave_num = vpasolve(disp_rel, kk, [0 inf]);
k2w = double(wave_num);
disp_rel = (3*w0)^2 == g*kk*tanh(kk*h);
wave_num = vpasolve(disp_rel, kk, [0 inf]);
k3w = double(wave_num);

kh = k0 * h;
L0 = 2*pi / k0;
a0 = eps / k0;

disp(['ka_=_', num2str(eps), ', _; kh_=_', num2str(kh)]);

%% %%%%%%%%%%%%%%
% SOLVING NONLINEAR SCHRODINGER (NLS) EQUATION
%{
n = 0.5*(1+2*kh/sinh(2*kh));
cg = n * (w0/k0);

dcgdk = w0*(2*h*csch(2*kh)-4*h^2*k0*cOTH(2*kh)*csch(2*kh))/(2*k0) - ...
w0*(1+2*kh*csch(2*kh))/(2*k0^2);
alpha = -1/(2*cg^3)*dcgdk;
beta = (k0^3/n)*((cosh(4*kh)+8-2*tanh(kh)^2)/(16*sinh(kh)^4) - ...
1/(2*sinh(2*kh)^2)*(2*cosh(kh)^2+n)^2/(kh*tanh(kh)-n^2));

% Since A is dimensionless : A = eta / a0
alpha = alpha * 0.5;
beta = beta / k0^2;

tlen = 32;
tfrac = 64;
dt = T0/tfrac;
Ttot = tlen*T0;

t = -Ttot/2 : dt : Ttot/2-dt;

NN = tlen*tfrac;
N2 = NN/2;

dx = -L0/tfrac;
dksi = eps^2*dx; % dimensionless integration

% Initial conditions
xf = 10;
x = xf;
xend = 0;

m = 3.0;
A = exp(-(t/(m*T0)).^2)*exp(-1i*k0*x);
eta = a0*real(A.*exp(1i*(k0*x-w0*t)));

ETAi = fft(eta);
ETAi = ETAi(1 : fix(length(ETAi) / 2));
ETAi = ETAi / length(ETAi);
w = [0 : length(ETAi)-1] * 2 * pi / (t(end)-t(1));

% From Matlab: fft = c exp(iwt)
% Here we define surface elevation as c exp(-iwt)
% Therefore negative frequencies first
nu(1:N2+1) = 0:-1:-N2;
nu((N2+2):NN) = N2-1:-1:1;

for j = 1:NN
    expfact(j) = exp(1i*alpha*(nu(j)*2*pi/(Ttot*eps))^2*dksi);
end

% Integrate NLS equation numerically

figure('pos',[200 200 800 600]);
x = x + dx;
while x > xend
    % Numerical solution to cubic term

```



```

/ (sinh(k0*h)^6*(2*k0*(h+L)*coth(k0*h)-1)) ...
* (1i * A.^2 .* exp(-2*1i*w0*t));
U2b = -1i * 2*w0 * X2b;
X2b = real(X2b) / X1_max;
U2b = real(U2b) / U1_max;

X2d = - (a0^2*g^2*k0^3*k2w^2*(h+L)) ...
/ (8*w0^4*(1-cosh(k2w*h)+k2w*(h+L)*sinh(k2w*h))) ...
* (cosh(k0*h)^2*(2*k0*h+sinh(2*k0*h))) ...
/ ((1+cosh(2*k0*h))^2 * (1-cosh(k0*h)+k0*(h+L)*sinh(k0*h))) ...
* (k2w/(k0-k2w)^2 ...
- k2w/(k0+k2w)^2 ...
+ k2w*cosh((k0+k2w)*h)/(k0+k2w)^2 ...
+ k0*(h+L)*sinh((k0+k2w)*h)/(k0+k2w) ...
- k2w*cosh((k0-k2w)*h)/(k0-k2w)^2 ...
+ k0*(k0-k2w)*(h+L)*sinh((k0-k2w)*h)/(k0-k2w)^2) ...
* (1i * A.^2 .* exp(-2*1i*w0*t));
U2d = -1i * 2*w0 * X2d;
X2d = real(X2d) / X1_max;
U2d = real(U2d) / U1_max;

%% %%%%%%%%%%%%%% Wavemaker motion at 3-rd order

X3b = (a0^3*k0^3*(h+L))/96 ...
* csch(k0*h)^5 * (5+30*cosh(2*k0*h)+cosh(4*k0*h)) ...
* (6*k0*h+sinh(6*k0*h)) ...
/ ((2*cosh(2*k0*h)-1) * (1-cosh(3*k0*h)+3*k0*(h+L)*sinh(3*k0*h))) ...
* (1i * A.^3 .* exp(-3*1i*w0*t));
U3b = -1i * 3*w0 * X3b;
X3b = real(X3b) / X1_max;
U3b = real(U3b) / U1_max;

X3d_sub_1 = (3*a0^3*g*k0^4*(h+L)) / (256*w0^2*sinh(k0*h)^4*cosh(k0*h)) ...
* ((1+2*k0^2*h*(h+2*L) - cosh(2*k0*h) ...
+ 2*k0*(h+L)*sinh(2*k0*h)) * (4*k0*h+sinh(4*k0*h))) ...
/ ((cosh(k0*h)-k0*(h+L)*sinh(k0*h)-1) ...
* (cosh(2*k0*h) - 2*k0*(h+L)*sinh(2*k0*h) - 1)) ...
* (1i * A.^3 .* exp(-1i*w0*t));
U3d_sub_1 = -1i * w0 * X3d_sub_1;
X3d_sub_1 = real(X3d_sub_1) / X1_max;
U3d_sub_1 = real(U3d_sub_1) / U1_max;

X3d_sub_2 = (a0^3*g^3*k0^6*(h+L)*(2*k0*h+sinh(2*k0*h))^2) ...
/ (3072*w0^6*cosh(k0*h)^6) ...
* (6*k0*(h+L)*cosh(2*k0*h) - 2*k0*(3*L+2*k0^2*h*(h^2+3*h*L+3*L^2)) ...
- 3*(1+2*k0^2*(h+L)^2)*sinh(2*k0*h)) ...
/ (sech(k0*h)+k0*(h+L)*tanh(k0*h)-1)^3 ...
* (1i * A.^3 .* exp(-1i*w0*t));
U3d_sub_2 = -1i * w0 * X3d_sub_2;
X3d_sub_2 = real(X3d_sub_2) / X1_max;
U3d_sub_2 = real(U3d_sub_2) / U1_max;

X3d_sub_3 = (a0^3*g*k0^4*(h+L)*(2*k0*h+sinh(2*k0*h))) ...
/ (96*w0^2*sinh(k0*h)^4*cosh(k0*h)) ...
* (10-9*cosh(k0*h)-cosh(3*k0*h) ...
+ 3*k0*(h+L)*(3*sinh(k0*h)+sinh(3*k0*h))) ...
/ ((1-cosh(k0*h)+k0*(h+L)*sinh(k0*h))^2) ...
* (1i * A.^3 .* exp(-1i*w0*t));
U3d_sub_3 = -1i * w0 * X3d_sub_3;
X3d_sub_3 = real(X3d_sub_3) / X1_max;
U3d_sub_3 = real(U3d_sub_3) / U1_max;

X3d_sub_4 = (3*a0^3*g*k0^4*(h+L)*csch(k0*h)^2*csch(2*k0*h)^2) ...
* (4*k0*h+sinh(4*k0*h)) ...
/ (32*w0^2 * (k0*(h+L)-tanh(k0*h/2)) * (2*k0*(h+L)-tanh(k0*h))) ...
* (1i * A.^3 .* exp(-1i*w0*t));
U3d_sub_4 = -1i * w0 * X3d_sub_4;
X3d_sub_4 = real(X3d_sub_4) / X1_max;
U3d_sub_4 = real(U3d_sub_4) / U1_max;

X3d_sub_5 = (a0^3*g^3*k0^6*(h+L) ...
* (2*k0*L-2*k0*(h+L)*cosh(2*k0*h)+sinh(2*k0*h)) ...
* (2*k0*h+sinh(2*k0*h))^2) ...
/ (512*w0^6*cosh(k0*h)^6 * (sech(k0*h)+k0*(h+L)*tanh(k0*h)-1)^3) ...
* (1i * A.^3 .* exp(-1i*w0*t));
U3d_sub_5 = -1i * w0 * X3d_sub_5;
X3d_sub_5 = real(X3d_sub_5) / X1_max;
U3d_sub_5 = real(U3d_sub_5) / U1_max;

```

```

X3d_sub_6 = (a0^3*g*k0^4*(h+L) * (cosh(k0*h)^3-1) * (2*k0*h+sinh(2*k0*h))) ...
/ (16*w0^2*sinh(k0*h)^6*cosh(k0*h) * (k0*(h+L)-tanh(k0*h/2))^2) ...
* (1 i * A.^3 .* exp(-1 i * w0*t));
U3d_sub_6 = -1 i * w0 * X3d_sub_6;
X3d_sub_6 = real(X3d_sub_6) / X1_max;
U3d_sub_6 = real(U3d_sub_6) / U1_max;

X3d_sup_1 = (a0^3*g*k0^4*k3w^2*(h+L)*(4*k0*h+sinh(4*k0*h))) ...
/ (64*w0^2*sinh(k0*h)^4*cosh(k0*h)) ...
* (cosh((k0-k3w)*h) - 2*(k0^2+k3w^2)/(k0+k3w)^2 ...
- (k0-k3w)/(k0+k3w)^2 * ((k3w-k0)*cosh((k0+k3w)*h) ...
+ 2*(k0+k3w)*(h+L)*(k0*cosh(k3w*h)*sinh(k0*h) ...
- k3w*cosh(k0*h)*sinh(k3w*h)))) ...
/ ((k0-k3w)^2 * (1-cosh(2*k0*h)+2*k0*(h+L)*sinh(2*k0*h)) ...
* (1-cosh(k3w*h)+k3w*(h+L)*sinh(k3w*h))) ...
* (1 i * A.^3 .* exp(-3*i*w0*t));
U3d_sup_1 = -1 i * 3*w0 * X3d_sup_1;
X3d_sup_1 = real(X3d_sup_1) / X1_max;
U3d_sup_1 = real(U3d_sup_1) / U1_max;

X3d_sup_2 = (a0^3*g^3*k0^7*k3w^2*(h+L)*(2*k0*h+sinh(2*k0*h))^2) ...
/ (768*w0^6*cosh(k0*h)^5) * ((2*(h+L)*cosh((k0-k3w)*h))/(k0-k3w)^2 ...
+ (2*(k0+k3w)*(h+L)*cosh((k0+k3w)*h))/(k0+k3w)^3 ...
- (4*(k0^4-k3w^4)*L+(k0+k3w)^3*(2+(k0-k3w)^2*(h+L)^2) ...
* sinh((k0-k3w)*h))/(k0^2-k3w^2)^3 ...
- ((2+(k0+k3w)^2*(h+L)^2)*sinh((k0+k3w)*h))/(k0+k3w)^3) ...
/ ((cosh(k3w*h)-k3w*(h+L)*sinh(k3w*h)-1) ...
* (sech(k0*h)+k0*(h+L)*tanh(k0*h)-1)^2) ...
* (1 i * A.^3 .* exp(-3*i*w0*t));
U3d_sup_2 = -1 i * 3*w0 * X3d_sup_2;
X3d_sup_2 = real(X3d_sup_2) / X1_max;
U3d_sup_2 = real(U3d_sup_2) / U1_max;

X3d_sup_3 = (a0^3*g*k0^4*k3w^2*(h+L)*(2*k0*h+sinh(2*k0*h))) ...
/ (32*w0^2*sinh(k0*h)^4*cosh(k0*h)) ...
* (1/(k3w-2*k0)^2 + 1/(2*k0+k3w)^2 ...
- cosh((2*k0-k3w)*h)/(k3w-2*k0)^2 ...
- cosh((2*k0+k3w)*h)/(2*k0+k3w)^2 ...
+ ((h+L)*sinh((2*k0-k3w)*h))/(2*k0-k3w) ...
+ ((h+L)*sinh((2*k0+k3w)*h))/(2*k0+k3w)) ...
/ ((cosh(k0*h)-k0*(h+L)*sinh(k0*h)-1) ...
* (1-cosh(k3w*h)+k3w*(h+L)*sinh(k3w*h))) ...
* (1 i * A.^3 .* exp(-3*i*w0*t));
U3d_sup_3 = -1 i * 3*w0 * X3d_sup_3;
X3d_sup_3 = real(X3d_sup_3) / X1_max;
U3d_sup_3 = real(U3d_sup_3) / U1_max;

X3d_sup_4 = (a0^3*g*k0^3*k3w^2*(h+L)*(4*k0*h+sinh(4*k0*h))) ...
/ (32*w0^2*(k0^2-k3w^2)*sinh(k0*h)^4*cosh(k0*h)) ...
* (k0 - k0*cosh(k0*h)*cosh(k3w*h) + k3w*sinh(k0*h)*sinh(k3w*h)) ...
/ ((1-cosh(2*k0*h)+2*k0*(h+L)*sinh(2*k0*h)) ...
* (1-cosh(k3w*h)+k3w*(h+L)*sinh(k3w*h))) ...
* (1 i * A.^3 .* exp(-3*i*w0*t));
U3d_sup_4 = -1 i * 3*w0 * X3d_sup_4;
X3d_sup_4 = real(X3d_sup_4) / X1_max;
U3d_sup_4 = real(U3d_sup_4) / U1_max;

X3d_sup_5 = (a0^3*g^3*k0^6*k3w^2*(h+L)*(2*k0*h+sinh(2*k0*h))^2) ...
/ (384*w0^6*cosh(k0*h)^5) ...
* ((h+L)*cosh((k0-k3w)*h)/(k0-k3w) ...
+ (h+L)*cosh((k0+k3w)*h)/(k0+k3w) ...
- (2*k0*(k0^2-k3w^2)*L+(k0+k3w)^2*sinh((k0-k3w)*h)) ...
/ (k0^2-k3w^2)^2 - sinh((k0+k3w)*h)/(k0+k3w)^2) ...
/ ((1-cosh(k3w*h)+k3w*(h+L)*sinh(k3w*h)) ...
* (sech(k0*h)+k0*(h+L)*tanh(k0*h)-1)^2) ...
* (1 i * A.^3 .* exp(-3*i*w0*t));
U3d_sup_5 = -1 i * 3*w0 * X3d_sup_5;
X3d_sup_5 = real(X3d_sup_5) / X1_max;
U3d_sup_5 = real(U3d_sup_5) / U1_max;

X3d_sup_6 = (a0^3*g*k0^3*k3w^2*(h+L)*(2*k0*h+sinh(2*k0*h))) ...
/ (1024*w0^2*(4*k0^2-k3w^2)*sinh(k0*h/2)^6*cosh(k0*h/2)^5*cosh(k0*h)) ...
* (2*k0-2*k0*cosh(2*k0*h)*cosh(k3w*h) + k3w*sinh(2*k0*h)*sinh(k3w*h)) ...
/ ((k0*(h+L)*csch(k0*h/2)-sech(k0*h/2)) ...
* (1-cosh(k3w*h)+k3w*(h+L)*sinh(k3w*h))) ...
* (1 i * A.^3 .* exp(-3*i*w0*t));
U3d_sup_6 = -1 i * 3*w0 * X3d_sup_6;
X3d_sup_6 = real(X3d_sup_6) / X1_max;
U3d_sup_6 = real(U3d_sup_6) / U1_max;

```

```

X3d_sub = X3d_sub_1 + X3d_sub_2 + X3d_sub_3 + X3d_sub_4 + X3d_sub_5 + X3d_sub_6;
U3d_sub = U3d_sub_1 + U3d_sub_2 + U3d_sub_3 + U3d_sub_4 + U3d_sub_5 + U3d_sub_6;

X3d_sup = X3d_sup_1 + X3d_sup_2 + X3d_sup_3 + X3d_sup_4 + X3d_sup_5 + X3d_sup_6;
U3d_sup = U3d_sup_1 + U3d_sup_2 + U3d_sup_3 + U3d_sup_4 + U3d_sup_5 + U3d_sup_6;

%% %%%%%%%%%%%%%%
% Plots

mtlbset = {[0 ,0.4470 ,0.7410];[0.8500 ,0.3250 ,0.0980];[0.9290 ,0.6940 ,0.1250];...
[0.4940 ,0.1840 ,0.5560];[0.4660 ,0.6740 ,0.1880];...
[0.3010 ,0.7450 ,0.9330];[0.6350 ,0.0780 ,0.1840]}'';

figure('units', 'centimeters', 'Position', [5, 0, 21, 21], 'Color',[1 1 1]);

subplot(3,1,1,'FontSize',14,'XColor',[0 0 0], 'YColor',[0 0 0], 'box','on');
grid on;
hold on;
p1 = plot(t, eta1 ,'_', 'LineWidth',1.5, 'Color', mtlbset{1});
p2 = plot(t, eta1+eta2 ,'_', 'LineWidth',1.5, 'Color', mtlbset{5});
p3 = plot(t, eta1+eta2+eta3 ,'_', 'LineWidth',1.5, 'Color', 'black');
hold off
yticks([-1 -0.5 0 0.5 1 1.5]);
xlabel('$$t_{sec}$$', 'FontSize', 15, 'interpreter', 'latex');
ylabel('$$\eta_a/a_0$$', 'FontSize', 15, 'interpreter', 'latex');
legend([p1 p2 p3], {'$$\eta_a^{(1)}$$', '$$\eta_a^{(1)}+\eta_a^{(2)}$$', ...
'$$\eta_a^{(1)}+\eta_a^{(2)}+\eta_a^{(3)}$$'}, ...
'interpreter', 'latex', 'FontSize', 15, 'Location', 'NorthWest');

subplot(3,1,2,'FontSize',14,'XColor',[0 0 0], 'YColor',[0 0 0], 'box','on');
grid on;
hold on;
p1 = plot(t, U1, '_', 'LineWidth',1.5, 'Color', mtlbset{1});
p2 = plot(t, U2b+U2d, '_', 'LineWidth',1.5, 'Color', mtlbset{5});
p3 = plot(t, U3b+U3d_sub+U3d_sup, '_', 'LineWidth',1.5, 'Color', mtlbset{2});
p4 = plot(t, U1+U2b+U2d+U3b+U3d_sub+U3d_sup, '-k', 'LineWidth',1.5);
hold off
yticks([-1 -0.5 0 0.5 1]);
xlabel('$$t_{sec}$$', 'FontSize', 15, 'interpreter', 'latex');
ylabel('$$U/\max(U^{(1)})$$', 'FontSize', 15, 'interpreter', 'latex');
legend([p1 p2 p3 p4], {'$$U^{(1)}$$', '$$U_b^{(2)}+U_d^{(2)}$$', ...
'$$U_b^{(3)}+U_d^{(3)}+U_d^{(3)}+U_d^{(3)}$$', ...
'$$U^{(1)}+U^{(2)}+U^{(3)}$$'}, ...
'interpreter', 'latex', 'FontSize', 15, 'Location', 'NorthWest');

subplot(3,1,3,'FontSize',14,'XColor',[0 0 0], 'YColor',[0 0 0], 'box','on');
grid on;
hold on;
p1 = plot(t, X1, '_', 'LineWidth',1.5, 'Color', mtlbset{1});
p2 = plot(t, X2b+X2d, '_', 'LineWidth',1.5, 'Color', mtlbset{5});
p3 = plot(t, X3b+X3d_sub+X3d_sup, '_', 'LineWidth',1.5, 'Color', mtlbset{2});
p4 = plot(t, X1+X2b+X2d+X3b+X3d_sub+X3d_sup, '-k', 'LineWidth',1.5);
hold off
yticks([-1 -0.5 0 0.5 1]);
xlabel('$$t_{sec}$$', 'FontSize', 15, 'interpreter', 'latex');
ylabel('$$X/\max(X^{(1)})$$', 'FontSize', 15, 'interpreter', 'latex');
legend([p1 p2 p3 p4], {'$$X^{(1)}$$', '$$X_b^{(2)}+X_d^{(2)}$$', ...
'$$X_b^{(3)}+X_d^{(3)}+X_d^{(3)}+X_d^{(3)}$$', ...
'$$X^{(1)}+X^{(2)}+X^{(3)}$$'}, ...
'interpreter', 'latex', 'FontSize', 15, 'Location', 'NorthWest');

```

## Приложение 7

Патенты на изобретения и полезные модели.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

(19) RU (11) **2 533 590** (13) C2

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА  
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ  
(51) МПК  
F25B 9/04 (2006.01)

**(12) ОПИСАНИЕ ИЗОБРЕТЕНИЯ К ПАТЕНТУ**

Статус: действует (последнее изменение статуса: 28.08.2017)

Пошлина: учтена за 5 год с 05.02.2017 по 04.02.2018

(21)(22) Заявка: [2013104581/06](#), 04.02.2013(24) Дата начала отсчета срока действия патента:  
**04.02.2013**

Приоритет(ы):

(22) Дата подачи заявки: **04.02.2013**(43) Дата публикации заявки: **10.08.2014** Бюл. №  
[22](#)(45) Опубликовано: [20.11.2014](#) Бюл. № [32](#)(56) Список документов, цитированных в отчете о  
поиске: RU 2370710 C1, 20.10.2009. US  
2907174 A, 06.10.1959. US 3173273 A,  
16.03.1965Адрес для переписки:  
620049, г.Екатеринбург, пер. Автоматики, 8,  
оф. 202, ООО "КБ "ЧКЗ-ЮГСОН"

(72) Автор(ы):

Ловцов Александр Викторович (RU),  
Носков Александр Семенович (RU),  
Сыропятов Владимир Павлович (RU),  
**Хант Анатолий Вильевич (RU)**

(73) Патентообладатель(и):

**Общество с ограниченной  
ответственностью "Конструкторское бюро  
" ЧКЗ - ЮГСОН" (RU)****(54) ВИХРЕВАЯ ТРУБА**

(57) Реферат:

Изобретение относится к энергетике. Вихревая труба состоит из соплового ввода, камеры энергоразделения, дросселя для торможения горячего потока и диффузора. Сопловой ввод содержит направляющие лопатки каплевидной формы, симметричные относительно оси, проходящей через кромку лопатки. Проточная часть соплового ввода, расположенная за направляющими лопатками, выполнена в виде поворота, ограниченного двумя поверхностями вращения, образующие которых представляют собой дуги. Направляющие лопатки соплового ввода выполнены с возможностью поворота относительно оси, перпендикулярной к плоскостям прилегания лопаток. Изобретение направлено на увеличение энергетической эффективности вихревой трубы, работающей как в дозвуковом, так и в сверхзвуковом режимах. 2 з.п. ф-лы, 3

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

(19) RU (11) **2 406 952** (13) С1

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА  
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ,  
ПАТЕНТАМ И ТОВАРНЫМ ЗНАКАМ  
(51) МПК  
[F26B 9/06 \(2006.01\)](#)

**(12) ОПИСАНИЕ ИЗОБРЕТЕНИЯ К ПАТЕНТУ**

Статус: прекратил действие, но может быть восстановлен (последнее изменение статуса:  
17.04.2017)  
Пошлина: учтена за 7 год с 24.07.2015 по 23.07.2016

(21)(22) Заявка: [2009128539/06](#), 23.07.2009(24) Дата начала отсчета срока действия патента:  
**23.07.2009**(45) Опубликовано: [20.12.2010](#) Бюл. № 35(56) Список документов, цитированных в отчете о  
поиске: RU 32492 U1, 20.09.2003. SU 842363  
A1, 30.06.1981. SU 567915 A1, 05.08.1977. SU  
211398 A, 08.02.1968. SU 1129475 A1,  
15.12.1984. SU 1096471 A1, 07.06.1984.

Адрес для переписки:  
**620049, г.Екатеринбург, пер. Автоматики, 8,  
оф.202, ООО Конструкторское бюро "ЧКЗ-  
ЮГСОН"**

(72) Автор(ы):

Сыропятов Владимир Павлович (RU),  
Ловцов Александр Викторович (RU),  
Ан Александр Владимирович (RU),  
Кирсанов Юрий Александрович (RU),  
**Хант Анатолий Вильевич (RU)**

(73) Патентообладатель(и):

**Общество с ограниченной  
ответственностью "Конструкторское бюро  
" ЧКЗ - ЮГСОН " (RU)**

**(54) ЦИКЛИЧЕСКАЯ СУШИЛКА СЕМЯН И ЗЕРНА**

(57) Реферат:

Изобретение относится к сельскохозяйственному производству, в частности к сушке семян и зерна (продовольственного и фуражного), и может быть использовано также в лесном хозяйстве и пищевой промышленности, как в крупных хозяйствах промышленного типа, так и в фермерских и личных хозяйствах при ограниченных объемах производства. Сущностью изобретения является то, что для нагрева и охлаждения подаваемого в бункеры воздуха используют вихревую трубу, соединенную своими выходами с бункерами через устройства переключения потоков нагретого и охлажденного воздуха, а в качестве нагнетателя воздуха используется источник сжатого воздуха в виде компрессора или воздуходувки, при этом нагнетаемый воздух от источника подается в осушитель, а затем в вихревую трубу, где происходит его разделение на нагретый и охлажденный потоки, причем холодный поток воздуха при этом используют для достижения эффекта окончательного охлаждения продукта перед выгрузкой, а температуру теплоносителя регулируют подачей воздуха, нагнетаемого в вихревую трубу. Изобретение позволяет использовать одно устройство для нагрева и охлаждения подаваемого на сушку воздуха и регулировать (изменять) продолжительность циклов нагрева и охлаждения

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

(19) RU (11) **124 367** (13) U1

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА  
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ  
(51) МПК  
[F22B 33/18 \(2006.01\)](#)

**(12) ОПИСАНИЕ ПОЛЕЗНОЙ МОДЕЛИ К ПАТЕНТУ**

Статус: может прекратить свое действие (последнее изменение статуса: 27.12.2017)  
Пошлина: учтена за 5 год с 22.08.2016 по 21.08.2017

(21)(22) Заявка: [2012135922/06](#), 21.08.2012(24) Дата начала отсчета срока действия патента:  
**21.08.2012**

Приоритет(ы):

(22) Дата подачи заявки: **21.08.2012**(45) Опубликовано: [20.01.2013](#) Бюл. № 2

Адрес для переписки:  
**620049, г.Екатеринбург, пер. Автоматики, 8,  
оф.202, ООО "КБ "ЧКЗ-ЮГСОН"**

(72) Автор(ы):

**Сыропятов Владимир Павлович (RU),  
Ловцов Александр Викторович (RU),  
Хант Анатолий Вильевич (RU),  
Пильник Александр Самуилович (RU),  
Чернобородов Вадим Игоревич (RU)**

(73) Патентообладатель(и):

**Общество с ограниченной  
ответственностью "Конструкторское бюро  
" ЧКЗ - ЮГСОН " (RU)**

**(54) ПЕРЕНОСНОЙ ПАРОГЕНЕРАТОРНЫЙ МОДУЛЬ С ЦИРКУЛЯЦИЕЙ ВЫХЛОПНЫХ ГАЗОВ****(57) Реферат:**

1. Переносной парогенераторный модуль с принудительной циркуляцией выхлопных газов, содержащий теплообменный аппарат вертикального типа, соединенный с ним насос и заслонку, при этом модуль оснащен системой автоматического управления, отличающийся тем, что модуль содержит насос, имеющий возможность регулирования подачи воды, а заслонка выполнена с возможностью направления потока выхлопных газов - в теплообменный аппарат или вне его.

2. Парогенераторный модуль по п.1, отличающийся тем, что содержит насос с регулированием частоты вращения приводного вала в зависимости от требуемой температуры и агрегатного состояния воды.

3. Парогенераторный модуль по п.1, отличающийся тем, что система управления содержит математическую зависимость температуры от давления для насыщенного состояния воды, позволяющую определить ее агрегатное состояние.

4. Парогенераторный модуль по п.1, отличающийся тем, что теплопередающая поверхность теплообменного аппарата выполнена в виде пучка прямых труб.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

RU

2025669129ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА  
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ

## (12) ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства):

2025669129

Дата регистрации: 23.07.2025

Номер и дата поступления заявки:

2025667764 11.07.2025

Дата публикации и номер бюллетеня:

23.07.2025 Бюл. № 8

Контактные реквизиты:

нет

Авторы:

Хаит Анатолий Вильевич (RU),  
Щерба Виктор Евгеньевич (RU)

Правообладатель:

Хаит Анатолий Вильевич (RU)

Название программы для ЭВМ:

PyWavemakerW

## Реферат:

Программа для ЭВМ предназначена для использования в системах автоматизированного управления волнопродуктором гидроволновых лотков. Программа для ЭВМ вычисляет перемещение поверхности волнопродуктора в зависимости от времени, которое требуется для генерации волнового пакета на поверхности воды, имеющего наперед заданную форму. Вычисление перемещения волнопродуктора осуществляется на основании слабо нелинейного алгоритма 3-го порядка точности, а также на основании нелинейного кубического уравнения Шредингера. Точность программы для ЭВМ ограничена волновыми пакетами, характеризуемыми узкополосным амплитудным спектром с ярко выраженной несущей (доминирующей) гармоникой. Тип ЭВМ: персональный компьютер. ОС: Windows, Linux, Mac OS.

Язык программирования: Python

Объем программы для ЭВМ: 17 КБ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

RU

2025669130ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА  
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ

## (12) ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства):

2025669130

Дата регистрации: 23.07.2025

Номер и дата поступления заявки:

2025667986 11.07.2025

Дата публикации и номер бюллетеня:

23.07.2025 Бюл. № 8

Контактные реквизиты:

e-mail: [haitanatoliy@yandex.ru](mailto:haitanatoliy@yandex.ru);  
тел.: +7(922)1352446

Авторы:

Хаит Анатолий Вильевич (RU),  
Щерба Виктор Евгеньевич (RU)

Правообладатель:

Хаит Анатолий Вильевич (RU)

Название программы для ЭВМ:

PyWavemakerZ

**Реферат:**

Программа для ЭВМ предназначена для использования в системах автоматизированного управления волнопродуктором гидроволновых лотков. Программа для ЭВМ вычисляет перемещение поверхности волнопродуктора в зависимости от времени, которое требуется для генерации волнового пакета на поверхности воды, имеющего наперед заданную форму. Вычисление перемещения волнопродуктора осуществляется на основании слабо нелинейного алгоритма 2-го порядка точности, а также на основании теории и уравнения Захарова. Точность программы для ЭВМ не ограничена шириной амплитудного спектра волнового пакета. Тип ЭВМ: IBM PC - совмест. ПК; ОС: Windows, Linux, Mac OS.

**Язык программирования:** Python**Объем программы для ЭВМ:** 13 КБ

**Приложение 8**

**Акты внедрения результатов работы**



о о о  
**ЧКЗ-ЮГСОН**  
КОНСТРУКТОРСКОЕ БЮРО

Россия, 620049, г.Екатеринбург, пер. Автоматики, 4,  
оф.407  
Факс (343) 374-70-47. Тел. 374-70-47  
E-mail: chkz-yugson@mail.ru  
www. chkz-yugson.ru

Р/с 40702810316160109286 к/с 30101810500000000674  
в Уральском банке ПАО Сбербанк,  
г. Екатеринбург  
БИК 046577674  
ИНН/КПП 6670112790 / 667001001

## Справка о внедрении

Настоящим подтверждаю, что результаты исследования Хайта Анатолия Вильича, изложенные в диссертации «Разработка и реализация методологических основ расчета сложных закрученных турбулентных одно- и двухфазных течений в гидро- и пневмоаппаратах на основе гипотезы Буссинеска», представленной на соискание степени доктора технических наук по специальности 2.5.10 «Гидравлические машины, вакуумная, компрессорная техника, гидро- и пневмосистемы», были использованы при разработке конструкторской документации и изготовлении вихревых труб, предназначенных для промышленной эксплуатации: ВТ 3-6, ВТ 5-90, ВТ 30Р, РЕСШ.4414, ВТ 30-50, ДВТР 40-9000 и ВТ 63Р.

Зам.генерального директора

Гусева Е.В.





## Акционерное общество «КЭНПО»

620075, Свердловская область, г. Екатеринбург, ул. Розы Люксембург, 37, офис 501

ИНН 6660126610, КПП 668501001, ОГРН 1026604936390

Телефон/факс: (343) 253-16-91 (92, 93, 94, 95)

E-mail: office@kenpo.ru

### Справка о внедрении

Настоящим подтверждаем, что результаты исследования Хайта Анатолия Вильича, изложенные в диссертации «Разработка и реализация методологических основ расчета сложных закрученных турбулентных одно- и двухфазных течений в гидро- и пневмоаппаратах на основе гипотезы Буссинеска», представленной на соискание степени доктора технических наук по специальности 2.5.10 «Гидравлические машины, вакуумная, компрессорная техника, гидро- и пневмосистемы», используются при изготовлении вихревой трубы РЕСШ.4414 и ряда сопутствующих пневматических устройств, применяемых в промышленной установке нагрева воздуха.

Директор

Щукин М.В.





15 September 2025

To whom it may concern

Subject: Letter of research results implementation

I hereby confirm that the results of the research by Dr. Anatoliy Khait presented in the dissertation "Development and implementation of computing methodology for complex swirling turbulent single- and two-phase flows in hydraulic and pneumatic devices based on the Boussinesq hypothesis" submitted in fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Technical Sciences represent fundamental and applicative interest in the Research field (specialty) 2.5.10 "Hydraulic Machines; Vacuum and Compressor Technology; Hydraulic and Pneumatic Systems."

In particular, the nonlinear algorithm for automated control of a wavemaker that was proposed and developed within the framework of the dissertation research, is currently used in my research group at Tel Aviv University and can be recommended for additional research and industrial applications.

Sincerely,

Professor Lev Shemer,  
School of Mechanical Engineering  
Tel-Aviv University  
Tel-Aviv 69978 Israel  
Phone: +972 3 6408128  
Fax: +972 3 6407334  
E-Mail: [shemer1@tauex.tau.ac.il](mailto:shemer1@tauex.tau.ac.il)  
URL: <https://www.levshemer.sites.tau.ac.il/>